A gravitációs hullámok geometriai optikai közelítése

Szakdolgozat

Készítette:
Fóris Attila
Fizika Bsc hallgató

Témavezető:
Prof. Dr. Gergely Árpád László

Konzulens:
Nagy Cecília

Természettudományi és Informatikai Kar
Elméleti Fizika Tanszék
Szegedi Tudományegyetem

2021 Szeged

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés és célkitűzés **2**

2. Harmonikus koordináták, Christoffel-szimbólum és a metrika kapcsolata **4**
2.1. A metrika deriváltja 4
2.2. A $\sqrt{-g}$ deriváltjának meghatározása 5
2.3. A Christoffel szimbólum, a metrika és a harmonikus koordináták kapcsolata 6

3. A gravitációs hullámok gyengetér-közelítésben **7**
3.1. Bevezető 7
3.2. A gravitációs hullámok analógiája az elektromágneses hullámokkal 7
3.3. A gravitációs hullámok gyengetér-közelítésben 10

4. Nagyfrekvenciás gravitációs hullámok görbült téridőben **13**
4.1. Bevezető 13
4.2. A h_{ab} inverze 13
4.3. Perturbált Ricci-tenzor 14
4.4. Perturbált Riemann-tenzor 17
4.5. Mértéktranszformáció és invariancia 19
4.6. Lineáris közelítés 20
4.7. Einstein–Hilbert hatás 22

5. Összegzés **24**

6. Függelék **27**
6.1. Vektor 27
6.2. 1-forma 27
6.3. Kovariáns deriválás 27
6.4. Metrikával kompatibilis konnexió 28
6.5. Riemann-tenzor 28
6.6. Einstein-egyenlet 29

7. Köszönetnyilvánítás **31**

8. Hivatkozások **32**

9. Nyilatkozat **33**

1. Bevezetés és célkitűzés

Az általános relativitáselmélet fontos szerepet játszik a modern fizikában és a csillagászatban. Ennek oka az, hogy pontos eredményeket produkál a csillagok körül keringő égitestek mozgására, így jogosan használják az Univerzum problémáinak megoldására az elméletet. Emellett megjósolta a gravitációs hullámok létezését is, amit kísérletileg is sikerült bizonyítani. A gravitációs hullámok a téridő görbületének hullámszerűen terjedő zavarai, amit felgyorsult tömegek generálnak, hullámként fénysebességgel kifelé terjednek a forrásuktól. Albert Einstein általános relativitáselmélete [1] jósolta meg a létezésüket először, de Poincaré javasolta őket először [2] 1905-ben. A gravitációs hullámok nem csak a klasszikus értelemben vett tömegvonzás melléktermékei, hanem a tömeg kvadrupól momentum második és harmadik deriváltjának eltűnése okozza. Energiájukat gravitációs sugárzás formájában szállítják, ami hasonlít az elektromágneses sugárzáshoz [3]. Az első közvetett bizonyíték a gravitációs hullámok létezésére a Hulse-Taylor bináris pulzárnál megfigyelt bomlásból származott, amely megfelelt az általános relativitáselmélet által jósolt bomlásnak, mivel az energia elvész a gravitációs sugárzás miatt. 1993-ban Russel A. Hulse és ifj. J. Hooton Taylor fizikai Nobel-díjat kaptak a felfedezésükért. Az első közvetlen bizonyíték 2015 őszére datálható, amikor a világ legérzékenyebb gravitációs hullám detektorai, az USA-ban található Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory (LIGO) két interferométere jelzett két távoli, összeolvadó fekete lyuk által kibocsátott gravitációs hullámokat. Az eredmények kiértékelésében számos magyar tudós is részt vett. Visszatérve Einstein általános relativitáselméletéhez elmondható, hogy a teória a gravitációt a téridő görbületéből adódó jelenségként kezeli. Magát a görbületet a tömeg jelenléte okozza. Általánosságban elmondható, hogy minél nagyobb a tömeg egy vizsgált térfogatban, annál nagyobb a téridő görbülete a vizsgált térfogat határán [4]. Ahogy a tömeggel rendelkező testek mozognak a téridőben, a görbület megváltozik. Vannak olyan esetek azonban, amikor a gyorsuló testek generálnak változásokat a görbületben, amelyek hullámszerűen, fénysebességgel terjednek tovább. A fénysebességgel történő terjedés bizonyítása 2017-ben történt, amikor a LIGO és a Virgo detektorok 2 másodpercen belül gravitációs hullám jeleket fogtak, miután a gamma sugár műholdak és az optikai teleszkópok azonos irányból észlelték a jeleket [7],[9]. A gravitációs hullámok kibocsátásának elsődleges forrásai a fehér törpék, a neutroncsillagok és a fekete lyukak. Utóbbi az én érdeklődésemet is nagyon felkelti és szeretnék velük a későbbi tanulmányaim során foglalkozni, mivel azzal a céllal jöttem el az egyetemre, hogy mélyen foglalkozhassak a gravitációs hullámokkal, fekete lyukak természetével, valamint feketelyuk-termodinamikával, amit már kidolgozott nagy részletességgel az egyik példaképem, Stephen Hawking. Fiatalabb koromban rengeteget olvastam a munkásságát, közülük is kiemelném az idő rövid történetét, valamint a nagy tervet, de ezek mellett a személyes kedvencem a mindenség elmélete, ami miatt megszerettem a termodinamikát és a gravitációt. Hawking is foglalkozott gravitációs hullámokkal. Összességében tehát nagyon szeretném a későbbiek során S. Hawking munkásságát részletesen megismerni. Ki szeretném emelni Rainer Weiss munkásságát, ugyanis úttörő szerepet játszott a lézerek interferometrikus gravitációs hullámdetektorra történő alkalmazásában is, ami arra utal, hogy az ilyen detektorhoz szükséges út hossza kilométeres karokat tesz szükségessé [5],[6]. Azért választottam ezt a témát, mert az érdeklődési körömhöz nagyon közel áll, valamint általános iskolás koromban rengeteget olvastam a gravitációról és magáról a fizikáról. Ez az érdeklődés középiskolás koromra sem lanyhult és szerettem volna minél mélyebben belelátni a gravitációelméletbe, így alakult ki a fentebb említett érdeklődési köröm. Motivált az is, hogy viszonylag terjedelmes irodalma van a témának, aminek a feldolgozása segített az elemző munkában. Dolgozatom felépítésében próbáltam a leglogikusabb utat követni, első lépésben olyan tankönyvi [10],[11],[12],[13] képleteket szeretnék részletesen reprodukálni, amik a téma mélyebb kibontásánál használatosak lesznek, majd a kapcsolódó fogalmak körüljárása illetve tisztázása után Isaacson [14] munkásságával szeretnék mélyen megismerkedni, ahol az első rész a gravitációs hullámok egyenletét írja le, míg a második megmutatja hogyan hat vissza a gravitációs hullám a téridőre. Ezen kívül feladatom volt még a megfelelő matematikai készségek elsajátítása, illetve a már meglévő, de a szakcikkben eredményként feltüntetett képletek reprodukálása és tanulmányozása. A dolgozatomat az előbbiekben megfogalmazott céloknak megfelelően öt fő részre tagoltam. A szakdolgozatom első részében S. Weinberg [10] a harmonikus koordinátákkal kapcsolatos eredményeit idéztem fel részletesen. A dolgozatom második részében tankönyvekben leírt és kidolgozott [10],[17],[11],[12] képleteket reprodukáltam . A dolgozatom harmadik részében Isaacson [14] által levezetett, de a cikkben nem részletezett számolásokhoz tartozó matematikai készségek elsajátítása után önállóan próbáltam felidézni ezeket. Az utolsó előtti fejezetben a jövőbeni feladatokra, tervekre és lehetőségekre hívtam fel a figyelmet a szakdolgozatban. Utolsó fejezetben pedig a dolgozatban megemlített tankönyvi [12],[13] fogalmakat mutattam be részletesen az eddig megtanultak alapján.

2. Harmonikus koordináták, Christoffel-szimbólum és a metrika kapcsolata

A fizika törvényei általában invariánsak, tehát a világot nem érdeklik a koordinátarendszereink. Ahhoz azonban, hogy egy fizikai egyenlet megoldható legyen, szükségünk van egy olyan rendszerre, amiben rögzítjük a koordinátákat. A harmonikus koordináták a legközelebbi megközelítés, amely az általános relativitáselméletben elérhető egy inerciális referenciakerethez a speciális relativitáselméletben [10]. Egy x^i koordináta harmonikus, ha

$$\Box x^i = 0, \tag{1}$$

ahol: $\Box = \partial_a \partial^a$ (gyenge térben, egyébként $\nabla_a \nabla^a$) d'Alembert operátor, valamint a következő összefüggés [10] érvényes rá:

$$\sqrt{-g}\Box x^i = \partial_a (g^{ab}\sqrt{-g}), \tag{2}$$

Ennek bizonyításához először a Leibniz-szabályt alkalmazzuk:

$$\partial_a (g^{ab}\sqrt{-g}) = \sqrt{-g}\partial_a (g^{ai}) + g^{ab}\partial_a \sqrt{-g} \tag{3}$$

A képletben szereplő két tag deriváltjának meghatározását a következő két alfejezetben részletesen tárgyalom.

2.1. A metrika deriváltja

A feladat során az inverz metrikával dolgozunk (ezt választottuk), ezért a metrika és a determinánsának deriváltját is meg kell adni $\partial_a g^{ab}$ függvényeként.

$$g_{ai} g^{ij} = \delta_a^j \tag{4}$$

A (4)-es összefüggés variálásából (Leibniz-szabály):

$$g_{ai}\partial_c g^{ij} + g^{ij}\partial_c g_{ai} = 0.$$

Ebből kontrahálással (g_{bj}), majd átrendezéssel kapjuk a következő összefüggést:

$$\partial_c g_{ab} = -g_{ai} g_{bj} \partial_c g^{ij}. \tag{5}$$

2.2. A $\sqrt{-g}$ deriváltjának meghatározása

Ebben a levezetésben felhasználjuk a determinánsok szorzástételét, a metrika inverzének definícióját [11], a deriválás definícióját, a logaritmusok azonosságát, illetve a sorfejtést.

$$\partial_a \sqrt{-g} = -\tfrac{\partial_a g}{2\sqrt{-g}} = \tfrac{\sqrt{-g}}{2}\partial_a lng$$

$$\partial_a lng = \partial ln(detg_{ab}) = ln(det(g_{ab} + \delta g_{ab})) - ln(det(g_{ab})) = ln\tfrac{det(g_{ab}+\delta g_{ab})}{det(g_{ab})} = ln(det(g^{ab})(det(g_{ab} + \delta g_{ab}))$$

$$\mathrm{ln}(\mathrm{det}(\mathrm{g}^{ab})(g_{bc} + \delta g_{bc})) = ln(det(\delta^a_c + g^{ab}\delta g_{ab})) = ln(1 + Tr(g^{ab}\delta g_{bc})) = g^{ab}\delta g_{ab},$$

azaz:

$$\partial_a \sqrt{-g} = \tfrac{\sqrt{-g}}{2} g^{ab}\partial_a g_{ab}.$$

Felhasználva az (5)-ös egyenletet, a következő összefüggést kapjuk:

$$\partial_a \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{ab}\partial_a g^{ab}. \tag{6}$$

A következő egyenlet levezetéséhez a (3)-as egyenletbe behelyettesítjük az (5)-ös és a (6)-os egyenletet.(A szabad indexek átnevezésével.) Így adódik:

$$\begin{aligned}
\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}) &= \sqrt{-g}\partial_a g^{ab} + g^{ab}\partial_a\sqrt{-g} = -\sqrt{-g}g^{ai}g^{bj}\partial_a g_{ij} + g^{ab}\tfrac{\sqrt{-g}}{2}g^{cd}\partial_a g_{cd}\\
&= -\tfrac{\sqrt{-g}}{2}(2g^{ai}g^{bj}\partial_a g^{ai} - g^{ab}g^{cd}\partial_a g^{cd}) / \ (a \to j)\\
&= \text{-}\tfrac{\sqrt{-g}}{2}(2g^{ij}g^{ab}\partial_j g^{ia} - g^{ab}g^{cd}\partial_a g^{cd})\\
&= -g^{ab}\tfrac{\sqrt{-g}}{2}(2g^{ij}\partial_j g^{ia} - g^{cd}\partial_a g^{cd}) = -g^{ab}\tfrac{\sqrt{-g}}{2}(g^{ij}\partial_j g^{ia} + g^{ij}\partial_j g^{ia} - g^{cd}\partial_a g^{cd})/(ij \to cd)\\
&= \text{-}g^{ab}\tfrac{\sqrt{-g}}{2}(g^{cd}\partial_d g^{ac} + g^{cd}\partial_d g^{ac} - g^{cd}\partial_a g^{cd}) = -g^{ab}g^{cd}\tfrac{\sqrt{-g}}{2}(\partial_d g^{ac} + \partial_d g^{ac} - \partial_a g^{cd})\\
&= \text{-}g^{ab}g^{cd}\tfrac{\sqrt{-g}}{2}(\partial_c g^{ad} + \partial_d g^{ac} - \partial_a g^{cd}) = -g^{cd}\sqrt{-g}\Gamma^b_{cd}.
\end{aligned}$$

Tehát a következő fontos egyenlőséghez jutottunk:

$$\partial_a(\sqrt{-g}g^{ab}) = -g^{cd}\sqrt{-g}\Gamma^b_{cd}. \tag{7}$$

2.3. A Christoffel szimbólum, a metrika és a harmonikus koordináták kapcsolata

Ebben az alfejezetben a levezetéshez fel fogjuk használni, hogy az operátor miként írható fel ekvivalens alakban, továbbá felhasználásra kerül a kovariáns deriválás is. Az (1)-es egyenletből indulunk ki, amit egy vele ekvivalens átírással fogunk folytatni:

$$\begin{aligned}\Box x^i = g^{ab}\nabla_a\nabla_b x^i = g^{ab}(\partial_a\nabla_b x^i - \Gamma^c_{ab}\nabla_c x^i) = g^{ab}(\partial_a\partial_b x^i - \Gamma^c_{ab}\partial_c x^i) = g^{ab}\partial_a\partial_b x^i - g^{ab}\Gamma^c_{ab}\partial_c x^i \\ = g^{ab}\partial_a\delta^i_b - g^{ab}\Gamma^c_{ab}\delta^i_c = 0 - g^{ab}\Gamma^c_{ab}\delta^i_c = -g^{ab}\Gamma^i_{ab}.\end{aligned}$$

Ezáltal a következő fontos egyenlőségre jutottunk:

$$\Box x^i = -g^{ab}\Gamma^i_{ab}. \tag{8}$$

Ezt az egyenletet szorozva $\sqrt{-g}$-vel, majd a (7)-es egyenletet behelyettesítve kapjuk a (2)-es egyenletet, tehát általánosan a (2)-es egyenletből a harmonikus koordinátákra egy új definíció következik, amit az előbb bizonyítottunk:

Egy tetszőleges x^i koordináta harmonikus, ha fennáll a (8)-as összefüggés, valamint még az is következik az (1)-es definícióból, hogy:

$$g^{ab}\Gamma^i_{ab} = 0. \tag{9}$$

3. A gravitációs hullámok gyengetér-közelítésben

3.1. Bevezető

A gravitációs hullámok pongyolán fogalmazva a téridő görbületének hepe-hupái. Ezt a hullámot az amplitúdója és a hullámhossza jellemzi. Általánosan fogalmazva gravitációs hullámról beszélünk, ha a hullámhossza sokkal kisebb, mint a görbületi sugár.

Az $\eta = \frac{\lambda}{R} << 1$, ahol λ a gravitációs hullám hullámhossza, míg R a görbületi sugár.

3.2. A gravitációs hullámok analógiája az elektromágneses hullámokkal

Elektromágneses hullámok esetén a Maxwell-egyenletek kerülnek felhasználásra, amelyeknek van egy inhomogén és egy homogén alakja, melyek a következőek lesznek:

Inhomogén Maxwell-egyenlet: $\partial_a F^{ab} = 0$,
Homogén Maxwell-egyenlet: $\partial_{\lceil c} F_{ab \rceil} = 0$.

Az inhomogén Maxwell-egyenletben $F^{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_b$. Mivel nincs egyértelmű kapcsolat a mennyiségek között így alkalmazható az:

$$A^{b'} = A^b + \partial_b \Phi \tag{10}$$

ún. mértéktranszformáció. Itt Φ-re teljesülnek azok az egyenletek, amelyek megoldásait képezik A^b-nek. Az inhomogén Maxwell-egyenleteket felírva négyespotenciállal.

$$\mu_0 j^a = \partial_b \partial^a A^b - \partial^b A^a = \partial^a(\partial_b A^b) - \Box A^a. \tag{11}$$

Lorenz-mértéket választva ($\partial_a A^a = 0$) a következőre egyszerűsödik az egyenlet:

$$\Box A^a = -\mu_0 j^a \tag{12}$$

Ez egy forrásos hullámegyenlet, aminek általános megoldását a homogén és a retardált megoldás képezi:

$$A^a = A^a_{ret.} + A^a_{hom.}. \tag{13}$$

A retardált megoldás

$$A^a_{ret.}(t, \bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x \frac{j^a(t - |\bar{x} - \bar{x}'|, \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|}, \tag{14}$$

ami belátható a megfelelően megválasztott Green-függvény segítségével. A homogén megoldások a sík elektromágneses hullámok

$$A^a = E^a_0 e^{ik_b x^b} + \bar{E}^a_0 e^{-ik_b x^b}. \tag{15}$$

Itt E_0^a a polarizációs vektor, míg $\bar{E}_0^a$ ennek komplex konjugáltja. Most behelyettesítjük a síkhullám megoldást először a homogén Maxwell-egyenletbe, majd a Lorenz-mértékfeltételbe, hogy lássuk a következményeket.

- Homogén Maxwell egyenlet: $[\Box A^a = 0]$,

$$\Box A^a = \eta^{dc}\partial_d\partial_c A^a$$
$$\partial_c A^a = ik_c E_0^a e^{(ik_a x^a)} - ik_c \bar{E}_0^a e^{(-ik_a x^a)}$$
$$\partial_d\partial_c A^a = -ik_c k_d E_0^a e^{(ik_a x^a)} + \bar{E}_0^a e^{(-ik_a x^a)}$$

$$\eta^{dc}\partial_d\partial_c A^a = -k_d k^d A^a, \tag{16}$$

  csak akkor 0, ha $k^d k_d = 0$.

  Ebből az a következtetés vonható le, hogy a k_d négyes hullámvektor nullvektor, így a fénykúpon terjed.

- Lorenz-mértékfeltétel: $[\partial_a A^a = 0]$,

$$\partial_a A^a = ik_a E_0^a e^{ik_a x^a} - ik_a \bar{E_0}^a e^{-ik_a x^a}.$$

  Ebből a feltételből pedig látszik, hogy csak akkor lehet 0, ha: $k_a E^a = 0$. Ebből pedig az következik, hogy E^1 és E^2 egymástól függetlenek. Ekkor [12] a másik két komponensre adódik, hogy: $E^3 = E^0$ vagy $E^3 = -E^0$. Az E^3 lenullázható, mert a Lorentz invariancia nem egyértelműen rögzíti a négyespotenciált. Így az E^0 és az E^3 komponensek lenullázhatóak, de az E^1 és az E^2 nem, mert függetlenek a mérték megválasztásától. Legyen a polarizációs vektor

$$\mathrm{E}_0^a = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0^1 \\ E_0^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

így nincs temporális és longitudinális polarizáció sem. A meglévő polarizációk a terjedési irányra merőlegesek (transzverzálisak). Belátható, hogy a z-tengely körüli (x-y)-síkbeli forgatások invariánsan hagyják a polarizációs négyesvektort. Egy ilyen forgatás mátrixa

$$\mathrm{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

melyre a polarizációk iránya megőrződik.
Legyenek

$$E_\pm = E_1 \mp iE_2, \tag{17}$$

adott komplex polarizációs mennyiségek, melyek a forgatás végrehajtása után

$$E'_{\pm} = e^{(\pm i\theta)} E_{\pm} \tag{18}$$

alakúak. Az ilyen foton helicitása 1, mivel θ együtthatója 1. (A helicitás nem ugyanaz, mint a spin, mert a spin tömeggel rendelkező testekre jellemző, míg a helicitás tömeg nélküliekre.)

3.3. A gravitációs hullámok gyengetér-közelítésben

Ebben az alfejezetben levezetjük a gravitációs hullámokat, illetve pár tulajdonságát. Elsősorban felhasználásra kerül, hogy ebben a közelítésben a metrika csak egy kis mértékben tér el a Minkowskitól [12], ezért egy kis h_{ab} perturbációt véve kapjuk, hogy:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab},\ |h_{ab}| << 1,$$
$$|\partial_c h_{ab}| << 1,$$
$$|\partial_b \partial_a h_{ab}| << 1.$$

Ezeket felhasználva a Γ^a_{bc} a következőképpen néz ki:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(\eta^{ai} + h^{ai})[\partial_b(\eta_{ic} + h_{ic}) + \partial_c(\eta_{ib} + h_{ib}) - \partial_i(\eta_{bc} + h_{bc})]. \tag{19}$$

Ha h^{ai}-vel szorzunk, az már második rend, viszont minket csak első rendig érdekel, továbbá a Minkowski metrika szignatúrája (-1,1,1,1), így tehát ezek deriváltjai zérusok. Ezeket felhasználva tovább egyszerűsödik a következőre az egyenlet:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(\partial_b h_{ic} + \partial_c h_{ib} + \partial_i h_{bc}) + \sigma(h^2). \tag{20}$$

Az Einstein-egyenlet meghatározásához azonban a Ricci-tenzorra van szükség, amit a fentebb található Christoffel szimbolómmal számolunk ki. A Riemann-tenzorból megkapjuk spúrképzéssel a Ricci-tenzort, amit a következőképpen ismertetünk:

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ci}\Gamma^i_{bd} - \Gamma^a_{di}\Gamma^i_{bc}. \tag{21}$$

Ebben az egyenletben az első két tag $\sigma(h)$-rendű, míg a második tag $\sigma(h^2)$-rendű, ezért az utóbbit elhanyagolhatjuk. Mivel a vákuum Einstein-egyenlet a következő alakú: $R_{ab} = 0$, ezért felhasználjuk a Riemann-tenzorból képezhető Ricci tenzort:

$$R_{bd} = R^a_{bad} = \partial_a \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{ba} + \sigma(h^2) = \tfrac{1}{2}\eta^{ai}(\partial_a(\partial_b h_{id} + \partial_d h_{ib} - \partial_i h_{bd}) - \partial_d(\partial_b h_{ib} + \partial_b h_{ia} - \partial_i h_{ab}))$$
$$= \tfrac{1}{2}\eta^{ai}(\partial_a\partial_b h_{id} - \partial_a\partial_i h_{bd} - \partial_d\partial_b h_{ia} + \partial_d\partial_i h_{ab}).$$

A következőkben alkalmazzuk, hogy $\Box = \partial_a\partial^a$, ezáltal az egyenlet alakja:

$$R_{bd} = \frac{1}{2}(\eta^{ai}(\partial_a\partial_b h_{id} - \partial_d\partial_b h_{ia} + \partial_d\partial_i h_{ab}) - \frac{\Box h_{db}}{2}. \tag{22}$$

Ezen a ponton kerül számításba a (9)-es képlet, tehát ezt a konkrét esetet fogjuk kiszámolni a harmonikus koordináták segítségével:

$$0 = g^{ab}\Gamma^c_{ab} = (\eta^{ab} + h^{ab})\tfrac{1}{2}\eta^{ci}(\partial_a(\eta_{ib} + h_{ib}) + \partial_b(\eta_{ia} + h_{ia}) - \partial_i(\eta_{ab} + h_{ab})).$$

Itt is elhanyagolhatóak az $\sigma(h^2)$ rendű tagok.

$$0 = \tfrac{1}{2}\eta^{ab}\eta^{ci}(\partial_a h_{ib} + \partial_b h_{ia} - \partial_i h_{ab}) = \tfrac{1}{2}\eta^{ci}(\partial_a h^a_i + \partial_b h^b_i - \partial_i h^a_a) = \tfrac{1}{2}(\partial_a h^{ac} + \partial_a h^{ac} - \partial^c h^a_a).$$

Az utolsó egyenlőséget átrendezve:

$$\partial_a h^{ac} = \frac{1}{2}\partial^c h^a_a. \tag{23}$$

Ezt az összfüggést beírva a (22)-es összefüggésbe, a Ricci-tenzorra a következő formula adódik:

$$R_{bd} = \tfrac{1}{2}(-\Box h_{db} + \partial^a\partial_b h_{ad} + \partial^a\partial_d h_{ab} - \partial_d\partial_b h^a_a) = \tfrac{1}{2}(-\Box h_{db} + \partial^a(\partial_b h_{ad} + \partial_d h_{ab}) - \tfrac{1}{2}\partial_d\partial_b h^a_a - \tfrac{1}{2}\partial_b\partial_d h^a_a).$$

Ezen a ponton felhasználjuk a (23)-as egyenlőséget

$$R_{bd} = \tfrac{1}{2}(-\Box h_{db} + \partial^a(\partial_b h_{ad} + \partial^a\partial_d h_{ab}) - \partial^a(\partial_b h_{ad} + \partial_d h_{ab})) = 0.$$

Ebből pedig az következik, hogy:

$$R_{ab} = -\frac{1}{2}\Box h_{ab}. \tag{24}$$

Einstein-egyenletet használva

$$R_{ab} - \tfrac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G T_{ab}. \rightarrow / \cdot \mathrm{g}^{ab}$$
$$R - 2R = 8\pi G T \rightarrow \mathrm{R} = \text{-}8\pi G T.$$
$$R_{ab} = -8\pi G(T_{ab} - \tfrac{1}{2}g_{ab}T). \rightarrow \mathrm{S}_{ab} = T_{ab} - \tfrac{1}{2}g_{ab}T,$$

továbbá beírva a (24)-es egyenletet adódik:

$$\frac{1}{2}\Box h_{ab} = 16\pi G S_{ab}. \tag{25}$$

az Einstein-egyenlet gyengetér közelítése. Már az előbbi alfejezetben tárgyaltuk, hogy a gravitációs hullám analóg az elektromágneses hullámmal, így annak megoldása a következőképpen néz ki:

$$h_{ab} = h_{ab}^{inh.} + h_{ab}^{hom.}. \tag{26}$$

Ennek síkhullám megoldása:

$$h_{ab} = p_{ab}e^{(ik_jx^j)} + \bar{p_{ab}}e^{(-ik_jx^j)}. \tag{27}$$

Itt az egyenletben p_{ab} az ún. polarizációs tenzor. Most megvizsgáljuk, hogy mit tudunk mondani az egyenletből p_{ab}-ről és k_j-ről.

$$\Box h_{ab} = \eta^{dc}\partial_d\partial_c h_{ab},$$
$$\partial_c h_{ab} = ik_c p_{ab}e^{(ik_jx^j)} - ik_c\bar{p^{ab}}e^{(-ik_jx^j)},$$
$$\partial_d\partial_c h_{ab} = -ik_ck_dp_{ab}e^{(ik_jx^j)} + \bar{p^{ab}}e^{(-ik_jx^j)},$$
$$\eta^{dc}\partial_d\partial_c h_{ab} = -k_dk^dh_{ab}.$$

A h_{ab}-ről tudom, hogy nem nulla, így csak akkor nulla, ha $-k_dk^d = 0$. Ebből következik, hogy k_d nullvektor, a fénykúp mentén terjed, így levonható a következtetés, hogy a gravitációs hullám fényszerű. Úgy választjuk meg, hogy a terjedés z-irányú legyen, azaz k^d = (k,0,0,k).
Most második lépésként használjuk a harmonikus koordináta feltételt, vagyis:

$$\partial_a h^a_c = \tfrac{1}{2}\partial_c h^a_a \rightarrow [ik_ap^a_ce^{(ik_jx^j)} - ik_a\bar{p^a_c}e^{(ik_jx^j)}] = \tfrac{1}{2}[ik_ap^a_ae^{(ik_jx^j)} - ik_a\bar{p^a_a}e^{(ik_jx^j)}]$$
$$(\mathrm{k}_ap^a_c - \tfrac{1}{2}k_cp^a_a)e^{(ik_jx^j)} = (k_a\bar{p^a_c} - \tfrac{1}{2}k_c\bar{p^a_a})e^{(-ik_jx^j)}.$$

Az első tagban szereplők közül tudjuk, hogy az exponenciális sose 0, így csak akkor lehet nulla, ha a zárójelen belüli tag nulla, vagyis:

$$k_ap^a_c = \frac{1}{2}k_cp^a_a. \tag{28}$$

Az egyenlőségjel másik oldalával most nem foglalkozunk.
Már említésre került, hogy z-irányban terjedő gravitációs hullámot vettünk, ezt felhasználva válasszuk most a (28)-as egyenletben szereplő tagok esetén c indexet 0-nak vagy 3-nak. Ekkor a következő alakot nyerjük:

$$k(p^a_0 + p^a_3) = \tfrac{1}{2}kp^a_a \rightarrow (p^0_0 + p^1_1 + p^2_2 + p^3_3).$$

$$a = 0:$$
$$k(p^0_0 + p^0_3) = \tfrac{k}{2}(p^0_0 + p^1_1 + p^2_2 + p^3_3),$$
$$a = 1:$$
$$k(p^1_0 + p^1_3) = 0 \rightarrow p^1_0 = p_{01} = -p^1_3 = -p_{31},$$
$$a = 2:$$
$$k(p^2_0 + p^2_3) = 0 \rightarrow p^2_0 = p_{02} = -p^2_3 = -p_{32},$$
$$a = 3:$$
$$k(p^3_0 + p^3_3) = \tfrac{k}{2}(p^0_0 + p^1_1 + p^2_2 + p^3_3),$$

$$
\begin{gathered}
a=0: \\
\text{-}(p_{00}+p_{30})=\frac{1}{2}(-p_{00}+p_{11}+p_{22}+p_{33}) \\
2p_{00}+2p_{30}=p_{00}-p_{11}-p_{22}-p_{33}, \\
a=3: \\
\text{-}(p_{03}+p_{33})=\frac{1}{2}(-p_{00}+p_{11}+p_{22}+p_{33}) \\
2p_{03}+2p_{33}=p_{00}-p_{11}-p_{22}-p_{33}.
\end{gathered}
$$

Utóbbi felsorolásból $2p_{30}$-t kifejezve, majd behelyettesítve kapjuk a következő formulát:

$$-p_{00}-p_{11}-p_{22}-p_{33}+2p_{33}=-p_{00}+p_{11}+p_{22}+p_{33}.$$

Ebből pedig adódik a következő összefüggés: $p_{11}=-p_{22}$, amit visszahelyettesítve a többi egyenletbe a következő eredményeket kapjuk:

$$\boxed{\begin{array}{l} p_{01}=-p_{31} \\ p_{02}=-p_{32} \\ p_{03}=\frac{-1}{2}(p_{00}+p_{33}) \\ p_{11}=-p_{22} \end{array}},$$

ezek tehát a polarizációs vektor komponensek, amelyek szimmetrikusak. A harmonikus kordinátaválasztás nem egyértelmű. Az ilyen koordináta rendszerek közötti transzformációk felhasználásával [12] a $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ koordinátákat kivéve minden más komponens nullává tehető. Felhasználva, hogy $p_{11}=-p_{22}$ és hogy $p_{12}=p_{21}$ a polarizációs vektorra a következő adódik:

$$\mathrm{p}_{ab}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{12} & 0 \\ 0 & p_{12} & -p_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ha z-tengely körüli térbeli forgatást hajtunk végre, akkor a mátrix ezen szerkezete nem változik meg, tekintsük most ezt a transzformációt. Ehhez bevezetjük a

$$p_{\pm}=p_{11}\mp ip_{12} \tag{29}$$

mennyiségeket, majd a forgásmátrixra ezek a komponensek

$$p_{\pm}^{'}=e^{(\pm 2i\theta)}p_{\pm} \tag{30}$$

alakúvá válnak. Ebből látható, hogy a gravitációs hullámok (perturbáció) helicitása 2 [12]. Ez azért van, mert egy szimmetrikus kétindexes tenzor írja le. Arra jutottunk tehát, hogy létezik hullám megoldás, még pedig ezen gravitációs perturbáció fénysebességgel szinuszosan terjed. A gravitációs hullám alakja pedig

$$h_{ab}=p_{ab}e^{(ik_jx^j)}+\bar{p_{ab}}e^{(-ik_jx^j)}. \tag{31}$$

4. Nagyfrekvenciás gravitációs hullámok görbült téridőben

4.1. Bevezető

Nagyfrekvenciás gravitációs hullámokról beszélünk, ha a hullám (λ) hullámhossza sokkal kisebb, mint a téridő görbületi sugara (L) ($\frac{\lambda}{L} << 1$), amit geometriai optikai közelítésnek nevezünk. Isaacson megmutatta [14] hogy a perturbációszámítás segítségével a nagyfrekvenciás gravitációs hullámok első rendben null geodetikuson terjednek, míg másod rendben levezette, hogyan hat vissza a hullám a téridőre. Továbbiakban [14]-es hivatkozásban lévő számolásokat fogom reprodukálni. Tekintsünk egy nagyfrekvenciás, kis amplitúdójú gravitációs hullámot, ami végigfut a téridő geometriáján. A perturbált metrika

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \epsilon h_{ab} \tag{32}$$

alakú, amelyben g_{ab} a háttérmetrika, h_{ab} a háttérmetrikától való kis eltérést jelenti, továbbá ϵ egy kis paraméter, ami biztosítja, hogy a geometriának fluktuációi legyenek. A háttérmetrika változása $\partial g \backsim \frac{g}{L}$, illetve a perturbáció változása $\partial h \backsim \frac{h}{\lambda}$, valamint $\epsilon = \frac{\lambda}{L}$.

4.2. A h_{ab} inverze

Ebben az alfejezetben bemutatjuk, hogy a h_{ab} inverze nem egyenlő az alsó indexes index felhúzottjával. Ennek ellenére ezen alfejezetben kapott eredményeket csak az Einstein–Hilbert hatásnál fogjuk alkalmazni. A (32)-es egyenletből kiindulva:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ab} &= g_{ab} + \epsilon h_{ab},\\ \tilde{g}^{ab} &= g^{ab} + \epsilon h^{ab}.\end{aligned}$$

Behelyettesítve a $\delta_a^c = \tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{bc}$ összefüggésbe:

$$\begin{aligned}\delta_a^c = \tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{bc} &= (g_{ab} + \epsilon h_{ab})(g^{bc} + \epsilon h^{bc})\\ &= g_{ab}g^{bc} + \epsilon(g_{ab}h^{bc} + g^{bc}h_{ab}) + \epsilon^2 h_{ab}h^{bc}\\ &= \delta_a^c + \epsilon(g_{ab}h^{bc} + g^{bc}h_{ab}) + \epsilon^2 h_{ab}h^{bc}\\ 0 &= g_{ab}h^{bc} + g^{bc}h_{ab} + \epsilon h_{ab}h^{bc}.\end{aligned}$$

A h^{ab} korrekció kifejezése elsőrendig h_{ab}-vel:

$$\begin{aligned}g^{ad}g_{ab}h^{bc} &= -g^{bc}g^{ad}h_{ab}\\ \delta_b^d h^{bc} &= -g^{bc}g^{ad}h_{ab}\\ h_{(1)}^{dc} &= -g^{bc}g^{ad}h_{ab}.\end{aligned}$$

A h^{ab} korrekció kifejezése másodrendig h_{ab}-vel:

$$\begin{aligned}(g_{ab} + \epsilon h_{ab})h^{bc} &= -g^{bc}h_{ab}\\ \tilde{g}_{ab}h^{bc} &= -g^{bc}h_{ab}\\ \tilde{g}^{ad}\tilde{g}_{ab}h^{bc} &= -\tilde{g}^{ad}g^{bc}h_{ab}\\ \delta_b^d h^{bc} &= -\tilde{g}^{ad}g^{bc}h_{ab}\\ h^{dc} &= -\tilde{g}^{ad}g^{bc}h_{ab}\\ h^{dc} &= -(g^{ad} + \epsilon h^{ad})g^{bc}h_{ab}\\ h_{(2)}^{dc} &= -g^{ad}g^{bc}h_{ab} - \epsilon h^{ad}g^{bc}h_{ab}.\end{aligned}$$

A második tagba, mivel elsőrendű, elég a h^{ad} vezető rendű járulékát helyettesíteni, azaz:

$$\begin{aligned}h^{dc} &= h_{(1)}^{dc} + \epsilon h_{(2)}^{dc},\\ h_{(1)}^{dc} &= -g^{bc}g^{ad}h_{ab},\\ h_{(2)}^{dc} &= -h_{(1)}^{ad}g^{bc}h_{ab} = g^{ia}g^{jb}g^{bc}h_{ab}h_{ij}.\end{aligned}$$

Tehát:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ab} &= g_{ab} + \epsilon h_{ab}\\ \tilde{g}^{ab} &= g^{ab} + \epsilon h_{(1)}^{ab} + \epsilon^2 h_{(2)}^{ab}.\end{aligned}$$

4.3. Perturbált Ricci-tenzor

Továbbiakban szükségünk lesz, hogy bevezessük a perturbált téridőn a kovariáns deriválást [15], melyet a következőképpen fogunk definiálni:

$$\tilde{\nabla}_a f = \nabla_a f, \tag{33}$$

$$\tilde{\nabla}_a V^b = \nabla_a V^b + C^b_{ad} V^d, \tag{34}$$

$$\tilde{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b - C^d_{ab} \omega_d, \tag{35}$$

$$\tilde{\nabla}_a T^{b_1,\ldots,b_k}_{c_1,\ldots,cl} = \nabla_a T^{b_1,\ldots,b_k}_{c_1,\ldots,cl} + \sum_i C^{b_1}{}_{ad} T^{b_1,\ldots d\ldots,b_k}_{c_1,\ldots,cl} - \sum_j C^d{}_{ac_j} T^{b_1,\ldots,b_k}_{c_1,\ldots d\ldots,cl}, \tag{36}$$

ahol $\tilde{\nabla}_a \tilde{g}_{bc} = 0, \nabla_a g_{bc} = 0, V^b$ egy tetszőleges vektor, ω_b egy tetszőleges 1-forma és C^a_{bc} alsó indexeiben szimmetrikus tenzor, melyet

$$C^c_{ab} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{ci} [\nabla_a \tilde{g}_{bi} + \nabla_b \tilde{g}_{ai} - \nabla_i \tilde{g}_{ab}] \tag{37}$$

módon definiálunk.
Bizonyítás:
Legyen g_{ab} a metrika, ekkor létezik olyan ∇_a deriváló operátor, mely kielégíti a $\nabla_a g_{bc} = 0$ egyenlőséget. Ekkor:

$$\begin{gathered} 0 = \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^d_{ab} g_{dc} - C^d_{ac} g_{db} \\ 0 = \nabla_b g_{ca} = \tilde{\nabla}_b g_{ca} - C^d_{ba} g_{dc} - C^d_{bc} g_{da} \\ 0 = -\nabla_c g_{ab} = -\tilde{\nabla}_c g_{ab} + C^d_{ca} g_{db} + C^d_{cb} g_{da}. \end{gathered}$$

Összeadva az egyenleteket, majd átrendezve adódik, hogy:

$$\begin{gathered} \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ca} - \tilde{\nabla}_c g_{ab} = 2C^d_{ab} g_{dc} \\ C^d_{ab} = \tfrac{1}{2} g^{dc} (\tilde{\nabla}_a g_{bc} + \nabla_b g_{ca} - \nabla_c g_{ab}) \end{gathered}$$

Átalakítás:

$$\begin{gathered} C^c_{ab} = \tfrac{1}{2}(g^{ci} + \epsilon h^{ci})[\nabla_a (g_{bi} + \epsilon h_{bi}) + \nabla_b (g_{ai} + \epsilon h_{ai}) - \nabla_i (g_{ab} + \epsilon h_{ab})] \\ = \tfrac{1}{2}(g^{ci} + \epsilon h^{ci})[\nabla_a g_{bi} + \nabla_a (\epsilon h_{bi}) + \nabla_b g_{ai} + \nabla_b (\epsilon h_{ai}) - \nabla_i g_{ab} - \nabla_i (\epsilon h_{ab})] \\ = \tfrac{1}{2}((g^{ci} + \epsilon h^{ci})[\nabla_a (\epsilon h_{bi}) + \nabla_b (\epsilon h_{ai}) - \nabla_i (\epsilon h_{ab})] \ , \end{gathered}$$

ahol $|h_{ab}| << 1$, $|\nabla_c h_{ab}| << 1$, $|\nabla_c \nabla_d h_{ab}| << 1$.
Amennyiben $\nabla = \partial$ akkor a $C^a_{bc} = \Gamma^a_{bc}$ Christoffel-szimbólummal lenne egyenlő. Általános relativitáselméletben már megmutatták, hogy a Riemann-tenzor a kovariáns deriválás nem kommutálásának mértéke. Ezért a perturbált Riemann-tenzort is így fogjuk definiálni. Tekintsük a $[\nabla_c, \nabla_d] V^a$ kommutátort, ahogy egy tetszőleges V^a vektorra hat. A (34) illetve (36)-os egyenletek felhasználásával [15] a következő alakot kapjuk a perturbált Riemann-tenzorra:

$$\begin{gathered} \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d V^a = \nabla_c (\tilde{\nabla}_d V^a) - C^e_{cd} (\tilde{\nabla}_e V^a) + C^a_{ce} (\tilde{\nabla}_d V^e) \\ = \nabla_c (\nabla_d V^a + C^a_{de} V^e) - C^e_{cd} (\nabla_e V^a + C^a_{ef} V^f) + C^a_{ce} (\nabla_d V^a + C^a_{cf} V^f) \\ = \nabla_c \nabla_d V^a + \nabla_c C^a_{de} V^e + C^a_{de} \nabla_c V^e - C^e_{cd} \nabla_e V^a - C^e_{cd} C^a_{ef} V^f + C^a_{ce} \nabla_d V^a + C^a_{ce} C^e_{df} V^f \\ \tilde{\nabla}_d \tilde{\nabla}_c V^a = \nabla_d (\tilde{\nabla}_c V^a) - C^e_{dc} (\tilde{\nabla}_e V^a) + C^a_{de} (\tilde{\nabla}_c V^e) \\ = \nabla_d (\nabla_c V^a + C^a_{ce} V^e) - C^e_{dc} (\nabla_e V^a + C^a_{ef} V^f) + C^a_{de} (\nabla_c V^a + C^a_{cf} V^f) \\ = \nabla_d \nabla_c V^a + \nabla_d C^a_{ce} V^e + C^a_{ce} \nabla_d V^e - C^e_{dc} \nabla_e V^a - C^e_{dc} C^a_{ef} V^f + C^a_{ce} \nabla_c V^a + C^a_{de} C^e_{cf} V^f \\ (\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d - \tilde{\nabla}_d \tilde{\nabla}_c) V^a \\ = \nabla_c \nabla_d V^a + \nabla_c C^a_{de} V^e + C^a_{de} \nabla_c V^e - C^e_{cd} \nabla_e V^a - C^e_{cd} C^a_{ef} V^f + C^a_{ce} \nabla_d V^a + C^a_{ce} C^e_{df} V^f \\ \text{-}\ \nabla_d \nabla_c V^a - \nabla_d C^a_{ce} V^e - C^a_{ce} \nabla_d V^e + C^e_{dc} \nabla_e V^a + C^e_{dc} C^a_{ef} V^f - C^a_{ce} \nabla_c V^a - C^a_{de} C^e_{cf} V^f. \end{gathered}$$

Felhasználva az alsó indexes szimmetriát és az egyszerűsítéseket elvégezve

$$\begin{gathered} (\tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_d - \tilde{\nabla}_d \tilde{\nabla}_c) V^a = (\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c) V^a + (\nabla_c C^a_{de} - \nabla_d C^a_{ce}) V^e + (C^a_{ce} C^e_{df} - C^a_{de} C^e_{cf}) V^f \\ = \tilde{R}^a_{ecd} V^e = R^a_{ecd} V^e + 2\nabla_{[c} C^a_{d]e} V^e + 2C^a_{[c|f} C^f_{|d]e} V^e \end{gathered}$$

adódik. Ebből nyert Riemann-tenzor:

$$\tilde{R}^a_{ecd} = R^a_{ecd} + 2\nabla_{[c}C^a_{d]e} + 2C^a_{[c|f}C^f_{|d]e}. \tag{38}$$

Általános relativitáselméletből ismert, hogy a Ricci-tenzor előállítható a Riemann-tenzorból spúrképzéssel. ($R_{ed} = R^a_{ead}$).

$$\tilde{R}_{ed} = R_{ed} + 2\nabla_{[a}C^a_{d]e} + 2C^a_{[a|f}C^f_{|d]e} \tag{39}$$

Ebben a számolásban $\sigma(1), \sigma(\epsilon), \sigma(\epsilon^2)$ a rendeket fogja jelölni ϵ-ban.
Először a $C^a_{af}C^f_{de}$ algebrai tagjait kibontjuk:

$$\begin{aligned}4C^a_{af}C^f_{de} =& (g^{ak}+\epsilon h^{ak})[\nabla_a\epsilon h_{fk}+\nabla_f\epsilon h_{ak}-\nabla_k\epsilon h_{af}]\cdot(g^{fm}+\epsilon h^{fm})[\nabla_d\epsilon h_{em}+\nabla_e\epsilon h_{dm}-\nabla_m\epsilon h_{de}]\\ =&\epsilon^2(g^{ak}+h^{ak})[\nabla_f h_{ak}+\nabla_a h_{fk}-\nabla_k h_{af}]\cdot(g^{fm}+h^{fm})[\nabla_d h_{em}+\nabla_e h_{dm}-\nabla_m h_{de}]\\ =&\epsilon^2 g^{ak}g^{fm}[\nabla_f h_{ak}+\nabla_a h_{fk}-\nabla_k h_{af}]\cdot[\nabla_d h_{em}+\nabla_e h_{dm}-\nabla_m h_{de}].\end{aligned}$$

Felírva ϵ-ban nullad-,első illetve másodrendű tagokat:

$$\begin{gathered}4C^a_{af}C^f_{de}\sigma(1)=0\\ 4C^a_{af}C^f_{de}\sigma(\epsilon)=0\\ 4C^a_{af}C^f_{de}\sigma(\epsilon^2)=\epsilon^2 g^{ak}g^{fm}[\nabla_f h_{ak}+\nabla_a h_{fk}-\nabla_k h_{af}]\cdot[\nabla_d h_{em}+\nabla_e h_{dm}-\nabla_m h_{de}].\end{gathered}$$

A $C^a_{ef}C^f_{ad}$ algebrai alakja:

$$\begin{aligned}4C^a_{ef}C^f_{ad} =& (g^{ak}+\epsilon h^{ak})[\nabla_e\epsilon h_{fk}+\nabla_f\epsilon h_{ek}-\nabla_k\epsilon h_{ef}]\cdot(g^{fm}+\epsilon h^{fm})[\nabla_a\epsilon h_{dm}+\nabla_d\epsilon h_{am}-\nabla_m\epsilon h_{ad}]\\ =&\epsilon^2(g^{ak}+h^{ak})[\nabla_e h_{fk}+\nabla_f h_{ek}-\nabla_k h_{ef}]\cdot(g^{fm}+h^{fm})[\nabla_a h_{dm}+\nabla_d h_{am}-\nabla_m h_{ad}]\\ =&\epsilon^2 g^{ak}g^{fm}[\nabla_e h_{fk}+\nabla_f h_{ek}-\nabla_k h_{ef}]\cdot[\nabla_a h_{dm}+\nabla_d h_{am}-\nabla_m h_{ad}].\end{aligned}$$

ϵ-t tartalmazó tagok második rendig:

$$\begin{gathered}4C^a_{ef}C^f_{ad}\sigma(1)=0\\ 4C^a_{ef}C^f_{ad}\sigma(\epsilon)=0\\ 4C^a_{ef}C^f_{ad}\sigma(\epsilon^2)=\epsilon^2 g^{ak}g^{fm}[\nabla_e h_{fk}+\nabla_f h_{ek}-\nabla_k h_{ef}]\cdot[\nabla_a h_{dm}+\nabla_d h_{am}-\nabla_m h_{ad}].\end{gathered}$$

Összevonva a másodrendű tagokat:

$$\begin{gathered}C^a_{af}C^f_{de}\sigma(\epsilon^2)-C^a_{ef}C^f_{ad}\sigma(\epsilon^2)\\ =\frac{\epsilon^2}{4}[g^{ak}g^{fm}[[\nabla_f h_{ak}+\nabla_a h_{fk}-\nabla_k h_{af}]\cdot[\nabla_d h_{em}+\nabla_e h_{dm}-\nabla_m h_{de}[-[\nabla_e h_{fk}+\nabla_f h_{ek}-\nabla_k h_{ef}]\cdot\\ [\nabla_a h_{dm}+\nabla_d h_{am}-\nabla_m h_{ad}]]\\ =\frac{\epsilon^2}{4}[[\nabla_f h+\nabla_a h^a_f-\nabla^a h_{af}]\cdot[\nabla_d h^f_e+\nabla_e h^f_d-\nabla^f h_{de}]-[\nabla_e h^a_f+\nabla_f h^a_e-\nabla^a h_{ef}]\cdot[\nabla_a h^f_d+\nabla_d h^f_a-\nabla^f h_{ad}]]\\ =\frac{\epsilon^2}{4}[\nabla^f h(\nabla_d h_{ef}+\nabla_e h_{fd}-\nabla_f h_{de})+2\nabla^a h^f_e(\nabla_a h_{fd}-\nabla_f h_{da})-\nabla_d h^{af}\nabla_e h_{af}].\end{gathered}$$

Tekintem most a ∇_a-t tartalmazó tagokat:

$$\begin{aligned}2\nabla_a C^a_{de} =& \nabla_a\{(g^{af}+\epsilon h^{af})[\nabla_d(g_{ef}+\epsilon h_e f)+\nabla_e(g_{df}+\epsilon h_{df})-\nabla_f(g_{de}+\epsilon h_{de})]\}\\ =&\epsilon\nabla_a\{(g^{af}+\epsilon h^{af})[\nabla_d h_{ef}+\nabla_e h_{df}-\nabla_f h_{de}]\}\\ =&\epsilon^2\nabla_a\{h^{af}[\nabla_d h_{ef}+\nabla_e h_{df}-\nabla_f h_{de}]\}+\epsilon(g^{af}+\epsilon h^{af})\nabla_a\{[\nabla_d h_{ef}+\nabla_e h_{df}-\nabla_f h_{de}]\}.\end{aligned}$$

Felírva ϵ-t második rendig:

$$\begin{gathered}2\nabla_a C^a_{de}\sigma(1)=0\\ 2\nabla_a C^a_{de}\sigma(\epsilon)=\epsilon g^{af}[\nabla_a\nabla_d h_{ef}+\nabla_a\nabla_e h_{df}-\nabla_a\nabla_f h_{de}]\\ 2\nabla_a C^a_{de}\sigma(\epsilon^2)=\epsilon^2[h^{af}\nabla_a\{[\nabla_d h_{ef}+\nabla_e h_{df}-\nabla_f h_{de}]\}+\nabla_a\{h^{af}[\nabla_d h_{ef}+\nabla_e h_{df}-\nabla_f h_{de}]\}\}.\end{gathered}$$

Kifejtve a ∇_d-t tartalmazó tagokat:

$$
\begin{gathered}
2\nabla_d C^a_{ae} = \nabla_d\{(g^{af}+\epsilon h^{af})[\nabla_a(g_{ef}+\epsilon h_{ef}) + \nabla_e(g_{af}+\epsilon h_{af}) - \nabla_f(g_{ae}+\epsilon h_{ae})]\} \\
= \epsilon\nabla_d\{(g^{af}+\epsilon h^{af})[\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}]\} \\
= \epsilon^2\nabla_d h^{af}[\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}]\} + \epsilon(g^{af}+\epsilon h^{af})\nabla_d\{[\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}]\}.
\end{gathered}
$$

Kifejtve ϵ-t második rendig:

$$
\begin{gathered}
2\nabla_d C^a_{ae}\sigma(1) = 0 \\
2\nabla_d C^a_{ae}\sigma(\epsilon) = \epsilon g^{af}[\nabla_d\{\nabla_a h_{ef} + \nabla_d\nabla_e h_{af} - \nabla_d\nabla_f h_{ae}\}] \\
2\nabla_a C^a_{de}\sigma(\epsilon^2) = \epsilon^2[h^{af}\nabla_d\{[\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}]\} + \nabla_d\{h^{af}[\nabla_a h_{ef} + \nabla_e h_{af} - \nabla_f h_{ae}]]\}.
\end{gathered}
$$

Első rendek különbsége a ∇_a, ∇_b-t tartalmazó tagoknak:

$$
\nabla_a C^a_{de}\sigma(\epsilon) - \nabla_d C^a_{ae}\sigma(\epsilon) = \tfrac{\epsilon}{2} g^{af}(\nabla_a\nabla_e h_{df} + \nabla_a\nabla_d h_{ef} - \nabla_a\nabla_f h_{de} - \nabla_d\nabla_e h_{af}).
$$

Második rendek különbsége a ∇_a, ∇_b-t tartalmazó tagoknak:

$$
\begin{gathered}
\nabla_a C^a_{de}\sigma(\epsilon^2) - \nabla_d C^a_{ae}\sigma(\epsilon^2) \\
= \tfrac{\epsilon^2}{2}[h^{af}\nabla_d\nabla_f h_{ae} - h^{af}\nabla_d\nabla_a h_{ef} - h^{af}\nabla_d\nabla_e h_{af} + \nabla_d h^{af}\nabla_f h_{ae} - \nabla_d h^{af}\nabla_a h_{ef} - \nabla_d h^{af}\nabla_e h_{af} \\
\text{-}h^{af}\nabla_a\nabla_f h_{de} + h^{af}\nabla_a\nabla_d h_{ef} + h^{af}\nabla_a\nabla_e h_{df} + \nabla_a h^{af}\nabla_d h_{ef} + \nabla_a h^{af}\nabla_e h_{df} - \nabla_a h^{af}\nabla_f h_{de}] \\
= \tfrac{\epsilon^2}{2}[h^{af}(\nabla_d\nabla_f h_{ae} + \nabla_a\nabla_e h_{df} - \nabla_d\nabla_e h_{af} - \nabla_a\nabla_f h_{de}) - \nabla_d h^{af}\nabla_e h_{af} + \nabla_a h^{af}(\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{df} - \nabla_f h_{de})].
\end{gathered}
$$

A perturbált Ricci-tenzor végső alakja:

$$
\begin{gathered}
R^{(0)}_{ed} = R_{ed} \\
R^{(1)}_{ed} = \tfrac{\epsilon}{2}\cdot g^{af}(\nabla_a\nabla_e h_{df} + \nabla_a\nabla_d h_{ef} - \nabla_a\nabla_f h_{de} - \nabla_d\nabla_e h_{af}) \\
R_{ed}(2) = \tfrac{\epsilon^2}{2}[\tfrac{1}{2}(\nabla_d h^{af}\nabla_e h_{af}) + \nabla^a h^f_e(\nabla_a h_{df} - \nabla_f h_{ad}) + (\tfrac{1}{2}\nabla^f h - \nabla_a h^{af})(\nabla_d h_{ef} + \nabla_e h_{df} - \nabla_f h_{de}) \\
+h^{af}(\nabla_d\nabla_f h_{ae} + \nabla_a\nabla_e h_{df} - \nabla_d\nabla_e h_{af} - \nabla_a\nabla_f h_{de})].
\end{gathered}
$$

Általános relativitáselméletből ismert Ricci-tenzor a következő alakú:

$$
R_{bc} = R^a_{bac} = \partial_a\Gamma^a_{bc} - \partial_c\Gamma^a_{ab} + \Gamma^a_{ai}\Gamma^i_{bc} - \Gamma^a_{ci}\Gamma^i_{ab}.
$$

Itt a vezető rend $\partial_a\Gamma^a_{bc}$ alakú. Γ^a_{bc} definíció szerint:

$$
\Gamma^a_{bc} = \tfrac{1}{2}g^{ai}(\partial_b g_{ai} + \partial_a g_{bi} - \partial_i g_{ab}).
$$

Ebből adódóan a Ricci-tenzor vezető rendje $g^{-1}\partial^2 g$ alakú lesz. Felhasználva a fentebb található közelítést, melyet ∂g-re feltettünk, a következő nagyságrendet kapjuk $\partial^2 g \backsim \frac{1}{L^2} = \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} = \sigma(1)$. A magasabb rendű tagokat táblázatban rögzítem, kiszámolásuk a fentebb említettek alapján történik. Isaacson megmutatta [14], hogy az $\epsilon^3 R^{(3+)}_{ed}$-s tagok $\sigma(\epsilon)$ nagyságrendűek.

Kifejezés	Szimbolikus formula	Nagyságrend
$R^{(0)}_{ed}$	$g^{-1}\partial^2 g$	$\frac{1}{L^2} = \frac{\epsilon^2}{\lambda^2} = \mathrm{O}(1)$
$\epsilon R^{(1)}_{ed}$	$g^{-1}\partial^2(\epsilon h)$	$\frac{\epsilon}{\lambda^2} = O(\frac{1}{\epsilon})$
$\epsilon^2 R^{(2)}_{ed}$	$\epsilon h g^{-2}\partial^2(\epsilon h)$	$\frac{\epsilon^2}{\lambda^2} = O(1)$
$\epsilon^3 R^{(3+)}_{ed}$	$\epsilon^2 h^2 g^{-3}\partial^2(\epsilon h)$	$\frac{\epsilon^3}{\lambda^2} = O(\epsilon)$

A táblázatból kiolvasható, hogy a háttér görbületének változása lassabb, mint a perturbáció által okozott változások, emiatt a Ricci-tenzor sorfejtésében rendcsúszás történik.

4.4. Perturbált Riemann-tenzor

Akárcsak a Ricci-tenzor, a Riemann-tenzor is felírható a következő perturbált alakban:

$$\tilde{R}^a_{ecd}(g_{ij} + \epsilon h_{ij}) = R^a_{ecd}{}^{(0)} + \epsilon R^a_{ecd}{}^{(1)} + \epsilon^2 R^a_{ecd}{}^{(2)} + \epsilon^3 R^a_{ecd}{}^{(3+)}.$$

A Riemann-tenzor elsőrendig:

$$\begin{gathered} R^a_{ecd}{}^{(0)} = R^a_{ecd}(g_{ij}) \\ R^a_{ecd}{}^{(1)} = \nabla_c C^a_{de} - \nabla_d C^a_{ce} \\ \nabla_c C^a_{de} = \nabla_c \tfrac{1}{2}(g^{ai} + \epsilon h^{ai})[\nabla_d(g_{ei} + \epsilon h_{ei}) + \nabla_e(g_{di} + \epsilon h_{di}) - \nabla_i(g_{ed} + \epsilon h_{ed})] \\ = \nabla_c \tfrac{1}{2}(\epsilon g^{ai} + \epsilon^2 h^{ai})[\nabla_d h_{ei} + \nabla_e h_{di} - \nabla_i h_{ed}] \\ = \nabla_c \tfrac{1}{2}\epsilon g^{ai}[\nabla_d h_{ei} + \nabla_e h_{di} - \nabla_i h_{ed}] = \nabla_c \tfrac{1}{2}(\nabla_d h^a_e + \nabla_e h^a_d - \nabla^a h_{ed}) \end{gathered}$$

Hasonló számolással adódik $\nabla_d C^a_{ce}$-re:

$$\nabla_d C^a_{ce} = \nabla_d \tfrac{1}{2}(\nabla_c h^a_e + \nabla_e h^a_c - \nabla^a h_{ce}).$$

Képezve $\nabla_c C^a_{de} - \nabla_d C^a_{ce}$ különbséget:

$$\begin{gathered} \nabla_c C^a_{de} - \nabla_d C^a_{ce} = \tfrac{1}{2}((\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)h^a_e + \nabla_c\nabla_e h^a_d - \nabla_d\nabla_e h^a_c + \nabla_d\nabla^a h_{ce} - \nabla_c\nabla^a h_{de}) \\ = \tfrac{1}{2}(\nabla_c\nabla_e h^a_d - \nabla_d\nabla_e h^a_c + \nabla_d\nabla^a h_{ce} - \nabla_c\nabla^a h_{de} - R^a_{icd}h^i_e + R^i_{ecd}h^a_i). \end{gathered}$$

Összefoglalva a teljes Riemann-tenzort

$$\begin{gathered} R^a_{ecd}{}^{(0)} = R^a_{ecd} \\ R^a_{ecd}{}^{(1)} = \tfrac{1}{2}(\nabla_c\nabla_e h^a_d - \nabla_d\nabla_e h^a_c + \nabla_d\nabla^a h_{ce} - \nabla_c\nabla^a h_{de} - R^a_{icd}h^i_e + R^i_{ecd}h^a_i) \end{gathered}$$

adódik. A vezető rend itt is az első rend lesz, melynek $\sigma(\frac{1}{\epsilon})$ a nagyságrendje. Isaacson megmutatta, hogy a Riemann-tenzor másod rendje $\sigma(1)$, míg a magasabb tagok $\sigma(\epsilon)$ nagyságrendűek. Továbbá az első rendek lesznek mértékinvariánsak a nagyfrekvenciás közelítésben. Hullámok hiányában ($h_{ed} = 0$) a Riemann-tenzor $\tilde{R}^a_{ecd}{}^{(0)}$ értéket vesz fel. Ha gravitációs hullámok vannak jelen, a téridő teljes görbülete óriási mértékben megnő a domináns $\epsilon\tilde{R}^a_{ecd}{}^{(1)}$ kifejezésig. $\tilde{R}^a_{ecd}{}^{(0)}$ ugyanazokat a szimmetriákat elégíti ki, mint $\epsilon\tilde{R}^a_{ecd}{}^{(1)}$. Az elsőrendű Riemann-tenzor kielégíti a következő tulajdonságokat:

$$\begin{gathered} R^a_{ecd}{}^{(1)} = -R^a_{edc}{}^{(1)}, \\ R^a_{ecd}{}^{(1)} = -R^c_{dae}{}^{(1)}, \\ R^a_{ecd}{}^{(1)} + R^a_{cde}{}^{(1)} + R^a_{dec}{}^{(1)} = 0, \\ \nabla_c R^f_{gae}{}^{(1)} + \nabla_e R^f_{gca}{}^{(1)} + \nabla_a R^f_{gec}{}^{(1)} \doteq \epsilon^2. \end{gathered}$$

A $\doteq$-el jelölt azonosságot Bianchi-azonosságnak nevezzük.
Bizonyítás:

$$\tilde{R}^i_{[dbc]} = 0$$

továbbá, ha

$$\begin{gathered} A_{abcd} = (\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_a)\tilde{\nabla}_c\omega_d = -\tilde{R}^i_{cab}\tilde{\nabla}_i\omega_d - \tilde{R}^i_{dab}\tilde{\nabla}_c\omega_i, \\ B_{abcd} = \tilde{\nabla}_a(\tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_c - \tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_b) = \tilde{\nabla}_a(-\tilde{R}^i_{dbc}\omega_i) = -\omega_i\tilde{\nabla}_a\tilde{R}^i_{dbc} - \tilde{R}^i_{dbc}\tilde{\nabla}_a\omega_i, \end{gathered}$$

akkor

$$\begin{gathered} A_{[abc]d} = B_{[abc]d} \\ -\tilde{R}^i_{[cab]}\tilde{\nabla}_i\omega_d - \tilde{R}^i_{d[ab}\tilde{\nabla}_{c]}\omega_i = -\omega_i\tilde{\nabla}_{[a|}\tilde{R}^i_{d|bc]} - \tilde{R}^i_{d[bc}\tilde{\nabla}_{a]}\omega_i, \\ 0 = -\omega_i\tilde{\nabla}_{[a|}\tilde{R}^i_{d|bc]}, \\ \tilde{\nabla}_{[a|}\tilde{R}^i_{d|bc]} = 0. \end{gathered}$$

Tudjuk, hogy

$$
\begin{gathered}
R^i_{[dbc]}{}^{(0)} = 0, \\
\nabla_{[a|} R^i_{d|bc}{}^{(0)} = 0,
\end{gathered}
$$

így

$$
\begin{gathered}
A_{[abc]d} = B_{[abc]d} \\
A_{[abc]d} - B_{[abc]d} = 0 \\
-(R^i_{[cab]}{}^{(0)} + \epsilon R^i_{[cab]}{}^{(1)})\tilde{\nabla}_i \omega_d - (R^i_{d[ab}{}^{(0)} + \epsilon R^i_{d[ab}{}^{(1)})\tilde{\nabla}_{c]}\omega_d + \omega_i \tilde{\nabla}_{[a}(R^i_{d|bc]}{}^{(0)} + \epsilon R^i_{d|bc]}{}^{(1)}) \\
+(R^i_{d[bc]}{}^{(0)} + \epsilon R^i_{d[bc]}{}^{(1)})\tilde{\nabla}_{a]}\omega_i \\
= -R^i_{[cab]}{}^{(0)}\tilde{\nabla}_i \omega_d - R^i_{d[ab}{}^{(0)}\tilde{\nabla}_{c]}\omega_i + \omega_i \tilde{\nabla}_{[a|} R^i_{d|bc]}{}^{(0)} + R^i_{d[bc}{}^{(0)}\tilde{\nabla}_{a]}\omega_i \\
-\epsilon R^i_{[cab]}{}^{(1)}\tilde{\nabla}_i \omega_d - \epsilon R^i_{d[ab}{}^{(1)}\tilde{\nabla}_{c]}\omega_i + \omega_i \tilde{\nabla}_{[a|}\epsilon R^i_{d|bc]}{}^{(1)} + \epsilon R^i_{d[bc}{}^{(1)}\tilde{\nabla}_{a]}\omega_i \\
= -R^i_{[cab]}{}^{(1)}\tilde{\nabla}_i \omega_d + \omega_i \tilde{\nabla}_{[a|} R^i_{d|bc]}{}^{(1)}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
6R^i_{[cab]}{}^{(1)} = R^i_{cab}{}^{(1)} + R^i_{abc}{}^{(1)} + R^i_{bca}{}^{(1)} - R^i_{acb}{}^{(1)} - R^i_{bac}{}^{(1)} - R^i_{cba}{}^{(1)} \\
3R^i_{[cab]}{}^{(1)} = R^i_{cab}{}^{(1)} + R^i_{abc}{}^{(1)} + R^i_{bca}{}^{(1)} \\
3R^{(1)}_{i[cab]} = -\tfrac{1}{2}(R^{(0)}_{clab} h^{(1)l}_i - R^{(0)}_{ilab} h^{(1)l}_c + \nabla_a \nabla_i h^{(1)}_{bc} + \nabla_b \nabla_c h^{(1)}_{ai} - \nabla_a \nabla_c h^{(1)}_{bi} - \nabla_b \nabla_i h^{(1)}_{ac}) \\
-\tfrac{1}{2}(R^{(0)}_{albc} h^{(1)l}_i - R^{(0)}_{ilbc} h^{(1)l}_a + \nabla_b \nabla_i h^{(1)}_{ac} + \nabla_c \nabla_a h^{(1)}_{bi} - \nabla_b \nabla_a h^{(1)}_{ci} - \nabla_c \nabla_i h^{(1)}_{ab}) \\
-\tfrac{1}{2}(R^{(0)}_{blca} h^{(1)l}_i - R^{(0)}_{ilca} h^{(1)l}_b + \nabla_c \nabla_i h^{(1)}_{ba} + \nabla_a \nabla_b h^{(1)}_{ci} - \nabla_c \nabla_b h^{(1)}_{ai} - \nabla_a \nabla_i h^{(1)}_{bc}) \\
-6R^i_{[cab]}{}^{(1)} = 3R^{(0)}_{[c|l|ab]} h^{(1)l}_i - 3R^{[0]}_{il[bc} h^{(1)l}_{a]} \\
+(\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) h^{(1)}_{ai} + (\nabla_c \nabla_a - \nabla_a \nabla_c) h^{(1)}_{bi} + (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) h^{(1)}_{ci} \\
= -3R^{[0]}_{il[bc} h^{(1)l}_{a]} - R^{(0)}_{labc} h^{(1)l}_i - R^{(0)}_{libc} h^{(1)l}_a - R^{(0)}_{lbca} h^{(1)l}_i - R^{(0)}_{lica} h^{(1)l}_b - R^{(0)}_{lcab} h^{(1)l}_i - R^{(0)}_{liab} h^{(1)l}_c \\
-3R^{[0]}_{il[bc} h^{(1)l}_{a]} + 3R^{[0]}_{il[bc} h^{(1)l}_{a]} - R^{(0)}_{l[abc]} h^{(1)l}_i \\
= 0,
\end{gathered}
$$

ebből következik, hogy

$$
\tilde{\nabla}_{[a|} R^{i(1)}_{d|bc]} = 0.
$$

Ezzel a bizonyítással beláttuk, hogy nincs nullad-,első rendje ennek a kifejezésnek, a másod rend pontos értékéről nem esik szó, de a későbbi tanulmányaim során meg szeretnék bizonyosodni a másod rend számszerű értékéről.

4.5. Mértéktranszformáció és invariancia

Most végtelenül kicsi koordináta transzformációkat, valamint az általuk kiváltott mérték transzformációkat fogjuk vizsgálni annak érdekében, hogy kifejezzük a teljes Riemann, illetve Ricci-tenzorok invarianciáját. Legyen az infinitezimális koordináta transzformáció

$$\tilde{x}^a = x^a + \epsilon \xi^a,$$

ahol ξ a transzformáció generátorfüggvénye. Ebben a koordináta rendszerben elhanyagoljuk az $\sigma(\epsilon^2)$ rendű tagokat.

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \epsilon \pounds_\xi h_{ab}$$
$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \epsilon(h_{ab} - \tilde{\nabla}_a \xi_b - \tilde{\nabla}_b \xi_a)$$
$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} + \epsilon(h_{ab} - \nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a) + O(\epsilon^2)$$

Az új koordináta rendszerben a perturbáció

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \nabla_a \xi_b - \nabla_b \xi_a$$

alakú lesz. Akár közvetlen számításból vagy a Lie-derivált meghatározásából azt látjuk, hogy a mértéktranszformációnál a Ricci és a Riemann tenzorok a következő alakúak lesznek:

$$\bar{R}^{(1)}_{ed} = R^{(1)}_{ed} - \pounds_\xi R^{(0)}_{ed},$$
$$\bar{R}^{(1)}_{ed} = R^{(1)}_{ed} - \tilde{\nabla}_\sigma (R^{(0)}_{ed}) \xi^\sigma - \tilde{\nabla}_e(\xi^\sigma) R^{(0)}_{\sigma d} - \tilde{\nabla}_d(\xi^\sigma) R^{(0)}_{\sigma e}, \tag{40}$$
$$\bar{R}^a_{ecd}{}^{(1)} = R^a_{ecd}{}^{(1)} - \pounds_\xi R^a_{ecd}{}^{(0)},$$
$$R^a_{ecd}{}^{(1)} - \tilde{\nabla}_\sigma R^a_{ecd}{}^{(0)} \xi^\sigma + R^\sigma_{ecd}{}^{(0)} \tilde{\nabla}^a \xi_\sigma - R^a_{\sigma cd}{}^{(0)} \tilde{\nabla}_e \xi^\sigma - R^a_{e\sigma d}{}^{(0)} \tilde{\nabla}_c \xi^\sigma - R^a_{ec\sigma}{}^{(0)} \tilde{\nabla}_d \xi^\sigma. \tag{41}$$

Ha ξ^a egy létező infinitezimális koordináta transzformáció generátorfüggvénye akkor kielégíti a

$$\xi^a = \sigma(1), \nabla_b \xi^a = \sigma(1) \tag{42}$$

egyenletet, ez a formula generál magas és alacsony frekvenciás koordináta hullámot. Ha a (32),(42)-es valamint a

$$\epsilon << 1, g_{ab} = \sigma(1), h_{ab} = \sigma(1) \tag{43}$$
$$\nabla_c g_{ab} = \sigma(1), \nabla_c h_{ab} = \sigma(\frac{1}{\epsilon}) \tag{44}$$
$$\nabla_d \nabla_c g_{ab} = O(1), \nabla_d \nabla_c h_{ab} = \sigma(\frac{1}{\epsilon^2}) \tag{45}$$

(43), (44), (45)-ös egyenleteket behelyettesítjük a (40),(41)-es egyenletekbe, egyértelműen adódik az

$$R^{(1)}_{ed} - \bar{R}^{(1)}_{ed} \doteq \epsilon^2$$
$$R^a_{cde}{}^{(1)} - \bar{R}^a_{cde}{}^{(1)} \doteq \epsilon^2.$$

Nagy frekvenciás határban $\epsilon \to 0$, látszik, hogy a Riemann- és a Ricci-tenzorok perturbációja mértékinvariáns és jól közelíthető valódi fizikai mérésekkel. Az egyszerű oka ennek hogy λ rendű távolság skálán a téridő lokálisan sík. Amíg λ kisebb mint L, a perturbációk nem tartalmaznak nagy hullámhosszú komponenseket. Ez a lokális viselkedés a hátteret úgy görbíti, hogy az globális mértékinvariáns legyen. A tágulás mérték invarianciája nagyon fontos, különben nem lennének koordináta függetlenek a fizikailag mérhető effektusok. Végül, még inkább ki kell hangsúlyozni, hogy a kapott mérték invariancia csak a magas frekvenciás közelítés feltevéséből származik [14].

4.6. Lineáris közelítés

Röviden áttekintjük a tömeg nélküli spin-2 mezők elméletét lapos tér esetén. Köztudott, hogy egy ilyen mezőt valódi szimmetrikus tenzor mező Ψ^{ab} ír le, mely eleget tesz a következő egyenleteknek [14]:

$$\nabla_c \nabla^c \Psi^{ab} = 0, \tag{46}$$

$$\nabla_b \Psi^{ab} = 0, \tag{47}$$

$$\Psi = \eta_{ab} \Psi^{ab} = 0, \tag{48}$$

ahol $\eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1)$. A (47)-es és a (48)-as egyenletek biztosítják, hogy az energia pozitív definit és a mező tiszta spin-2. (Spin-1 és spin-0 nélküli). A Ψ^{ab} tenzor mező szabadsági fokainak száma ötről kettőre csökken, mert az (46)-(48) tulajdonságok a mértéktranszformáció által nem változnak.

$$\Psi^{ab} \to \bar{\Psi}^{ab} = \Psi^{ab}, -\nabla^a \xi^b - \nabla^b \xi^a,$$

ahol ξ^b egy olyan vektor mező, melyre teljesülnek a következő egyenletek:

$$\nabla_c \nabla^c \xi^b = 0,$$
$$\nabla_c \xi^c = 0.$$

A gravitáció gyengetér-közelítésére igazak a (46)-(48)-ig megfogalmazott egyenletek infinitezimálisan kicsi koordináta transzformációk esetén, melyek alakja:

$$x^b \to \bar{x}^b = x^b + \xi^b.$$

Természetesen ezekre a ξ^b vektor mezőkre is igazak a fentebb említett tulajdonságok. Tekintsük a Ricci-tenzort és a vákuum Einstein-egyenletbe helyettesítés után látszik, hogy a vezető rend

$$R^{(1)}_{ab} = 0, \tag{49}$$

majd a következő rendben

$$R^{(0)}_{ab} = -\epsilon^2 R^{(2)}_{ab}. \tag{50}$$

A (49)-es egyenletet Lánczos Kornél látta be először [16] 1925-ben. A következő részletesen reprodukált számolás a hullámegyenlet levezetése lesz úgy, hogy Ψ-t tartalmazó tagok lesznek benne, legyen tehát:

$$\Psi_{ab} = h_{ab} - \tfrac{1}{2} g_{ab} h,$$
$$\Psi = g^{cd} \Psi_{cd},$$

ahol $h = g^{cd} h_{cd}$.

$$\begin{aligned} 0 = 2R^{(1)}_{ed} &= g^{af}(\nabla_a \nabla_e[\Psi_{df} + \tfrac{1}{2} g_{df} h] + \nabla_a \nabla_d [\Psi_{ef} + \tfrac{1}{2} g_{ef} h] - \nabla_a \nabla_f [\Psi_{de} + \tfrac{1}{2} g_{de} h] - \nabla_d \nabla_e [\Psi_{af} + \tfrac{1}{2} g_{af} h]) \\ &= \nabla^f \nabla_e \psi_{df} + \nabla^f \nabla_d \Psi_{ef} - \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} - \nabla_d \nabla_e \Psi + g^{af} \tfrac{1}{2} [\nabla_a \nabla_e (g_{df} h) + \nabla_a \nabla_d (g_{ef} h) - \nabla_a \nabla_f (g_{de} h) \\ &\quad - \nabla_d \nabla_e (g_{af} h)] \\ &= \nabla^f \nabla_e \psi_{df} + \nabla^f \nabla_d \Psi_{ef} - \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} - \nabla_d \nabla_e \Psi + \tfrac{1}{2} \nabla_d \nabla_e h + \tfrac{1}{2} \nabla_e \nabla_d h - \tfrac{1}{2} \nabla^f \nabla_f (g_{de} h) - 2 \nabla_d \nabla_e h \end{aligned}$$

Képezve Ψ_{ab} szimmetrikus tenzor mező spúrját adódik, hogy $\Psi = -h$.

$$0 = \nabla^f \nabla_e \psi_{df} + \nabla^f \nabla_d \Psi_{ef} - \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} + \tfrac{1}{2} \nabla_d \nabla_e \Psi - \tfrac{1}{2} \nabla_e \nabla_d \Psi + \tfrac{1}{2} \nabla^f \nabla_f g_{de} \Psi$$
$$0 = \nabla^f \nabla_e \psi_{df} + \nabla^f \nabla_d \Psi_{ef} - \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} + \tfrac{1}{2} \nabla^f \nabla_f g_{de} \Psi - \tfrac{1}{2} (\nabla_e \nabla_d - \nabla_d \nabla_e) \Psi.$$

(-1)-el való beszorzás után:

$$0 = \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} - \tfrac{1}{2} g_{de} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla^f \nabla_e \psi_{df} - \nabla^f \nabla_d \Psi_{ef} + \tfrac{1}{2} (\nabla_e \nabla_d - \nabla_d \nabla_e) \Psi.$$
$$0 = \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} - \tfrac{1}{2} g_{de} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla^f \nabla_e \psi_{df} - \nabla^f \nabla_d \Psi_{ef} + \tfrac{1}{2} \nabla_e \partial_d \Psi - \tfrac{1}{2} \nabla_d \partial_e \Psi$$
$$0 = \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} - \tfrac{1}{2} g_{de} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla^f \nabla_e \psi_{df} - \nabla^f \nabla_d \Psi_{ef} + \tfrac{1}{2} \partial_e \partial_d \Psi - \Gamma^i_{ed} \partial_i \Psi - \tfrac{1}{2} \partial_d \partial_e \Psi + \Gamma^i_{de} \partial_i \Psi$$
$$0 = \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} - \tfrac{1}{2} g_{de} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla^f \nabla_e \psi_{df} - \nabla^f \nabla_d \Psi_{ef}$$
$$0 = \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} - \tfrac{1}{2} g_{de} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla_e \nabla^f \psi_{df} - \nabla_d \nabla_f \Psi_{ef} + 2R^{(0)}_{kedf} \Psi^{fk} + R^{(0)}_{dk} \Psi^k_e + R^{(0)}_{ek} \Psi^k_d$$

Tehát a végső alakja az egyenletnek:

$$0 = \nabla^f \nabla_f \Psi_{de} - \frac{1}{2} g_{de} \nabla^f \nabla_f \Psi - \nabla_e \nabla^f \psi_{df} - \nabla_d \nabla_f \Psi_{ef} + 2R^{(0)}_{kedf} \Psi^{fk} + R^{(0)}_{dk} \Psi^k_e + R^{(0)}_{ek} \Psi^k_d. \tag{51}$$

Ha az imént levezetett képletet összehasonlítjuk a (46)-(48) egyenletekkel, akkor rákényszeríthetünk Ψ-re két tulajdonságot

$$\nabla_b \Psi^{ab} = 0, \tag{52}$$

$$\Psi = 0, \tag{53}$$

ekkor a tömeg nélküli spin-1 és spin-2 mezők egy lapos háttér geometriában vannak, ahol a dinamikai egyenletek szigorúan invariánsak [14]. Ez lehetővé teszi a kényelmes mérték megválasztását az egyenletek egyszerűsödése érdekében. A hullámegyenlet alakja viszont megváltozik egy tetszőleges mértéktranszformáció esetén. Infinitezimálisan kicsi koordináta transzformációnál

$$x^a \to \bar{x}^a = x^a + \epsilon \xi^a,$$

és

$$\Psi^{ab} \to \bar{\Psi}^{ab},$$

továbbá

$$\nabla^a \Psi_{ba} \to \nabla^a \bar{\Psi}_{ba} = \nabla^a \Psi_{ba} \nabla^a \nabla_a \xi_b + R^{(0)}_{ca} \xi^a, \tag{54}$$

$$\Psi = \bar{\Psi} = \Psi + 2\nabla_a \xi^a. \tag{55}$$

Ha ξ^b-t választjuk az inhomogén egyenlet megoldásának, akkor

$$\nabla^a \nabla_a \xi_b - R^{(0)}_{ba} \xi^a = \nabla^a \Psi_{ba},$$
$$\nabla^a \nabla_a = -\tfrac{1}{2} \Psi$$

az látszik, hogy az (52)-es és az (53)-as egyenletek megmaradnak az új koordinátarendszerben. A Lie-deriváltak elhagyása által kapott új koordináta rendszerben az (51)-es egyenlet

$$-\triangle \Psi_{ed} \equiv \nabla^b \nabla_b \Psi_{ed} + 2R^{(0)}_{cedb} \Psi^{cb} + R^{(0)}_{ec} \Psi^c_d + R^{(0)}_{dc} \Psi^c_e = 0. \tag{56}$$

A $\triangle$ operátor pontosan a d'Alembert, amelyet Lichnerowicz vezetett be szimmetrikus tenzorok számára. Ha $\nabla^a \nabla_a \Psi = 0$ látható, hogy az (56)-os egyenlet összhangban van az (53)-assal. Az (56)-os egyenlet kovariáns deriváltját képezve

$$\nabla^a(-\triangle \Psi_{ea}) = \nabla^a \nabla^f \nabla_f \Psi_{ea} + R^{(0)}_{ea} \Psi^{af}_f + \Psi^{af} (\nabla_f 2R^{(0)}_{ea} - \nabla_e R^{(0)}_{af}) \doteq \epsilon^3 \tag{57}$$

adódik. Összeségében a nagy frekvenciás gravitációs hullámok úgy közelítenek az alacsonyabb rendekhez, mint a görbült-tér hullámegyenlete (56) az (52), (53)-as egyenletekhez. Ezek változatlanok maradnak a további mértéktranszformáció által generált ξ_e-re, mely kielégíti a

$$\nabla^a \nabla_a \xi_e - R^0_{ea} \xi^a = 0$$
$$\nabla_e \xi^e = 0$$

egyenleteket. A hullámegyenlet mérték specializáció nélküli alakja levezethető a Lagrange-függvény variációs elvéből.

4.7. Einstein–Hilbert hatás

Ebben az alfejezetben reprodukálni fogjuk, hogy az Einstein–Hilbert hatásból a fentebb definiált Ricci-tenzorok és a perturbált metrika, valamint determinánsának sorfejtése majd variációja a vákuum Einstein-egyenletet generálja első rendben, majd másod rendben az (51)-es hullámegyenletet.
Az Einstein–Hilbert-hatás:

$$S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{ab}\tilde{R}_{ab} = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}(g^{ab} + \epsilon h^{ad} + \epsilon^2 h^{ad})(R_{ab} + \epsilon R_{ab} + \epsilon^2 R_{ab}).$$

A $\sqrt{-\tilde{g}}$ sorfejtése:

$$\tilde{g} = det(\tilde{g}_{ab}) = det(g_{ab} + \epsilon h_{ab})$$
$$\delta\sqrt{-g} = \sqrt{-\tilde{g}} - \sqrt{-g}$$
$$\delta\sqrt{-g} = \tfrac{\sqrt{-g}}{2}g^{ab}\delta g_{ab} = \tfrac{\sqrt{-g}}{2}g^{ab}\epsilon h_{ab} = \tfrac{\sqrt{-g}}{2}\epsilon h.$$
$$\sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g}(1 + \frac{\epsilon}{2}h). \tag{58}$$

Tehát

$$S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}(1 + \tfrac{\epsilon}{2}h)(g^{ab} + \epsilon h^{ad} + \epsilon^2 h^{ad})(R_{ab} + \epsilon R_{ab} + \epsilon^2 R_{ab})$$
$$S_{EH(0)} + \epsilon S_{EH(1)} + \epsilon^2 S_{EH(2)}.$$

$$S_{[EH]} =$$
$$\int d^4x\sqrt{-g}(g^{ab}R_{ab} + \epsilon g^{ab}R_{ab} + \epsilon^2 g^{ab}R_{ab} + \epsilon h^{ad}R_{ab} + \epsilon^2 h^{ad}R_{ab} + \epsilon^3 h^{ad}R_{ab} + \epsilon^2 h^{ad}R_{ab} + \epsilon^3 h^{ad}R_{ab} + \epsilon^4 h^{ad}R_{ab}$$
$$+ \tfrac{\epsilon}{2}hg^{ab}R_{ab} + \tfrac{\epsilon^2}{2}hg^{ab}R_{ab} + \tfrac{\epsilon^3}{2}hg^{ab}R_{ab} + \tfrac{\epsilon^2}{2}hh^{ad}R_{ab} + \tfrac{\epsilon^3}{2}hh^{ad}R_{ab} + \tfrac{\epsilon^4}{2}hh^{ad}R_{ab} + \tfrac{\epsilon^3}{2}hh^{ad}R_{ab}$$
$$+ \tfrac{\epsilon^4}{2}hh^{ad}R_{ab} + \tfrac{\epsilon^5}{2}hh^{ad}R_{ab})$$

Leválasztva ϵ^2-nél magasabb rendű tagokat, majd csoportosítva őket

$$S_{EH(0)} = \int d^4x\sqrt{-g}R,$$
$$S_{EH(1)} = \int d^4x\sqrt{-g}(h^{ab}_{(1)}R_{ab} + g^{ab}R^{(1)}_{ab} + \tfrac{h}{2}R),$$
$$S_{EH(2)} = \int d^4x\sqrt{-g}(h^{ab}_{(2)}R_{ab} + h^{ab}_{(1)}R^{(1)}_{ab} + g^{ab}R^{(2)}_{ab} + \tfrac{h}{2}h^{ab}_{(1)}R_{ab} + \tfrac{h}{2}g^{ab}R^{(1)}_{ab}).$$

Behelyettesítve $h^{ad}_{(1)}$ és $h^{ad}_{(2)}$ számolt kifejezéseit:

$$S_{EH(1)} = \int d^4x\sqrt{-g}(-h_{ij}R^{ij} + g^{ab}R^{(1)}_{ab} + \tfrac{h}{2}R),$$
$$S_{EH(2)} = \int d^4x\sqrt{-g}(g^{li}h_{kl}h_{ij}R^{kj} - g^{ai}g^{jb}h_{ij}R^{(1)}_{ab} + g^{ab}R^{(2)}_{ab} - \tfrac{h}{2}h_{ij}R^{ij} + \tfrac{h}{2}g^{ab}R^{(1)}_{ab}).$$

Az első rendű hatás variációja h_{ij} szerint

$$\delta S_{EH(1)} = \int d^4x[\delta(-\sqrt{-g}h_{ij}R^{ij}) + \delta(\sqrt{-g}g^{ab}R^{(1)}_{ab}) + \delta(\sqrt{-g}\frac{h}{2}R)]$$

$g^{ab}R^{(1)}_{ab}$ variációja:

$$\tfrac{1}{2}\delta[g^{ab}g^{ij}(\nabla_j\nabla_a h_{ib} + \nabla_j\nabla_b h_{ia} - \nabla_j\nabla_i h_{ab} - \nabla_b\nabla_a h_{ij}]$$
$$\tfrac{1}{2}\delta[(\nabla_j\nabla_a g^{ab}g^{ij}h_{ib} + \nabla_j\nabla_b g^{ab}g^{ij}h_{ia} - \nabla_j\nabla_i g^{ab}g^{ij}h_{ab} - \nabla_b\nabla_a g^{ab}g^{ij}h_{ij}].$$

Felhasználjuk, hogy

$$\tfrac{1}{2}\nabla_j\nabla_a g^{ab}g^{ij}h_{ib} = \tfrac{1}{2}\nabla_j(g^{ab}\nabla_a g^{ij}h_{ib}) + \tfrac{1}{2}\nabla_j(g^{ij}\nabla_a g^{ab}h_{ib}) - \tfrac{1}{2}\nabla_j g^{ab}\nabla_a g^{ij}h_{ib} - \tfrac{1}{2}\nabla_j g^{ij}\nabla_a g^{ab}h_{ib}.$$

Mivel fentebb beláttuk, hogy $\nabla_j g^{ab} = 0$, ezért ezek variációja is 0 lesz. A maradék két tag pedig négyesdivergencia $(g^{ab}\nabla_a g^{ij}h_{ib}) = V^j$. Felhasználjuk a következő segédösszefüggést:

$$\nabla_j V^j = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_j(\sqrt{-g}V^j. \tag{59}$$

Bizonyítás:

$$\nabla_j V^j = \partial_j V^j + \Gamma^j_{jk} V^k = \partial_j V^j + (\tfrac{1}{2} g^{jl}[\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}])V^k.$$

Itt g^{jl} szimmetrikus (jl)-ben, viszont $\partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk}$ (jl)-ben antiszimmetrikus.

$$= \partial_j V^j + \tfrac{1}{\sqrt{-g}} \tfrac{\sqrt{-g}}{2} g^{jl} \partial_k g_{jl} V^k = \partial_j V^j + \tfrac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j \sqrt{-g} V^j = \tfrac{1}{\sqrt{-g}} \partial_j (\sqrt{-g} V^j)$$

Számolás folytatása:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_V d^4x \sqrt{-g} \nabla_j (g^{ab} \nabla_a g^{ij} h_{ib}) \\ &= \textstyle\int_V d^4x \partial_j (\sqrt{-g} g^{ab} \nabla_a g^{ij} h_{ib}). \end{aligned}$$

Gauss-tételt alkalmazva:

$$= \textstyle\int_{\partial V} d^3x n_j (\sqrt{-g} g^{ab} \nabla_a g^{ij} h_{ib}) = 0,$$

ahol n_j a normális. Ha a határon nincs transzport, akkor ennek értéke zérus. Tehát a variáció a következő lesz, felhasználva $\delta\sqrt{-g}$ fentebb levezetett eredményét, valamint, hogy δR_{ab} a határon eltűnő négyesdivergencia:

$$\tfrac{\delta S_{EH(1)}}{\delta g^{ij}} = \textstyle\int d^4x \sqrt{-g} (R_{ij} h - \tfrac{h}{2} g_{ij} R).$$

Mivel $\frac{\delta S_{EH(1)}}{\delta g^{ij}} = 0$, ezért:

$$0 = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R. \tag{60}$$

Tehát az Einstein-Hilbert hatás variációja felső indexes háttér metrika szerint a vákuum Einstein-egyenletet adja végeredményképpen. A második rendet nem sikerült reprodukálni ebben a szakdolgozatban.

5. Összegzés

Szakdolgozatomban a gravitációs hullámokkal, s azok sajátosságaival foglalkoztam. A bevezetőben leírtak mellett azért is választottam ezt a témát, mert szerettem volna felhívni a figyelmet jelentőségükre és a gravitációelméletbeli nélkülözhetetlen voltukra. A szakdolgozat fejezeteit aszerint alakítottam ki, hogy melyek azok a legfontosabb számítási feladatok, amik logikai sorrendben pontos leírást adnak a gravitációs hullámokról és kapcsolatukról a téridő geometriájával. Természetesen nem törekedhettem a teljességre. Részben a téma terjedelme és nagysága, részben pedig az idő szűke miatt sem tudtam a szakcikkben megtalálható minden képletet részletes levezetéssel reprodukálni. A dolgozat logikai felépítését követve az első részben a harmonikus koordinátákra helyeztem a hangsúlyt Weinberg [10] eredményeinek reprodukálása alapján. Szó esett a metrikáról, a metrika determinánsának variációjáról, valamint a Christoffel-szimbólum és a metrika kapcsolatáról. Az elvárásaimnak megfelelően ebben a fejezetben minden kitűzött számolási példát kellő részletességgel sikerült reprodukálni. A második részben a hangsúly a gravitációs hullámok analógiáján volt az elektromágneses hullámokkal, valamint a gravitációs hullámok gyengetér-közelítésén melyet a tudásomra hagyatkozva a Weinberg [10] által közölt eredmények részletes reprodukálásával értem el. Előbbiben az inhomogén Maxwell-egyenletekből kiindulva négyespotenciálokat alkalmazva sikerült egy olyan egyenletet [12] felidézni, aminél ha a Lorenz-mértéket megválasztom a források logikáját követve [10],[12], akkor egy forrásos hullámegyenlethez vezettek. Ezt követően a forrásos hullámegyenlet homogén megoldását kellett használni [10], amit először a homogén Maxwell-egyenletbe, majd a Lorenz-mértékbe kellett visszahelyettesíteni. Azt a tapasztalatot kellett levonni az első eset után [12], hogy a hullám a fénykúpon terjed, míg a második konklúzió az volt, hogy a négy komponens közül kettő lenullázható, a másik kettő pedig egymástól független [12]. Végül a megfelelő polarizációs vektort választva elérhetővé vált, hogy egy z-tengely irányú forgatásra a polarizációs irányok megörződjenek. A forgatás elvégzése után pedig levonható lett az a tanulság, hogy ezen feltételeket kielégítő foton helicitása 1 [10],[12]. A következő alfejezetben [12] jegyzetek utasításait követve kellett választani egy olyan metrikát, ami csak kis mértékben tér el a Minkowskitól. Így megválaszthatóvá vált egy perturbáció, amire feltételeket szabva előállt a teljes metrika. Első lépésként a Christoffel-szimbólumot reprodukáltam [12] a magasabbrendű $\sigma(\epsilon^2)$ tagok elhanyagolásával. Ezt követő lépésben a Riemann-tenzort, valamint a spúrját képezve felidéztem az elsőrendű Ricci-tenzort. A harmonikus koordináták alkalmazásával [10] a Ricci-tenzor tovább egyszerűsödött, majd ezt felhasználva reprodukáltam az Einstein-egyenletet gyengetér-közelítésben, ami egy hullámegyenletet generált. Ebben az alfejezetben is aszerint kellett eljárni, ahogy az előzőben, meg kellett vizsgálni [12] a síkhullám megoldást, amit először a $\Box h_{ab} = \eta^{dc}\partial_d\partial_c h_{ab}$ egyenletbe kellett visszahelyettesíteni [12]. Innen azt a konklúziót volt szükséges levonni [12], hogy a gravitációs hullám a fénykúpon terjed. Második esetben pedig a harmonikus koordináták által kialakított egyenletet kellett megvizsgálni [12]. Az általuk generált egyenletben pedig csak két index szerepelt. Az egyik lerögzítésével valamint a maradék egy komponens teljes kiírásával reprodukáltam a lehetséges szimmetrikus polarizációs vektor komponenseket, amelyek szimmetrikusak. Felírva ennek mátrixát, majd a z-tengely irányú forgatást elvégezve [10] nem változott meg a mátrix szerkezete. Ennek a feltételnek pedig csak olyan gravitációs hullámok tesznek eleget, melyek helicitása 2 [12]. A soron következő fejezetben a szakcikk feldolgozása történt, természetesen ugyanazt a logikát követve, mint Isaacson [14]. A feladat során viszont nem a Christoffel-szimbólumból kellett kiindulni, hanem egy C alsó indexeiben szimmetrikus tenzorból [15]. A folyamat végül ugyanaz lenne, szükséges lenne reprodukálni a hullámegyenletet, majd az Einstein–Hilbert hatás segítségével felidézni, hogy a hullámegyenlet származtatható egy Lagrange-sűrűségből. A bevezetőben reprodukáltam néhány alapfogalmat [14], amiket fel kell használni a helyes számolások felidézéséhez. A második alrészben sikerült reprodukálni, hogy a perturbációt okozó h_{ab} inverze nem egyenlő az index felhúzottjával, viszont néhány helyen az index felhúzottal kellett számolni [14]. A perturbált Ricci-tenzor című alfejezetben be kellett vezetni [15] a perturbált téridőn a kovariáns deriválást. A felhasznált képletek ismertetése, valamint egy kisebb átalakítás után a perturbált Riemann-tenzort reprodukáltam [15], aminek a spúrját képezve sikerült felidézni a Ricci-tenzort. Itt a Ricci-tenzor sorfejtése másod rendig történt, ugyanis a cikkben is addig szerepel, viszont a későbbi tanulmányaim során a harmadrendű tagokat is reprodukálni szeretném és levonni az eredményből a következtetést. A számolás befejeztével egy táblázatba kellett rögzíteni a rendeket nagyságrend szerint és arra a következtetésre kellett eljutni, hogy a háttér görbületének változása lassabb mint a perturbáció által okozott változások, emiatt a Ricci-tenzor sorfejtésében rendcsúszás [14] történt. Az ezt követő alrészben a perturbált Riemann-tenzort is szükséges volt megvizsgálni a rendek terén úgy, mint a Ricci-tenzort, valamint reprodukálni kellett az elsőrendű Riemann-tenzorokra a Bianchi-azonosságot [14], viszont ebben a bizonyításban nem szerepel a másod rend számszerű értéke, viszont ahogy említettem is, arról is szeretnék majd tanubizonyságot szerezni. A mértéktranszformáció és invariancia című alfejezetben egy alkalmasan választott infinitezimális koordináta transzformáció esetén a Ricci- és Riemann-tenzorok perturbációja mértékinvariáns lesz. A reprodukálásban ehhez szükségem volt a ξ koordináta generátorfüggvényére is. Először ebben az új koordináta rendszerben a Lie-deriváltak segítségével kellett reprodukálni a perturbált Ricci- és Riemann-tenzorokat, majd meg kellett vizsgálni [14], hogy bizonyos feltételek mellett mennyivel különbözik a kiindulási Ricci- Riemann tenzoroktól. Eredményül pedig annak kellett kijönnie [14], hogy másodrendű lesz a korrekció, így nagyfrekvenciás közelítés esetén mértékinvariáns lesz mindkét tenzor. A lineáris közelítés című alfejezetben egy valódi, szimmetrikus tenzormező segítségével reprodukáltam a hullámegyenletet, amire fel kellett tenni három fontos tulajdonságot, illetve meg kellett vizsgálni a tenzormező mértéktranszformációját egy alkalmasan választott új koordinátarendszerben. A hullámegyenlet meghatározását követően a mértéktranszformációjára [14] kellett fektetni a hangsúlyt. Az utolsó alfejezetben az Einstein–Hilbert hatás segítségével igyekeztem reprodukálni [14], hogy a perturbált Ricci-tenzor és a perturbált metrika behelyettesítésével a hatás felső indexes háttérmetrika szerinti variációja első rendben a vákuum Einstein-egyenlethez vezet, míg másod rendben a hullámegyenletet eredményezi. Az első esetben a számolásban szükséges volt a kovariáns négyesdivergencia bevezetése, ugyanis ennek segítségével volt lehetőség határtagokat képezni, amik nullázódtak, valamint használni kellett még a metrikával kompatibilis konnexióra [12] reprodukált eredményt is. Ezen segédszámolások segítségével sikerült felidézni a kívánt képletet. A hullámegyenlet levezetése variációs elvből azonban sajnos ebben a szakdolgozatban nem sikerült, viszont amennyiben lehetőségem nyílik rá, még az idén nyáron szeretnék foglalkozni mélyebben a hullámegyenletet eredményező Lagrange-sűrűséggel. A szakdolgozatból kimaradt még sajnos a WKB-analízis valamint annak reprodukálása, hogyan hat vissza a gravitációs hullám a téridő geometriájára. Az utolsó fejezetben pedig a szakdolgozat levezetésében használt fontosabb fogalmakról részletes matematikai leírást reprodukáltam. Először a vektorok fogalmát kellett felidézni, majd az 1-formákét [13]. A harmadik alfejezetben a kovariáns deriválást reprodukáltam, mivel a vektorok amit felidéztem általában nincsenek egy érintőtérben ezért első lépésként egy térbe kell őket helyezni, amit párhuzamos eltolás segítségével lehetséges, amiért a konnexió a felelős. Ezután lehet csak a deriválást alkalmazni rájuk. A kovariáns deriválási szabályokat pedig az alfejezetben felidéztem. Fontos megemlíteni a kovariáns deriválásról még, hogy leképezést biztosít a sokaság különböző tenzorszorzatai között [12]. Reprodukáltam ezeken kívül még a metrikával kompatibilis konnexiót [12], ami kapcsolatot teremt a metrikus és affin paraméterek között. Ennek végeredményeként a Christoffel-szimbólumot [12] kellett megkapni. Az ezt követő részben a Riemann-tenzor két definícióját idéztem fel, mint az árapály erőkért felelős erő. A komponenseinek csökkentése érdekében három fontos tenzori tulajdonságát kellett felhasználni, majd felbontani spúros és spúrmentes részre. A másik definíciója a kovariáns deriválás nem kommutálásnak mértéke, amit a kovariáns deriváltak kibontásával lehet elérni egy tetszőleges V^a vektorra [12] hattatva. A fejezet utolsó egyenlete pedig az Einstein-egyenlet volt, amit a Bianchi-azonosságból reprodukáltam segédmennyiségek bevezetésével [12]. Kiírva a komponenseket és behelyettesítve a megfelelő egyenletbe, valamint a kontrahálást elvégezve reprodukáltam az Einstein-egyenletet. A fejezetek rövid tartalmi áttekintésével egyetemben felvázoltam azt is, hogy melyek azok a lényegi elemek, amelyek kifejtését mindenképpen szükségesnek tartottam a dolgozatomban. Természetesen nem teljeskörű a téma feltérképezése. Egy, Isaacson nézőpontjából [14] megközelített a téma tartalmi kiterjedését tekintve rövid áttekintés, mely képet ad a gravitációs hullámokról és azok főbb sajátosságairól. Kutatásaim során több szakirodalmat is olvastam, amik még jobban felkeltették az érdeklődésemet a relativitáselmélet iránt, valamint arra a következtetésre juttattak, hogy a gravitációs hullámok tanulmányozása modern, alig 100 éve felfedezett és vet fel még kérdéseket, amik megoldásán én is szeretnék később gondolkodni. Saját tapasztalataim alapján mindezen ismeretek elsajátítására még nem fordítanak kellő figyelmet a fizikusok vagy csak kevés fizikus érdeklődési körébe tartozik bele a relativitáselmélet. Azt a következtetést is sikerült levonnom, hogy a közoktatásban sem fordítanak kellő figyelmet és elhanyagolják a területet. A felsőoktatásban már több lehetőség van a szükséges tudás megszerzésére a témával kapcsolatban, de érdeklődés hiányában ez sem kivitelezhető, pedig a képzés mindenképpen a hallgatók fejlődését szolgálná és segítené őket tanulmányaik során. Összeségében vannak még bőven megoldatlan kérdések a témával kapcsolatban, de bízom benne, hogy ezek megoldása nincs már messze és én is részese szeretnék lenni a kidolgozásuknak, ugyanis ez a jövő fizikusainak feladata lesz.

6. Függelék

6.1. Vektor

A tangenstéren egy választott bázis felvétele után az irányokat X^0, X^1 ... jelölik ki, melyek megfelelői $\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}$... Ekkor [13] egy tetszőleges vektor (tangensvektor) koordinátabázisban

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial x^a}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Általánosan írható, hogy

$$V = V^a \cdot \frac{\partial}{\partial x^a},$$

$$V = V^a E_a,$$

ahol V a vektor, V^a a vektor komponensei, E_a pedig a bázisvektorok. Lássuk, hogyan transzformálódnak a vektor komponensei, ha másik rendszerre térünk át:

$$V = V^a \cdot \frac{\partial}{\partial x^a} = V^a \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{a'}} = V^{a'} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{a'}},$$

tehát a vektor definíciója a következő: olyan szám n-es, amely a (61)-es képlet szerint transzformálódik, ha koordinátatranszformációt végzünk rajta.

$$V^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \cdot V^a. \tag{61}$$

6.2. 1-forma

Az 1-formák olyan leképezések [13], melyek a vektort képezik le számmá. Matematikailag: ω: $T_pM \to \mathbb{R}$. Az 1-formák az n-dimenziós kotangenstér (T_p^*M) elemei. Ha egy tetszőleges E^a bázisban szeretnénk felírni a az ω-t:

$$\langle \omega, . \rangle = \omega = \omega_a E^a = \omega_a dx^a.$$

Az 1-formák traszformációjára pedig az

$$\omega_{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}} \cdot \omega_a \tag{62}$$

összefüggés érvényes, ami definíciónak tekinthető.

6.3. Kovariáns deriválás

Vizsgáljuk meg a (61)-es képletet. Itt a vektorok nincsenek egy érintőtérben így nem lehet őket összeadni [12] (a sokaság minden pontjában más és más az érintőtér). Definíció szerinti derivált:

$$\frac{\partial V^a}{\partial \sigma} = \lim_{\sigma \to 0, y \to x} \frac{V^a(x) - V^a(y)}{\sigma},$$

akkor a határérték számlálójának két tagját nem vonhatjuk ki egymásból, tehár először párhuzamos eltolást kell végezni. A kovariáns deriválás definíciója:

$$\nabla_c V^a = \partial_c V^a + \Gamma^a_{ci} V^i$$

ahol $\partial_c V^a$ a a parciális deriválás, mely önmagában nem értelmes kifejezés, a korrekciós tagban szereplő Γ^a_{ci} pedig a Christoffel-szimbólum. Függvények kovariáns deriváltját a következő formula adja meg:

$$\nabla_c f = \partial_c f,$$

tehát skalárok kovariáns deriváltja megegyezik a parciális deriváltjával, mert nem a tangenstér elemei, vektorok kovariáns deriváltja

$$\nabla_c V^a = \partial_c V^a + \Gamma^a_{ci} V^i.$$

1-formák kovariáns deriváltja pedig:

$$\nabla_c \omega_a = \partial_c V^a - \Gamma^i_{ca} \omega_i.$$

Egy tetszőleges C^i_{jk} tenzor kovariáns deriváltja:

$$\nabla_c C^i_{jk} = \partial_c C^i_{jk} + \Gamma^l_{cl} C^i_{jk} - \Gamma^l_{cj} C^i_{lk} - \Gamma^l_{ck} C^i_{jl}. \tag{63}$$

6.4. Metrikával kompatibilis konnexió

A konnexió megadja, hogyan kell párhuzamosan eltolni vektorokat egyikből a másik érintő térbe. (Így a derivált definíciójában lévő Γ-s tag végzi el ezt az eltolást.) Akkor lehet a konnexió a metrikával kompatibilis [12] , ha

$$\nabla_i g_{ab} = 0, \tag{64}$$

azaz, ha a metrika kovariáns deriváltja 0. Ez tehát a konnexió és a metrika kapcsolata. A metrika kovariáns deriváltja kapcsolatot teremt a metrikus és az affin sokaságok között. Most belátjuk, hogy ekkor a Christoffel szimbólum felírható a metrika segítségével.

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_i g_{ab} &= \partial_i g_{ab} - \Gamma^j_{ia} g_{jb} - \Gamma^j_{ib} g_{ja}, \\ 0 = \nabla_a g_{ib} &= \partial_a g_{ib} - \Gamma^j_{ab} g_{ji} - \Gamma^j_{ai} g_{jb}, \\ 0 = -\nabla_b g_{ia} &= -\partial_b g_{ia} + \Gamma^j_{bi} g_{ja} + \Gamma^j_{ai} g_{jb}. \end{aligned}$$

Összeadva az egyenleteket, majd kihasználva, hogy a Christoffel szimbólum alsó indexeiben szimmetrikus az egyszerűsítés után a következő alak adódik:

$$0 = -(\Gamma^j_{ia} g_{jb} + \Gamma^j_{ai} g_{jb}) + (\partial_i g_{ab} + \partial_a g_{bi} - \partial_b g_{ia}).$$

Kontrahálva g^{bk}-val:

$$2\Gamma^j_{ia} g_{jb} g^{bk} = g^{bk}(\partial_i g_{ab} + \partial_a g_{bi} - \partial_b g_{ia}).$$

Osztva kettővel és felhasználva hogy $g_{jb} g^{bk} = \delta^k_j$ adódik a Christoffel szimbólum alakja:

$$\Gamma^k_{ia} = \frac{1}{2} g^{bk}(\partial_i g_{ab} + \partial_a g_{bi} - \partial_b g_{ia}). \tag{65}$$

6.5. Riemann-tenzor

Bevezetjük az árapály erőkért felelős Riemann-tenzort:

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^a_{ci} \Gamma^i_{bd} - \Gamma^a_{id} \Gamma^i_{bc}. \tag{66}$$

Behelyettesítés után egyértelműen adódik [12], hogy eleget tesz a tenzor transzformációs szabályának. A tenzornak $4^4 = 256$ komponense van, ami leredukálható. Algebrai tulajdonságai a következőek:

- $R^a_{bcd} = -R^a_{bdc}$, tehát a második két indexben antiszimmetrikus. Ez csökkenti a komponensek számát,(4x4-es antiszimmetrikus mátrix független komponenseinek a száma: $\frac{n(n-1)}{2}$ n helyére 4-et beírva 6-ot kapunk.) Így 4x4x6 = 96 komponense marad.

- $R_{abcd} = R_{cdab}$, tehát az indexek páronként felcserélhetők. (6x6-os szimmetrikus mátrix független komponenseinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$ n helyére 6-ot írva 21-et kapunk) Így 21 db komponense marad.
- $R^a_{[bcd]} = 0$, tehát az utolsó három indexre antiszimmetrizálva 0-t kapunk. Kiírással lehet bizonyítani, hogy ez további 1 db független komponens csökkenést eredményez.

A Riemann-tenzor spúrját képezve

$$R_{bd} = R^a_{bad} \tag{67}$$

kapjuk a Ricci-tenzort. Ez a tenzor szimmetrikus és 10 db algebrailag független komponense van. Ennek a tenzornak a spúrja

$$R = g^{bd} R_{bd} \tag{68}$$

a görbületi skalár. A Ricci-tenzor szerepel az Einstein-egyenletben. A Riemann-tenzor maradék 10 komponensét a tenzor spúrmentes része teszi ki, amit Weyl-tenzornak nevezünk. A Weyl-tenzor

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{(n-2)}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2R}{(n-1)(n-2)} g_{a[c}g_{d]b} \tag{69}$$

rendelkezik a Riemann-tenzor tulajdonságaival, amik beláthatóak. A Weyl-tenzor is spúrmentes. Bizonyítás:

$$\begin{aligned} g^{ac}C_{abcd} &= R_{bd} - \tfrac{2}{n-2}\tfrac{1}{2}(nR_{db} - 2R_{db} + g_{bd}R) + \tfrac{2R}{(n-1)(n-2)}(ng_{db} - g_{db}) \\ &= R_{bd} - R_{bd} - \tfrac{g_{db}R}{(n-2)} + \tfrac{g_{db}R}{(n-2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fontos megjegyezni, ennél a tenzornál a következőket:

- A gravitációs hullám is Weyl-tenzor.
- A Weyl-görbületen keresztül azt fejezzük ki, hogy távoli testek is fejtenek ki gravitációs hatást (pl. határfeltételek Weyl-görbületet generálhatnak a határtól távol).
- A Nap is Weyl-tenzort generál.
- Weyl-görbületet követnek a bolygók.

A Riemann-tenzornak azonban van egy másik definíciója is. Ez abból ered, hogy a kovariáns deriválás rendelkezik minden deriválási szabállyal, de nem felcserélhető $(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)V^a \neq 0$. Ebből adódóan a Riemann-tenzor a kovariáns deriválás nem kommutálásának a mértéke.

$$\begin{aligned} \nabla_i(\nabla_j V^a) &= \partial_i(\nabla_j V^a) + \Gamma^a_{ik}\nabla_j V^k - \Gamma^k_{ij}\nabla_k V^a \\ &= \partial_i\partial_j V^a + \partial_i(\Gamma^a_{jk}V^k) + \Gamma^a_{ik}\partial_j V^k + \Gamma^a_{ik}\Gamma^k_{jl}V^l - \Gamma^k_{ij}\partial_k V^a - \Gamma^k_{ij}\Gamma^a_{kl}V^l \\ \nabla_j(\nabla_i V^a) &= \partial_j(\nabla_i V^a) + \Gamma^a_{jk}\nabla_i V^k - \Gamma^k_{ji}\nabla_k V^a \\ &= \partial_j\partial_i V^a + \partial_j(\Gamma^a_{ik}V^k) + \Gamma^a_{jk}\partial_i V^k + \Gamma^a_{jk}\Gamma^k_{il}V^l - \Gamma^k_{ji}\partial_k V^a - \Gamma^k_{ji}\Gamma^a_{kl}V^l. \end{aligned}$$

Ezek után képezzük a kovariáns deriváltak kommutátorát, és az egyszerűsítéseket elvégezve, valamint az indexeket, ahol szükséges lecseréljük.

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)V^a = (\partial_i\Gamma^a_{jh} - \partial_j\Gamma^a_{ih} + \Gamma^a_{ik}\Gamma^k_{hj} - \Gamma^a_{jk}\Gamma^k_{hi})V^h$$

itt pedig

$$R^a_{hij} = (\partial_i\Gamma^a_{jh} - \partial_j\Gamma^a_{ih} + \Gamma^a_{ik}\Gamma^k_{hj} - \Gamma^a_{jk}\Gamma^k_{hi}) \tag{70}$$

a Riemann-tenzor, így bebizonyítottuk a másik definícióját is.

6.6. Einstein-egyenlet

Ennek az egyeletnek a levezetéséhez kiindulok a Bianchi-azonosságból [12], amit be is bizonyítunk.

$$\nabla_{[a}R^i_{|d|bc]} = 0. \tag{71}$$

Itt a bizonyítás kedvéért segédmennyiségeket fogunk bevezetni,

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\nabla_c\omega_d = A_{abcd},$$
$$\nabla_a(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\omega_d = B_{abcd}$$

melyekre fennáll, hogy

$$A_{[abc]d} = B_{[abc]d}. \tag{72}$$

A kifejezés kibontása után könnyen látható, hogy ez igaz.

$$3!A_{[abd]d} = (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\nabla_c + (\nabla_c\nabla_a - \nabla_a\nabla_c)\nabla_b\omega_d + (\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\nabla_a\omega_d - (\nabla_b\nabla_a - \nabla_a\nabla_b)\nabla_c\omega_d - (\nabla_c\nabla_b - \nabla_b\nabla_c)\nabla_b\omega_d - (\nabla_a\nabla_c - \nabla_c\nabla_a)\nabla_b\omega_d.$$
$$3!B_{[abd]d} = \nabla_a(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\omega_d + \nabla_c(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_d + \nabla_b(\nabla_c\nabla_a - \nabla_a\nabla_c)\omega_d - \nabla_b(\nabla_a\nabla_c - \nabla_c\nabla_a)\omega_d - \nabla_c(\nabla_b\nabla_a - \nabla_a\nabla_b)\omega_d - \nabla_a(\nabla_c\nabla_b - \nabla_b\nabla_c)\omega_d \rightarrow A_{[abc]d} = B_{[abc]d}.$$

Miután kivonjuk egymásból a két egyenletet minden tag eltűnik ebből tehát egyértelműen adódik a (72)-es azonosság.

$$A_{abcd} = -R^i_{cab}\nabla_i\omega_d - R^i_{dab}\nabla_c\omega_i,$$
$$B_{abcd} = -\nabla_s R^i_{dbc}\omega_i - R^i_{dbc}\nabla_a\omega_i.$$

Ekkor a (61)-es egyenletbe behelyettesítés után kapjuk:

$$R^i_{[cab]}\nabla_i\omega_d + R^i_{d[ab}\nabla_{c]}\omega_i = \nabla_{[a}R^i_{|d|bc]}\omega_i + R^i_{d[bc}\nabla_{a]}\omega_i.$$

A Riemann-tenzor tulajdnoságait felhasználva, valamint azt, hogy $\omega_i \neq 0 \rightarrow \nabla_{[a}R^i_{|d|bc]} = 0$. Ez az egyszer kontrahált Bianchi azonosság. Ezek után kontraháljuk még egyszer ezt az azonosságot.

$$\nabla_{[a}R^i_{|d|bc]} = 0 \rightarrow \nabla_a R^i_{dbc} + \nabla_b R^i_{dca} + \nabla_c R^i_{dab} = 0.$$

Legyen i = a,

$$\nabla_a R^a_{dbc} + \nabla_b R^a_{dca} + \nabla_c R^a_{dab} = 0. \rightarrow /(\mathrm{g}^{dc})$$
$$\nabla_a R^a_b - \nabla_b R + \nabla_c R^c_b = 0.$$

Mellékszámolás részletesen:

$$g^{dc}\nabla_a R^a_{dbc} = \nabla_a(g^{dc}R^a_{dbc}) = \nabla_a(g^{dc}g^{ai}R_{idbc}) = \nabla_a(g^{dc}g^{ai}R_{dicb}) = \nabla_a(g^{ai}R^c_{icb}) = \nabla_a(g^{ai}R_{ib}) = \nabla_a R^a_b.$$
$$2\nabla_a R^a_b - \nabla_b R = 0 \rightarrow \nabla_a R^a_b - \tfrac{1}{2}\nabla_b R = 0$$

Itt felhasználva, hogy $\nabla_b = g^a_b\nabla_a$

$$\nabla_a(R^a_b - \tfrac{1}{2}g^a_b R) = 0,$$

végül a megfelelő metrikával történő kontrahálás után

$$\nabla_a(R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R) = 0, \tag{73}$$

kapjuk a kétszer kontrahált Bianchi-azonosságot. Felhasználva az Einstein-tenzort

$$G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R \tag{74}$$

az összefüggés átírható

$$\nabla_a G^{ab} = 0 \tag{75}$$

ún. kovariáns négyesdivergenciára. Az eltűnő négyesdivergencia bizonyos körülmények között megmaradási törvényt ad.

7. Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani Prof. Dr. Gergely Árpád László témavezetőmnek, hogy elméleti és gyakorlati információkkal segítette a munkámat, valamint megosztotta velem tapasztalatait, észrevételeit, ezáltal értékes gondolatokkal gazdagíthattam tudásomat és elkészíthettem szakdolgozatomat. Továbbá köszönetet szeretnék mondani Nagy Cecília konzulensemnek, hogy szaktudásával, ötleteivel támogatott és helyes útra terelt amikor rossz úton jártam. Mindkettőjüknek nagyon szépen köszönöm a segítségüket, valamint azt, hogy hozzájárultak ahhoz, hogy a szakdolgozatom kerek egésszé váljon.

8. Hivatkozások

Hivatkozások

[1] A. Einstein: *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.* Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften Berlin (1916)

[2] H. Poincaré: *Sur la dynamique de l' électron* Membres de l'Académie des sciences depuis sa création : Henri Poincaré, C.R. T.140 (1905) 1504-1508

[3] N. Rosen, A. Einstein: *On gravitational waves.* Journal of the Franklin Institute 223 (1): 43–54 (1937).

[4] Discovery Science: *First Second of the Big Bang.* How The Universe Works 3. 2014

[5] A. Cho: *Ripples in space: U.S. trio wins physics Nobel for discovery of gravitational waves.* Science, 2019.05.20.

[6] Cervantes-Cota, Jorge L., Galindo-Uribarri, Salvador, and Smoot, George F. (2016). *"A Brief History of Gravitational Waves.* Universe, 2, no. 3, 22. Retrieved May 20, 2019.

[7] B.P- Abbott: *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral.* Physical Review Letters. 119 (16): 161101 (2017)

[8] S.W.Hawking, W.Israel *General Relativity: An Einstein Centenary Survey. Cambridge: Cambridge University Press.p. 98. (1979)*

[9] M. R. Drout: *Light curves of the neutron star merger GW 170817 / SSS 17a: Implications for r-process nucleosynthesis.* Science, 358 (6370): 1570–1574. (2017)

[10] S. Weinberg: *Gravitation And Cosmology: Principles And Applications Of The General Theory Of Relativity.* Cambridge University Press, 2008.

[11] Gergely Á. L: *Relativitáselmélet alapjai című kurzus* (2020)

[12] Nagy C: *Általános relativitáselmélet alapjai című kurzus* (2021)

[13] Gergely Á. L, Keresztes Z: *Matematikai módszerek a fizikában II. című kurzus* (2020)

[14] R. A. Isaacson: *Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics.* University of Maryland, 1967.

[15] R. M. Wald: *General Relativity* Chicago: University of Chicago Press (1984)

[16] C. Lanczos: *Local irregularities in an expanding universe* 31,112 (1925)

[17] M.P. Hobson, G. Efstathiou, A.N. Lasenby *General Relativity: An introduction for Physicists* Cambridge University Press 2006.

9. Nyilatkozat

Alulírott Fóris Attila Fizika BSC szakos hallgató (Neptun kód: CZC2MX) ***A gravitációs hullámok geometriai optikai közelítése*** című diplomamunka szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, 2021. május 22.

Attila Fóris

……………………………..

Fóris Attila