

József Attila Tudományegyetem

VÁLTOZÓCSILLAGOK PERIÓDUS-ANALÍZISE
AZ IDŐ ÉS A FREKVENCIA TARTOMÁNYBAN

kandidátusi értekezés

írta

SZATMÁRY KÁROLY
tudományos munkatárs

Szeged

1994

Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	3
I. A csillagok fényváltozása.....	4
I.1. A változócsillagok fontosabb típusai.....	4
I.2. Delta Scuti csillagok.....	7
I.3. Félszabályos változócsillagok.....	9
I.4. Fedési kettős és pulzáló csillagok O-C diagramja.....	10
II. Periódus meghatározó módszerek.....	11
II.1. Fourier analízis.....	12
II.2. A CLEAN-algoritmus.....	21
II.3. Wavelet analízis.....	24
II.3.1. Matematikai alapok.....	25
II.3.2. Diszkrét Wavelet Transzformáció.....	27
II.3.3. Wavelet térkép.....	28
III. A wavelet analízis tulajdonságainak vizsgálata teszt adatsorokkal.....	30
III.1. Tesztek.....	30
III.2. A wavelet térkép tulajdonságai.....	57
III.3. Az alkalmazhatóságról.....	61
IV. A wavelet analízis alkalmazása.....	63
IV.1. V Boo.....	66
IV.2. V CV _n	73
IV.3. Z UMa.....	77
V. Elméleti pulzációs modellek.....	85
V.1. Módusazonosítás.....	85
V.2. Fizikai paraméterek meghatározása.....	86
Záró gondolatok.....	91
Köszönetnyilvánítás.....	92
Irodalomjegyzék.....	93

Bevezetés

Változócsillagoknak tekintjük azokat a csillagokat, amelyeknek fényessége, vagy más állapotjelzője időben változik. Számuk a detektorok érzékenységének növekedésével rohamosan nő, ma kb. harmincezeret ismerünk. A fotoelektromos észlelési technika bevezetésével lehetővé vált a 0,001 magnitúdós relatív fénymérési pontosság elérése, a légkörön túli űrtávcsövektől még jobb eredmények várhatók.

A pulzáló csillagok vizsgálata - az asztroszeizmológia - napjainkban az asztrofizika egyik dinamikusan fejlődő ága. Ez nem is véletlen, hiszen a magányosan álló, és fizikai paramétereit nem, vagy nem kimutathatóan változtató csillagról a nagy távolság miatt igen nehéz az információszerzés.

Ha a vizsgált objektum kettős, vagy többes rendszer tagja, akkor sok esetben a fotometriai paramétereken kívül egyéb jellemzők is meghatározhatók. Még könnyebb a helyzetünk, ha a vizsgált égitest valamely állapotjelzője az általunk vizsgálható időtartományban mérhető változást mutat. Ezek a változások kapcsolatban állnak a csillag jellemzőivel, összefüggnek fejlődési állapotával és a változás természetének felderítése a csillag belső szerkezetéről is sokat elárulhat. A változócsillagok kutatása ezért kiemelkedő jelentőségű, hiszen egyrészt jó lehetőséget ad a csillagfejlődési és csillagszerkezeti elméletek ellenőrzésére, másrészt a változócsillagok egyre pontosabb megfigyelése kiindulási alapot jelenthet újabb elméletek felállításához.

A pulzáló változócsillagok fotometriai vizsgálata során alapvető fontosságú a fényváltozás periódusának vagy periódusainak meghatározása. A periódus(ok) hosszának ismeretében a pulzációelmélet és relációk (pl. a periódus és az abszolút fényesség között) segítségével a csillagok számos fizikai paramétere meghatározható.

A pulzáló változók a fénygörbe szabályossága tekintetében rendkívül sokfélék. A cepheidák, RR Lyrae csillagok és a delta Scuti típusúak egy része egy, kettő, néha három viszonylag stabil periódussal pulzál. Más csillagok esetében a fényváltozás igen bonyolult, sokszor állandó periódusú ciklusokkal le sem írható.

Szinte általános jelenség a pulzáció periódusának időbeli változása. Ez lehet nagyon lassú - ilyen a csillagfejlődési modellek is előrejeleznek -, de lehet aránylag gyors, más okokból eredően.

A periódusváltozás lehet látszólagos is, mint például amikor a lüktető csillag egy kettős rendszerben kering. Az ilyen kettőscsillagok tanulmányozása több szempontból is lényeges. A másik komponens árapály ereje hatással lehet a pulzációra (a módusok növekedési rátájára), míg fényének jelenléte csökkenti a pulzáló csillag fényváltozásának megfigyelhető amplitudóját.

A kettősség kimutatásának több módszere ismeretes, mégis eddig kevesebb pulzálóról derült ki, hogy kettős tagja, mint ahányról feltételezhető.

Sok periódusmeghatározási módszert ismerünk (Fourier analízis, fázis-diszperziós eljárások, maximum entrópia módszer), de ezek nem alkalmasak a fénygörbe lokális tulajdonságainak, a periódus vagy a fázis időbeli változásának kimutatására. Az O-C görbékkel lényegében csak monoperiodikus csillagok ciklushosszáinak változása vizsgálható. A csillagászatban egészen újnak mondható matematikai transzformáció, a wavelet analízis már képes a különböző modulációk, a pulzáció paramétereinek időfüggésének tanulmányozására.

Értekezésemben a hangsúlyt a wavelet analízis tulajdonságainak a - valóságos fénygörbét szimuláló teszt adatsorokkal való - vizsgálatára, és a wavelet módszer hosszúperiódusú pulzáló változócsillagokra történő alkalmazásaira fektettem. Ennek az

eljárásnak a használata a fénygörbék eddig nem elemzett lokális tulajdonságainak kimutatását teszi lehetővé, ezáltal új, a változócsillagok asztrofizikai leírásához szükséges eszközzel gazdagodott a csillagászat.

I. A csillagok fényváltozása

A csillagok fényességének méréséhez különféle érzékenyséű detektorokat használnak. Az amatőr csillagászok "érzékelője" általában a szem, így a fénybecslések pontossága csak néhány tized magnitúdó.

A fotografikus fotometria, a fényképezés manapság egyre inkább háttérbe szorult. Ennek oka a lineáris, nagy érzékenységű CCD detektorok megjelenése és elterjedése. Számos obszervatóriumban még a fotoelektron-sokszorozó csöves fotométereket is kiszorították.

Szegeden az új csillagvizsgálóban a JATE 40 cm-es Cassegrain távcsövéhez főleg SSP-5A fotoelektromos fotométert használunk UBV és uvby szűrőkkel. Ugyanakkor egy aránylag alacsony kategóriájú, ST4-es CCD kamerát egy kis Zeiss Telemator (63/840 mm refraktor) távcsőre szerelve (ennek elég nagy, kb. 10'x10' a látómezeje) rendkívül ígéretes eredmények születtek mind a változócsillagok mind a kiterjedt objektumok fotometriája terén. Ha nem 8 bites lenne, hanem 12 vagy 16, a mérési pontosság elérné a 0,01 magnitúdót. Figyelemre méltó az is, hogy a CCD fotometriához egyre több, kiváló szoftver kerül forgalomba.

I.1. A változócsillagok fontosabb típusai

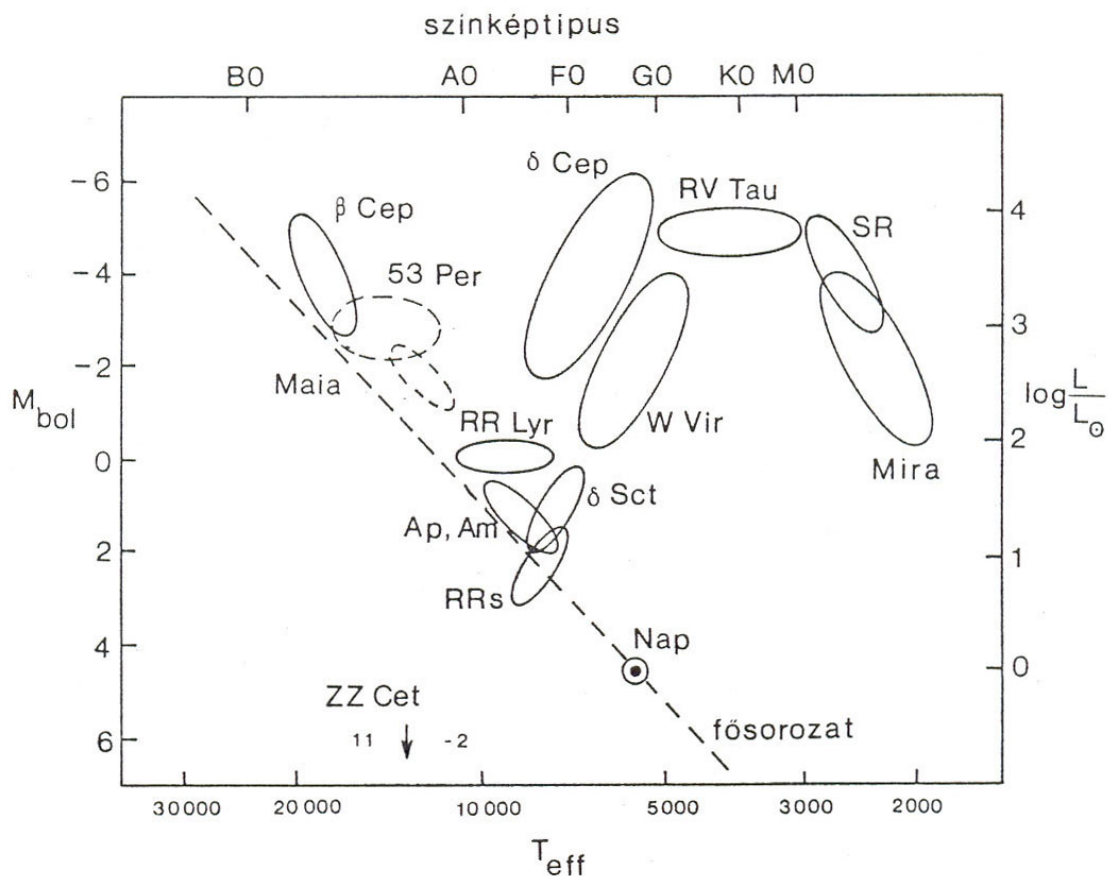
Változásuk fizikai értelmezését tekintve hat főbb osztályba sorolhatjuk a csillagokat (GCVS, 1985):

- pulzáló változók,
- fedési változók,
- rotáló változók,
- eruptív változók,
- katalizmikus változók,
- röntgenforrások.

Változatosságukat jellemzi, hogy számos alosztályt lehet megkülönböztetni, és az osztályok között átfedések lehetnek. Az egyes csillag-csoportokhoz általában jellegzetes fénygörbék rendelhetők, ez alkalmat adott az osztályozásnak egy olyan formájára, amely szinte kizárólag a fénygörbék alakján alapul (pl. a félszabályos csillagok esetében).

Vizsgálataim főként a pulzáló változócsillagokra (delta Scuti és félszabályos típusokra és néhány fedési kettőscsillagra irányultak.

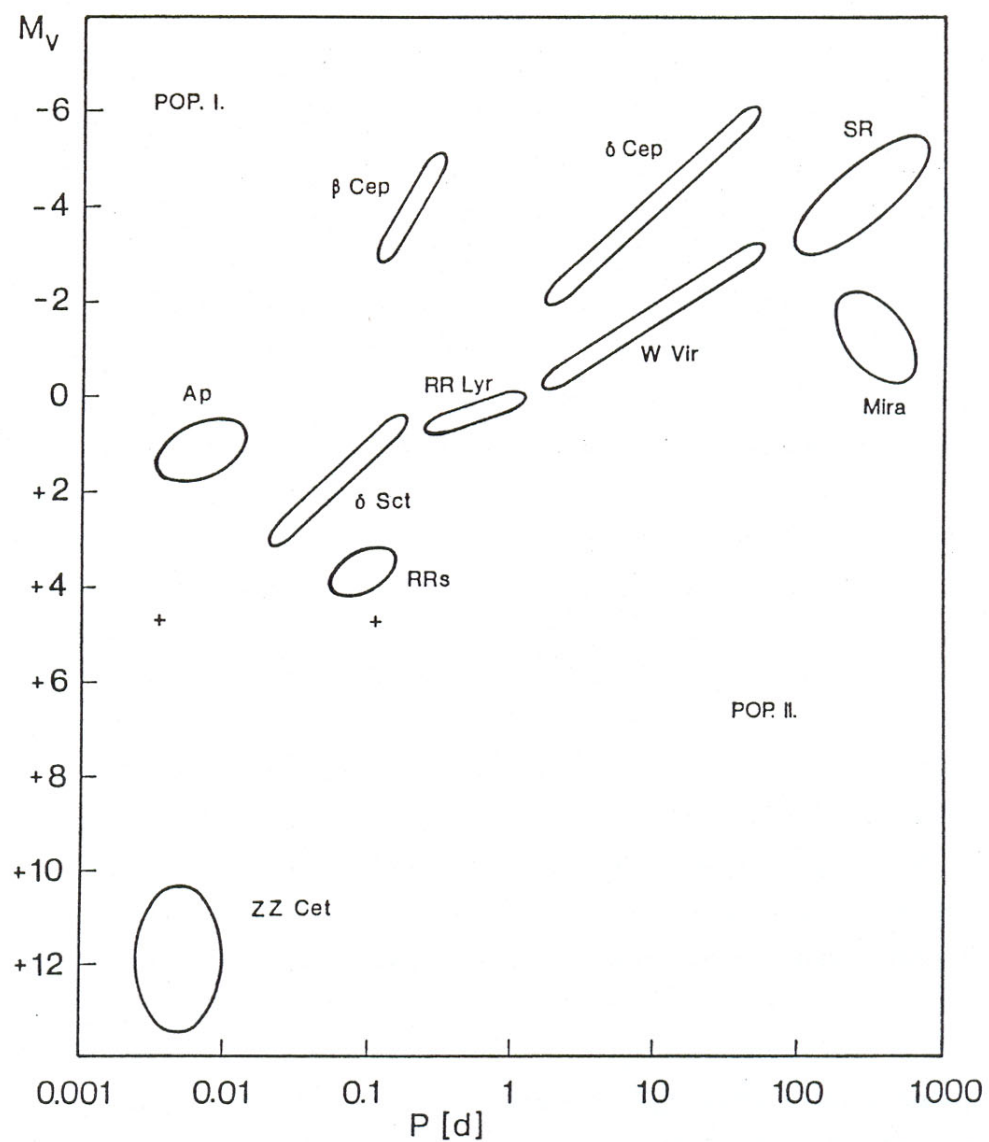
Mint az 1. ábrán látható, a különböző típusú pulzáló változók a HRD-n meghatározott helyen találhatók. Ezért már a pulzáció ténye sokat elárul az adott csillag koráról, szerkezetéről, kémiai összetételéről, stb. Másrészt bizonyos típusú változók, elsősorban a cefeida csillagok esetén jó összefüggés mutatkozik a pulzáció periódusa és az abszolút fényesség között (2. ábra, Szatmáry 1986b; az RRs, ún. törpecefeida csoportot újabban a delta Scuti csillagokhoz soroljuk). Harmadrészt, ha a megfigyelt csillag egyidejűleg több periódussal pulzál, akkor a periódusok arányából megtudhatjuk, hogy a pulzálás során mely módusok gerjesztődtek. A módusazonosítás révén lehetőség nyílik a csillag belső szerkezetének megismerésére.



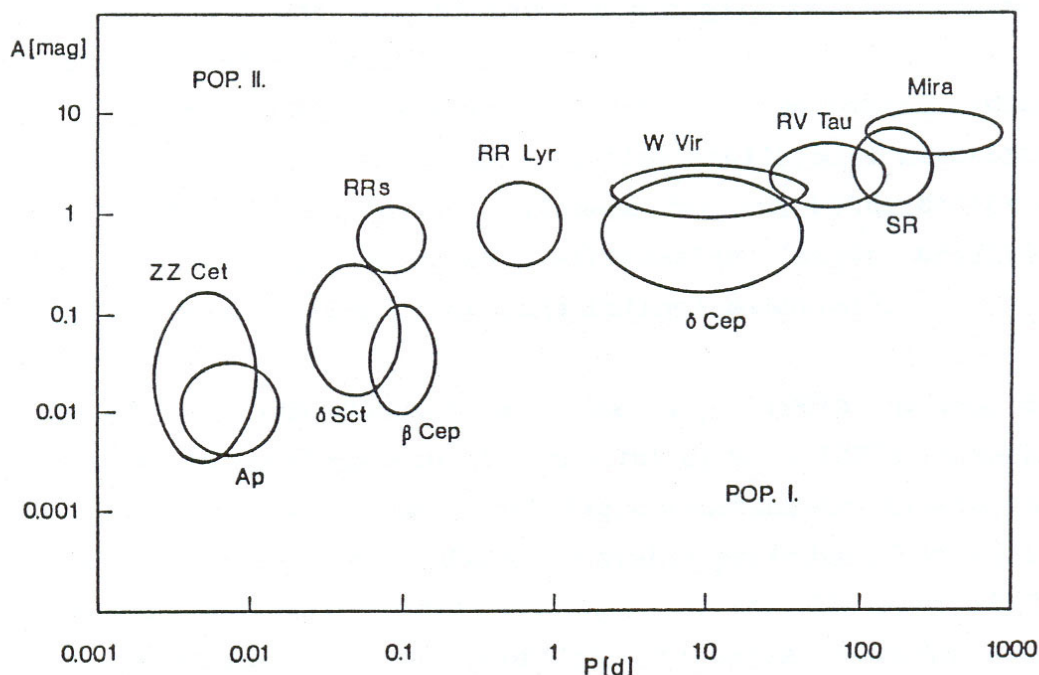
1.ábra: Pulzáló változócsillagok a HRD-n

Számos, igen alapos munka született már a pulzációelméletből. Ezek eredményeinek bemutatása itt nem célunk. Az elméleti vonatkozásokra csak a hosszúperiódusú pulzáló változócsillagok periódusanálízise után térünk ki, akkor is csupán néhány modell alkalmazására szorítkozva.

A pulzáció periódusa és amplitudója rendkívül változatos. A néhány perces, szinte alig kimutatható mértékű oszcillációtól a néhány éves, sok magnitudós fényváltozásig terjed a skála. A periódus és az amplitudó értéke között nagyjából egyenes arány áll fenn (3.ábra).



2. ábra: Periódus-abszolút fényesség kapcsolatok pulzáló változókra.
A keresztek a Nap oszcillációit jelzik.



3. ábra: Periódus-amplitudó kapcsolatok pulzáló változókra.

I.2. Delta Scuti csillagok

A pulzáló változócsillagok egyik jelentős, népes osztálya a rövid periódusú és kis amplitudójú delta Scuti típusú csillagok.

Ezekkel foglalkozott egyetemi doktori dolgozatom (Szatmáry 1987b), különös tekintettel a kettős rendszerekben lévő változókra. Mivel a közelmúltban e csillagokról kandidátusi értekezés született (Paparó 1993), nem térek ki a típus részletes tárgyalására, csak az ilyen csillagokkal kapcsolatos eredményeimet sorolom fel.

A kiválasztott delta Scuti típusú változócsillagok megfigyelését korábban az MTA Csillagászati Kutatóintézete Piskéstetői Observatóriumának 1 m-es RCC és 50 cm-es Cassegrain távcsövével, majd a JATE 40 cm-es Cassegrain távcsövével végeztem Baján, később Szegeden. Utóbbi esetében Starlight1 és SSP-5A fotoelektromos fotométereket használtam UBV szűrőrendszerrel. Az alkalmazott eljárás a szokásos differenciális fotometria volt, összehasonlító és check csillagokkal.

Odesszai tanulmányútjaim alkalmával lehetőségem volt delta Scuti csillagok (kappa2 Bootis és epsilon Cephei) spektroszkópiai vizsgálatára. Színképvonalak méréséből radiális sebességet, ekvivalens szélességet, vonalmélységet és színképosztályt határoztam meg.

A fénygörbék elemzésének egyik legfontosabb célja a fényességváltozás periodicitásának jellemzése. Egyrészt a periódusok értékét, másrészt ezek esetleges időbeli változását kell megbízhatóan kimutatni. Ezután lehet a pulzációelmélet és a csillagfejlődési modellek alapján következtetéseket tenni a vizsgált csillag fizikai felépítéséről, rezgési módusairól.

Mivel a delta Scuti csillagokról készült méréseink időben szétszórta, a periódusokat a standard Fourier analízissel határoztam meg. Az adatsor egyenetlenségeiből származó hatások kiküszöbölésére előfehérítést és a CLEAN módszert alkalmaztam (saját készítésű programcsomag és Breger (1990) programja felhasználásával).

1. Fotoelektromos UBV fotometriai (Szatmáry 1987b és még nem publikált adatok) és spektroszkópiai (Garbuzov et al. 1988) méréseket végeztem a kappa2 Bootis delta Scuti csillagra vonatkozóan. Kimutattam, hogy a csillag fényessége több, időben nem stabil periódussal változik, a színekpvonalak jellemzői pedig egy igen rövid, 11 perc körüli periodicitást mutatnak (a vonalprofilok változása alapján ebben valószínűleg szerepe van a csillag légkörében terjedő lökéshullámoknak).

Újabb spektroszkópiai, vonalprofil-változás vizsgálatok szerint egyidejűleg magas és alacsony rend ($l \sim 12$ és $l \sim 1-2$) nemradiális, p-módusú pulzációt mutat, melyek hasonló periódusa rezonanciára utal (Kennelly et al. 1991). Jones et al. (1992) CCD fotometriai megfigyelések alapján rotációs frekvencia felhasadást tapasztalt a Fourier spektrumban, és meghatározta a csillag több paraméterét.

2. Az iota Bootis delta Scuti-gyanus csillagra elvégzett fotoelektromos BV fotometriai méréseim alapján a fényesség 40 perces, kis amplitudójú oszcillációját határoztam meg, amely alapján arra következtettem, hogy ez a csillag a delta Scuti típusú csillagok egyik legrövidebb periódusú tagja (Szatmáry 1988). Az újabb, 1993. évi méréseink ezt igazolják (Szatmáry, Vinkó and Gál 1994b).

3. A szakirodalom alapján összegyűjtöttem az addig ismert kettős rendszerbeli pulzáló változócsillagokat (Szatmáry 1990b). Az orbitális és a pulzációs periódus aránya alapján, amely a fény-idő effektus következtében fellépő frekvenciamoduláció mélységével arányos, elkészítettem a kettős delta Scuti csillagok listáját. Részletes vizsgálatokat végeztem a pulzáló változócsillagok kettős rendszerben történő keringése következtében fellépő látszólagos periódusváltozással (fényidő-effektus) kapcsolatban (Szatmáry, 1987b, 1990b). Becsléseket tettem az O-C diagramon jelentkező hullám amplitudójára. Az orbitális frekvenciamoduláció a Fourier spektrumban jellegzetes frekvencia felhasadáshoz vezet, amelyet azonban csak nagy modulációs mélység esetén lehet megbízhatóan kimutatni.

Elkészítettük olyan fedési kettőscsillagok listáját, melyek egyik vagy mindkét komponense a színektípus alapján beleesik az instabilitási sávba, így delta Scuti típusú változó lehet.

4. Összeállítottam a delta Scuti csillagok eddig legteljesebb katalógusát (Szatmáry 1993). A listában szereplő 416 csillag között a "biztos" és "gyanus" delta Scuti változókon kívül megtalálhatók a gyorsan oszcilláló Ap (roAp) csillagok és néhány rövid periódusú RRc típusú csillag is. A katalógus alkalmas statisztikai vizsgálatok végzésére, fizikai paraméterek szerinti összehasonlításokra és megfigyelési programok különböző szempontok szerinti tervezésére. A más típusú változókkal foglalkozók számára is hasznos lehet, mivel az összehasonlító csillagok kiválasztásánál elkerülendő a listabeliek használata. A katalógus kezeléséhez interaktív szofver készült (Szatmáry and García 1994), melyet több kutatóhelyről elkértek.

Az epsilon Cephei mérése során kiderült, hogy az A0p színektípusú check csillag (HD 210071) változik. Hasonlót tapasztaltunk az RZ Cas egyik összehasonlító csillagánál (BD +69° 171) is, ami B8 színektípusa miatt is érdekes. Ezeknek a csillagoknak további megfigyelését tervezzük.

I.3. Félszabályos változócsillagok

A félszabályos (szemireguláris, SR) változók késői típusú vörös óriás, vagy szuperóriás csillagok. Elhelyezkedésüket a Hertzsprung-Russell diagramon az 1. ábra mutatja. A fényváltozást tekintve heterogén csoportot alkotnak, vannak közöttük a mira csillagokhoz hasonló fénygörbéjű, de kisebb amplitúdójú csillagok és meglehetősen szabálytalan fényváltozást mutató objektumok is. Ezért a Változócsillagok Általános Katalógusa (GCVS, 1985) a szemireguláris változók négy altípusát különbözteti meg, elsősorban a mutatott fényváltozás jellegzetességei alapján.

SR: Késői típusú óriás, vagy szuperóriás csillagok, melyek egy vagy több periódussal pulzálnak. A pulzációt időnként szabálytalan fényváltozású szakaszok szakítják meg. A periódus 20-tól 2000 napig terjedhet, a fénygörbe alakja ciklusonként változhat. Jellemző amplitúdó néhány századtól néhány magnitúdóig (általában 1-2 magn.).

SRa: Késői (M, C, S) színképosztályú csillagok. Tartós periodicitást mutatnak rendszerint 1-2 magnitúdós amplitúdóval. Az amplitúdó és a fénygörbe alakja gyakran változik. A csoport egyik jellegzetes képviselője a V CVn. Sok ide sorolt csillag csak a kisebb amplitúdóban különbözik a miráktól.

SRb: Ezek a változók vagy gyenge, de jellemző periódus szerint pulzálnak, vagy felváltva mutatnak periodicitást és lassú szabálytalan fényváltozást. Számos esetben figyelhető meg több periódus jelenléte. A fényváltozás amplitúdója általában 1-2 magnitúdó (pl. AF Cyg).

SRc: Késői típusú szuperóriások. Az amplitúdó 1 magn. körüli, több periódus egyidejű jelenléte figyelhető meg (pl. Y Lyn).

SRd: F, G, vagy K típusú óriás vagy szuperóriás csillagok. Gyakori a többszörös periodicitás (30 - 1100 nap). Színképükben időnként emissziós vonalak figyelhetők meg. Amplitúdójuk 0,1 – 4 magnitúdó. A csoport egyik jellegzetes képviselője az UU Her.

Ezen típusokba tartozó objektumok száma a GCVS alapján:

SR : 1508,

SRa : 847,

SRb : 896,

SRc : 56,

SRd : 78,

A félszabályos változók periódusa széles határok között változhat ($P=20-2000$ nap) a jellemző periódus néhány száz nap körüli. Meg kell jegyezni, hogy egy bizonyos effektív hőmérsékletnél hidegebb csillagok mind fotometriai változók (Marik, 1989).

Elsősorban a hosszú fényváltozási periódus lehet annak az oka, hogy a pulzáló vörös változók az utóbbi években némileg kikerültek az érdeklődés homlokteréből. A század első felében végrehajtott fotografikus programok eredményeképpen nagyon sok félszabályos változócsillagot fedeztek fel és katalogizáltak, később a fotoelektromos technika elterjedésével azonban a rövidebb periódusú és kisebb amplitúdójú csillagok (delta Scuti csillagok, pulzáló fehér törpék, gyorsan oszcilláló Ap csillagok stb.) kutatása került előtérbe. Ezért a szemireguláris csillagok megfigyelése elsősorban az amatőr csillagászok feladata.

Az automata távcsövek használatával talán mind több nagy pontosságú fotoelektromos észlelés is készül a félszabályos változókról. Az utóbbi években megpróbálták néhány pulzáló óriáscsillag fényváltozásában megfigyelhető szabálytalanságok (pl. módusváltás) értelmezését (Cadmus et al. 1991), és az esetleges

káosz kimutatását (pl. Kolláth 1989, 1990). Az ilyen vizsgálatokhoz pedig pontos, jól mintavételezett megfigyelési adatsorokra van szükség.

Tíz éve foglalkozom a mira és SR csillagok fénygörbéjének elemzésével. Az általában 10-20 év hosszúságú adatsorokat a magyar Pleione Változócsillag-észlelő Hálózat (PVH), mely újabban a Magyar Csillagászati Egyesület Változócsillag Szakcsoportja (MCSE VCsSz), és az Association Francaise des Observateurs d' Etoiles Variables (AFOEV) bocsátotta rendelkezésemre. Sajnos az American Association of Variable Star Observers (AAVSO) adataihoz többszöri kérés - és bár tagja vagyok - ellenére sem sikerült hozzájutnom. Pedig náluk vannak a leghosszabb adatsorok.

A vizuális megfigyelések korlátozott pontossága ellenére a fénygörbék periodicitásának vizsgálatából értékelhető eredmények születhetnek. A feldolgozások megjelentek a Meteor című folyóiratban (20 cikk, ld. irodalomjegyzék), és néhány csillag esetében angolul is (Szatmáry et al. 1985, Szatmáry 1986a, Mizser et al. 1990, Szatmáry and Vinkó 1992, Szatmáry and Gál 1992, Gál and Szatmáry 1993c).

I.4. Fedési kettős és pulzáló csillagok O-C diagramja

A periódusváltozás kimutatásának egyik eszköze lehet az ún. O-C diagram (pl. Willson, 1986). Az eljárás lényege, hogy a periódus ismeretében valamely kezdő időponttól kezdve kiszámoljuk a maximumok (minimumok) idejét és összevetjük a megfigyelt értékekkel (O-C: observed-calculated). A módszer korlátja, hogy csak olyan csillagokra alkalmazható, melyeknél a periódusváltozás ciklusról ciklusra kicsi (cefeidák, fedési kettőscsillagok), mert a megfigyelési körülmények és a változócsillagok nagy száma miatt általában nincs módunk egy csillag fényváltozását periódusról periódusra végigkövetni. Ezenkívül az O-C diagramok nem képesek számot adni a rezgés fázisában bekövetkező esetleges változásról sem.

Újabban több publikációban felhívták a figyelmet arra, hogy az O-C diagramból a periódusváltozásra hamis következtetéseket tehetünk, amennyiben a fénygörbe ciklushossza jelentősen változik (Koen and Lombard 1993, Lombard and Koen 1993, Lombard 1993). Erre vonatkozó vizsgálataim szerint az O-C diagram megfelelő körülményekkel mégis jól használható, a finomabb periódusváltozások kimutatására is alkalmas, míg a peak-to-peak ciklushossz ábrázolása nem ilyen informatív.

Elkészítettem az O-C görbéjét számos mira és SR csillagnak (Szatmáry 1986a, Szatmáry és Mizser 1986a, Szatmáry 1990a). Ezeknél a csillagoknál jelentős mértékű periódusváltozások fordulnak elő, legtöbbször szabálytalan (ARMA folyamathoz hasonló) módon.

Az eddig publikált összes minimum időpont és saját BV fotometriai méréseink alapján megvizsgáltuk néhány fedési kettőscsillag O-C diagramját. Az RZ Cas esetében (Hegedüs, Szatmáry and Vinkó 1992) a periódusváltozás a kettőssel rendszert alkotó további komponensek létrejöttét utalt, amennyiben feltettük, hogy az O-C hullámainak a fényidő-effektus okozza (pl. Szatmáry 1987b, Hajdú 1988).

A VW Cep (Vinkó, Gál, Szatmáry and Kiss 1993, Szatmáry et al. 1994) W UMa típusú, kontakt rendszer, ezért a periódusváltozást a csillagok közötti anyagátáramlás befolyásolhatja. Eddig egyedülálló példa arra, hogy az asztrometriai úton kimutatott (Hershey 1975, Heintz 1993) harmadik komponens hatását megtaláljuk az O-C diagramon. A kétféle módszerrel kapott pályaelemek hasonlóak.

Elemeztük az AU Peg II populációs cefeida rendkívül gyors periódusváltozását (Vinkó, Szabados and Szatmáry 1993). Ez a csillag azért is érdekes, mert rövid periódusú spektroszkópiai kettős. Az időben szétszórt fotoelektromos adatsorok Fourier analíziséből

aktuális periódusokat határoztam meg. A fázis-diagramok szórásának vizsgálatából valószínűvé vált a csillag szokatlanul gyors periódusváltozása mellett egy hirtelen törés is a ciklus hosszában.

II. Periódus meghatározó módszerek

A periódus meghatározási eljárásokról rövid áttekintést adunk, utalva a számos, a szakirodalomban a közelmúltban megjelent összefoglaló dolgozatra (pl. Fullerton 1986, Cuypers 1987, Cuypers 1992, Cuypers 1993).

Nagyon sok csillagnak van valamilyen időben változó tulajdonsága. Legtöbbször a fényesség, a radiális sebesség vagy a spektrum jellemzői (pl. színképvonal profil) változnak. Ezek alapján osztályozzák a csillagokat, és a változások okának felderítése után lehetővé válik fizikai paramétereik meghatározása, szerkezetük és fejlődésük tanulmányozása.

Az időben változó adatokat gyakorlatilag soha nem tudjuk folyamatosan nyomon követni. A megfigyelési adatsorok csak igen ritkán egyenletesen mintavételezettek (talán csak az újabban munkába állt automata távcsöveknél, ott is csak 1-1 éjszakán belül). Sokszor a változócsillagok adataiban szezonális ürök vannak, mivel a láthatóságuk egy megfigyelőhelyről egy év során eltérő lehet. Megemlítendő a távcsőidőhöz jutás gyakran nem egyenletes volta, és a Hold fázisainak (telihold időszaka nem kívánatos) hatása. Végül a legfontosabb: az időjárás szinte jósolhatatlan, az ég derültsége, nyugodtsága, páratartalma miatt gyakorlatilag adatsoraink tele vannak különféle hosszúságú ürökkel. (Az angol nyelvű szakirodalom több szinonim kifejezést is használ az egyenetlen adatsorozatra: irregularly measured, unequally spaced, unevenly sampled, unequidistant, nonequidistant time series.)

Ugyanakkor az is igaz, hogy a nagyon szabályosan eloszló ürök igen erős "aliasing" problémát okoznak, azaz sok nagy amplitudójú hamis csúcs jelenik meg a frekvencia spektrumban. A tapasztalat szerint a közel egyenletesen megszakított adatsoroknál fellépő "pseudo-aliasing" (Scargle, 1982) igen megnehezíti a valódi periódus kiszűrését.

Mivel a mért adatokból való következtetésekhez alapvetően szükséges a periodicitás ismerete, nem véletlenül született óriási irodalma az idősorok analízisének. A csillagászat mellett sok más tudományág is igényli e módszereket (pl. geofizika, meteorológia, akusztika, biológia, orvostudomány), de úgy látom, hogy egymás szakirodalmát nem ismerve, minden területen saját erőfeszítések történnek, sokszor párhuzamosan. Az asztrofizikában nem laboratóriumi méréseket végzünk, láttuk, hogy mennyi minden szétszaggathatja az adatsort, ezért a kényszerűség miatt is a periódusanalízis tekintetében vezető szerepet játszik a csillagászat.

A változócsillagokat kutató csillagászok a lehető legpontosabban szeretnék meghatározni a periódusokat. Ez alapfeltétele annak, hogy a periódusok hosszútávú változását vizsgálhassák. Fontos mindig megbecsülni a változási ciklus értékének hibáját is. Igen lényeges a többszörös periodicitás kimutatása is, különösen a pulzáló változóknál, ugyanis ekkor a modellek alapján biztosabb lehet a módusok azonosítása.

A változócsillagok periódusa tág határok között mozoghat. Előfordul néhány perces (ZZ Ceti és roAp típus) és néhány ezer napos (Mira és SR típus) változási ciklushossz is. Az amplitudó szintén igen változatos lehet, a megfigyelhetőség határán lévő néhány ezred magnitúdótól a több magnitúdós értékig. Ha a jel/zaj viszony kicsi, különösen fontos a megbízható periódusmeghatározási módszer megtalálása és alkalmazása.

A legkisebb négyzetek módszere

Régebben a változócsillagok periódusát, főleg a hosszúperiódusú pulzálókéét, a legkisebb négyzetek módszerével keresték, lerögzítve a valahol a fázis értékét (pl. a maximumban). A többszörös periodicitást és a periódusváltozást ez az eljárás nem tudta kezelni. Az itt fellépő hibákat már 1934-ben (!) Sterne közölte, csak éppen feledésbe merült (tanulság: "márkás" folyóiratokban kell publikálni).

Autokorreláció és Maximum Entrópia Módszer (MEM)

Ezeket a módszereket aránylag ritkán használják a változócsillagok esetében, mivel ekvidisztans adatsort igényelnek. Ha az űrök csak rövidek (a periódusnál kisebbek), interpolációval pótolni lehet a hiányzó adatokat. Azonban ez mégiscsak egy "mesterséges" fénygörbéhez vezet, így sokan nem használják. A MEM aránylag bonyolult algoritmus, sem vonzó, matematikailag messze nem olyan világos, mint pl. a Fourier módszer. Ugyanakkor a MEM spektrum sokkal élesebb csúcsokat szolgáltat, a frekvencia meghatározása pontosabb mint a többi technikánál (pl. Ulrych and Clayton 1976, Percy 1977, Fahlman and Ulrych 1982). Az AF Cygni félszabályos csillag fénygörbéjét részletesen vizsgáltuk MEM és Fourier analízissel (Dani 1988).

Sztringhossz módszer

A "string length method" (Dworetzky 1983) a próbaperiódusokra a fázis-diagram pontjai töröttvonallal való összekötésén alapul, ennek minimalizálásával keresi a valódi fényváltozási periódust. Néhány korábbi, hasonló eljárást ír le: Lafler and Kinman (1965), csak a horizontális eltérésekkel számol Renson (1978).

Fázis Diszperzió Minimalizálás

Az előbbihez hasonló módszer, melynek előnye, hogy érzéketlen az adatsorban általában előforduló űrökre és a fényváltozás aszimmetriájára (szinuszos alaktól való eltérésre). Jurkevich (1971) és Stellingwerf (1978) után több különféle statisztikát definiáltak, melyek minimumhelyei adták a periodicitás komponenseit (pl. Pelt 1980, 1983, 1993).

A következőkben bemutatjuk a fénygörbe analízisben gyakran alkalmazott Fourier transzformáció problémáit arra az esetre nézve, ha a mintavételezés véges időtartamú és diszkrét. Részletezünk egy olyan eljárást (CLEAN), amelynek segítségével helyesen értelmezhetjük a spektrumokat, illetve pontosíthatjuk az abból nyerhető információkat.

II.1. Fourier analízis

A Fourier transzformáció széles körben használatos a periodikus jelek vizsgálatára. A csillagászatban különösen nagy a jelentősége a változócsillagok fénygörbéje periódusainak meghatározásánál.

Legyen a mért időben változó mennyiség, például a csillag fényessége $m(t)$. Sok esetben nem szükséges a fénygörbére az igen általános

$$m(t) = \langle m(t) \rangle + \sum_{n=1}^N A_n(t) \cos [2\pi f_n(t) t + \phi_n(t)] \quad (2.1)$$

alakot feltételezni az indexelt függvények közelítése a mérési adatokból valamiféle optimalizálási eljárással általában rendkívül számításgépes feladat lenne.

Egyszerűbb az analízis, ha a fénygörbe több, egymástól független és stacionárius harmonikus oszcilláció szuperpozíciója:

$$m(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos [2\pi f_n t + \phi_n] \quad (N < \infty). \quad (2.2)$$

Az ismeretlen A_n , f_n , és ϕ_n meghatározásában alapvető jelentősége van a Fourier transzformációnak, melynek definíciója folytonos esetre:

$$FT [m(t)] = F(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i 2\pi f t} dt. \quad (2.3)$$

A (2.2) kifejezés Fourier-transzformáltja analitikusan megadható:

$$F(f) = \sum_{n=1}^N A_n/2 [e^{i\phi_n} \delta(f-f_n) + e^{-i\phi_n} \delta(f+f_n)] . \quad (2.4)$$

Csak a pozitív frekvenciákat tekintve látszik, hogy N számú oszcilláció N helyet jelöl ki a spektrumban.

Egy időben folytonos függvény értékeit azonban csak diszkrét időpontokban ismerhetjük. A mérési időközök még egy megfigyelési sorozatban sem mindig egyenlők. Előfordulhat, hogy egy csillag fényességének mérhetőségére hónapokig kell várni.

A (2.3) diszkrét változatának (DFT, Deeming 1975) kifejezése

$$DFT [m(t)] = D(f) := \sum_{j=1}^N m(t_j) e^{-i 2\pi f t_j}, \quad (2.5)$$

amely nagymértékben függ az adateloszlástól.

$D(f)$ -et találóan *hamis spektrum*nak is nevezik, a továbbiakban ezt igazoljuk.

Vezessük be az

$$s(t) := 1/N \sum_{j=1}^N \delta(t-t_j) \quad (2.6)$$

ún. mintavételező, és az $m_s(t) = m(t) s(t)$ mintavételezett függvényt. Utóbbi az

$$m_s(t) = 1/N \sum_{j=1}^N m(t_j) \delta(t-t_j) \quad (2.7)$$

alakban írható. A spektrálablak

$$W(f) := \text{FT} [s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i 2\pi f t} dt \quad (2.8)$$

definícióját felhasználva felírhatjuk a mintavételezett függvény Fourier transzformáltját:

$$\text{FT} [m_s(t)] = F(f) * W(f), \quad (2.9)$$

amely éppen (2.5)-tel egyezik. Elmondhatjuk tehát, hogy egy $m(t_j)$ $j=1, \dots, N$ adatsor diszkrét Fourier transzformáltja megegyezik az $m(t)$ mintavételezettjének folytonos Fourier transzformáltjával, azaz

$$D(f) = \text{FT} [m_s(t)] = 1/N \sum_{j=1}^N m(t_j) e^{-i 2\pi f t_j}, \quad (2.10)$$

továbbá

$$W(f) = \text{FT} [s(t)] = 1/N \sum_{j=1}^N e^{-i 2\pi f t_j}. \quad (2.11)$$

Az alkalmazott normálási tényezők mellett

$$D(0) = 1/N \sum_{j=1}^N m(t_j) = \langle m(t_j) \rangle \quad \text{és} \quad W(0) = 1.$$

Jelölje T a mintavételezés időtartamát, így $T = t_N - t_1$, és vezessük be a

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t_1 \leq t \leq t_N \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

ún. ablakfüggvényt. Jelöljük $m_h(t)$ -vel azt a függvényt, amely a $[t_1, t_N]$ intervallumon azonos $m(t)$ -vel, másutt zérus, így $m_h(t) = m(t) h(t)$. Ennek a "csonka" függvénynek a Fourier transzformáltja a konvolúciótétel szerint:

$$\text{FT} [m_h(t)] = F(f) * H(f), \quad \text{ahol} \quad (2.12)$$

$$H(f) = \text{FT} [h(t)] = \sin(\pi f T) / (\pi f) e^{-i\pi f(t_1 + t_N)},$$

a spektrál ablak folytonos és véges időtartamú adatsor esetén. A (2.12) konvolúció az $F(f)$ tulajdonságainak keveredését (spektrális áteresztését) eredményezi ott, ahol $H(f)$ számottevő.

A diszkrét mintavételezésből eredő nem zérus frekvenciafelbontás a $W(f)$ ($f=0$ -nál lévő) főcsúcsának szélességével egyezik meg, amely közel azonos a $H(f)$ főcsúcsának szélességével, feltéve ha a mintavételezés nem túlságosan egyenetlené így

$$\delta f \approx 1/T.$$

Ha a mintavételezés állandó Δt időközönként történt, azaz $(m(t_j))_{j=1,\dots,N} = (m(j \Delta t))_{j=-n,\dots,n-1}$ és $N=2n$, akkor a Fourier-sorok elméletéből kézenfekvő az

$$m'(t) := \sum_{s=-n}^{n-1} F_s e^{i2\pi s t - N\Delta t} \quad (-\infty \leq t \leq \infty)$$

felbontás az $m'(t_j) = m(t_j)$ ($j=1,\dots,N$) feltételek mellett. Ez az

$$F_s = 1/N \sum_{j=-n}^{n-1} m_j e^{-i2\pi s j/N}, \quad (s=-n,\dots,n-1)$$

kapcsolatot jelenti F_s és m_j között, továbbá érvényes a Parseval-formula:

$$1/N \sum_{j=-n}^{n-1} |m_j|^2 = \sum_{s=-n}^{n-1} |F_s|^2.$$

Most csak az

$$f_s := s / N\Delta t \quad (s=-n,\dots,n-1)$$

frekvenciák jöhetnek szóba. Egyenközü adatsor esetén a mintavételezés elméletéből következik (Roberts et al. 1987), hogy azt a függvényt, melynek Fourier transzformáltja zérus minden $|f| \geq f_N$ helyen, teljesen meghatározzák az egyenlő, de bizonyos $1/2f_N$ -nél nem hosszabb intervallumokon felvett értékei. A maximális frekvencia, amelyet meg lehet határozni a Δt mintavételezési időközből, az ún. Nyquist-frekvencia:

$$f_N = 1 / 2\Delta t. \quad (2.13)$$

Nem egyenközü adateloszlás esetén a maximális frekvenciáról a mintavételezés elmélete nem mond semmit. Ha az adatsor egyenközü de hiányoznak mérési pontok, az

elmélet szerint az adatok olyan függvényt határoznak meg, amelynek Fourier transzformáltja zérus minden

$$|f| > 1/2 \Delta t_{\max}$$

helyen, ha $\Delta t_{\max}$ a legnagyobb időköz. Az ennél kisebb időközök biztosan hordoznak információt az $1/2 \Delta t_{\max}$ -nál nagyobb frekvenciákon, valamennyi információ az $1/2 \Delta t_{\min}$ körül is található, ha $\Delta t_{\min}$ a legkisebb időköz. A spektrumot tehát az $1/2 \Delta t_{\min}$ frekvencia felett nagyon óvatosan kell vizsgálni (e problémára még visszatérünk).

A mérési hiba szerepe

Az előzők mellett figyelembe kell venni a mérés hibáját is, amely egy sztochasztikus hibatag Fourier transzformáltjaként jelentkezik a spektrumban, így a reális spektrum:

$$D_R(f) = D(f) + \text{DFT}[n(t)] , \quad (2.14)$$

ahol $n(t)$ az $m(t)$ mérési hibája a t időpontban. Legyen $n(t)$ normális eloszlású, σ szórással. Egy közelítést felhasználva kapjuk a mérési hiba hatását a spektrumra (pl. Tápai 1991):

$$M\{| \text{Re DFT}[n(t)] | \} = M\{| \text{Im DFT}[n(t)] | \} = \sigma / \sqrt{2\pi} N , \quad (2.15)$$

ahol $M(\dots)$ a várható értéket jelöli.

A tapasztalat szerint a mérésből származó spektrumhiba nem számottevő a spektrumokban gyakran megfigyelhető "fü" mellett. Az Y Lyncis vizsgálatakor (Szatmáry and Vinkó 1992) a fénygörbéhez különféle mértékű fehér zajt adtunk. A tapasztalatok szerint még az igen kicsi jel/zaj viszony esetén is a spektrum jellemző csúcsai ugyanolyanok maradtak, a mesterséges magnitúdóbeli hiba csak a nagyobb frekvenciáknál okozott eltéréseket a spektrumban (ott sem a "füvet" emelte meg, inkább annak mintáját változtatta meg).

A Fourier analízis gyakorlati megvalósítása

Feladat az időből a frekvencia tartományba való átalakítás, a

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-i 2\pi f t} dt \quad (2.16)$$

komplex Fourier transzformáció megvalósítása.

Mivel a gyakorlatban az adatsor hossza véges, és időben diszkrét méréseket tartalmaz, a Diszkrét Fourier Transzformáció (DFT) használatos (pl. Deeming 1975):

$$N$$

$$F(f) = \sum_{j=1}^N m(t_j) e^{-i 2\pi f t_j} . \quad (2.17)$$

Az f frekvenciához tartozó amplitudó kiszámítása az

$$A(f) = \left[\left(\frac{1}{N} C_f \right)^2 + \left(\frac{1}{N} S_f \right)^2 \right]^{1/2} , \quad (2.18)$$

kifejezéssel történik, ahol N az adatsor pontjainak száma, és

$$C_f = \sum_{j=1}^N m(t_j) \cos(2\pi f t_j), \quad S_f = \sum_{j=1}^N m(t_j) \sin(2\pi f t_j). \quad (2.19)$$

A fázist a

$$\phi = \arctan(-S_f/C_f) \quad (2.20)$$

kifejezés adja meg. Sajnos általában a fázis meghatározásának nagy a hibája, sokszor eléri a tízed radiánt. Gyakori megoldás, hogy a DFT-vel kapott frekvenciával legkisebb négyzetes illesztést végzünk, és ebből határozzuk meg a fázist (pl. Breger 1990).

Az adateloszlásra jellemző spektrál ablak függvény kiszámítása a

$$W(f) = \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos(2\pi f t_j) \right]^2 + \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f t_j) \right]^2 \quad (2.21)$$

kifejezéssel történik (power spektrum realizációban). A Fourier frekvencia spektrum a Nyquist-frekvenciára periodikusan ismétlődik (pl. Kurtz 1983), így a

$$f_N = 1 / 2\Delta t$$

frekvenciánál nagyobb értékek meghatározása elvi akadályokba ütközik. Ugyanakkor, ha a mintavételezés nem egyenletes időközű, a Nyquist-határ kitolódik, $1/2\Delta t_{\min}$ értéknél nagyobb lesz (Kolláth Zoltán végzett erre vonatkozó vizsgálatokat).

A Fourier analízisnek rendkívül nagy irodalma van, még akkor is, ha csak a csillagászati szakfolyóiratokra szorítkozunk. Több algoritmust közöltek a DFT kiszámítására (Deeming 1975, Scargle 1982, Kurtz 1985, Szatmáry 1986).

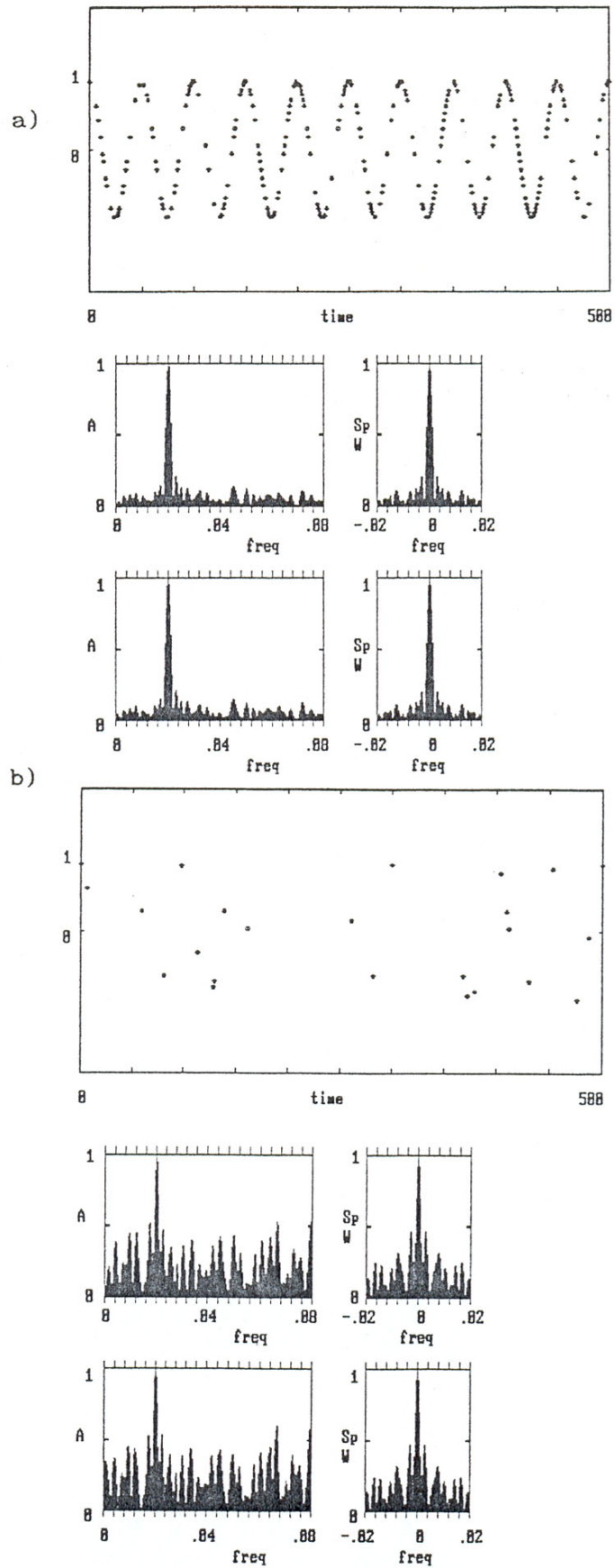
Sokan vizsgálták a Fourier módszer és más periódusmeghatározási eljárás kapcsolatát, matematikai hasonlatosságát (Pérez de la Blanca and Garrido 1981, Heck et al. 1985, Swingler 1985, Swingler 1989, Carbonell et al. 1992).

Külön említést érdemelnek a frekvencia meghatározási pontossága, a szignifikancia szint megadása céljából készült dolgozatok (Kovács 1980, Kovács 1983, Karttunen and Muinonen 1991).

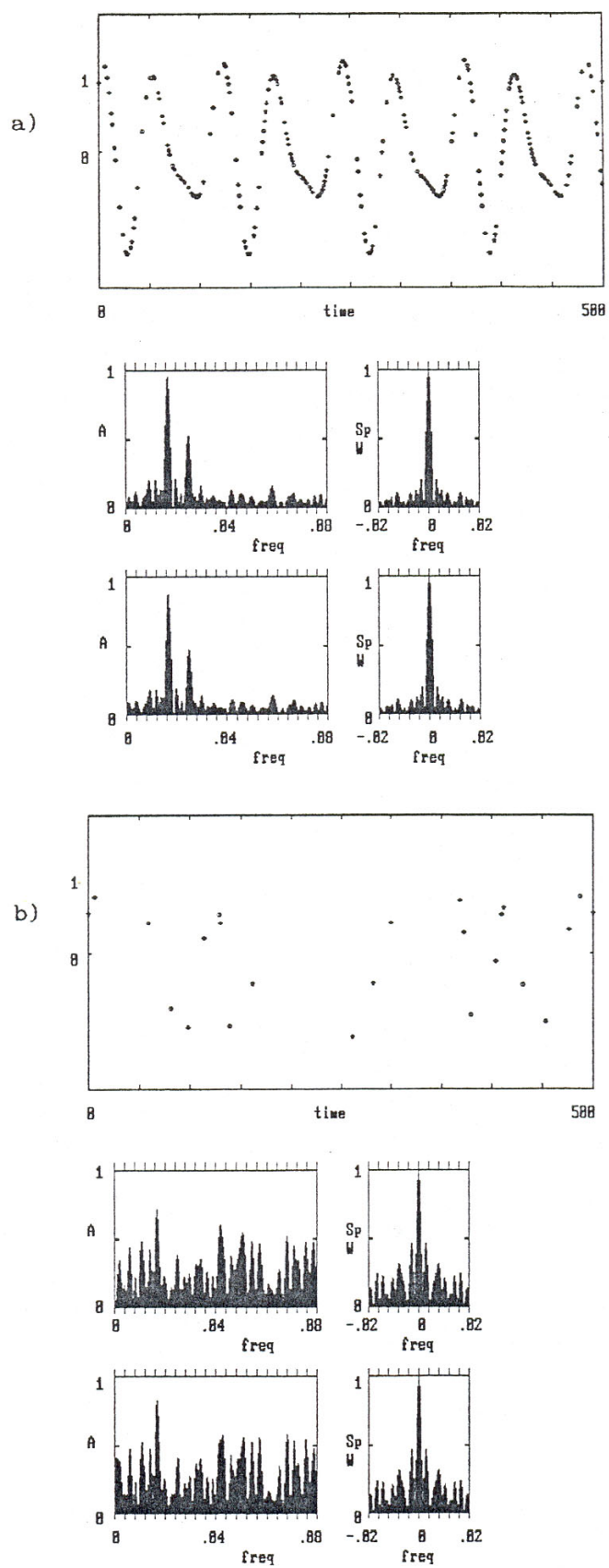
Amennyiben a vizsgált adatsorban nagyon közeli frekvenciák vannak, a Fourier spektrumban nem mindig különülnek el (Loumos and Deeming 1978, Kovács 1981), az összeolvasztott csúcs komponenseinek helyére korrigálni kell. Ezt az AF Cyg példáján alkalmazzuk (Szatmáry és Mizser 1986b).

Ha az adatsorban a mintavételezés igen egyenetlen, akkor a spektrál ablak függvényben - és így a csillag frekvencia spektrumában is - sok mellékcsúcs jelenik meg, megnehezítve a valódi fényváltozást leíró frekvenciák azonosítását. Próbálkoztak már "adatkompenzált", DCDFT eljárást kidolgozni (Ferraz-Mello 1981), de nem nagyon terjedt el. Ha hosszú, szabálytalan ürök vannak az adatsorban, a frekvencia spektrum jelentősen eltérhet a hagyományos DFT-vel kapottól (pl. V441 Her O-C diagramjának elemzése, Bakondi 1987).

A 4. és az 5. ábrán bemutatjuk egy és két módus esetére, hogy a különböző mértékű mintavételezési hiányok mellett milyen a DFT és a DCDFT frekvencia spektruma. A teszt fénygörbe generálása: az $N=500$ ekvidisztans pontból ($t_j = j$, $j=1, \dots, 500$) véletlenszerű kiválasztással kihagyjuk egy részét (hasonló teszt lesz a wavelet analízisnél is). A fénygörbe alatt a DFT, majd alatta a DCDFT spektrum látható a spektrál ablakokkal. Bár az amplitudók egy kissé eltérnek a két módszernél, nincs jelentős különbség köztük, így a DCDFT használatát csak akkor javasoljuk, ha az adatsor még az iménti példáknál is egyenetlenebb, nagyobb ürökkel szabdalt.



4. ábra: Egy szinuszos komponens; $P=50$, $A=1$
a) $N=256$, b) $N=24$



5. ábra: Két szinuszos komponens; $P_1=40$ és $P_2=60$, $A_1=0,5$ és $A_2=1$
a) $N=256$, b) $N=24$

Fehérítés

A gyakorlatban legtöbbször messze nem egyenletes időközű azaz nem ekvidisztans az adatsor. A rövid periódusú változócsillagok esetében még az egy éjszakán belüli mérési pontokat sem sikerül egyforma időnként felvenni, a nappalok miatti üres pedig csak nagy erőfeszítéssel megszervezett és az egész Földre kiterjedő nemzetközi megfigyelési kampányokkal küszöbölhetők ki.

Elterjedt az időtartományban való fehérítés. A mérési adatsor frekvencia spektrumából meghatározott - általában a legnagyobb amplitudójú - komponenssel, melynek ismert a periódusa, amplitúdója és fázisa, az eredeti adatsort fehérítjük egyszerű levonással (prewhitening). E módszernek azonban vannak buktatói. Nem biztos, hogy a legnagyobb amplitudójú csúcs az valódi fényváltozási ciklus, ugyanis nagy mérési zaj, nagy üres és többmódusú oszcilláció esetén a hamis csúcsok felerősödhetnek. Másik probléma a fehérítő szinuszfüggvény fázisának meghatározása. Sajnos ezt az értéket csak kis pontossággal lehet megadni, pedig a fehérítés utáni adatsor jellege igen érzékeny erre.

Az időbeli fehérítést alkalmazza például a sokak által használt PERIOD program (Breger 1990), ha már a fázis ismert.

Az egyenetlen adateloszlást jellemzi a spektrál ablak függvény. Ez "ül rá" minden, valójában Dirac-delta frekvencia komponensre, hiszen a számított spektrum az a valódi spektrum és a spektrál ablak függvény konvolúciója. A frekvencia tartományban történő dekonvolúciót fehérítésnek nevezzük, ez régóta ismert (Gray and Desikachary 1973), de matematikailag körülményes, és sok gépidőt kíván.

A frekvenciatérben fehérít a CLEAN-módszer is (Roberts et al. 1987), amely nagyon hatékonyan kiszűrheti a hamis csúcsokat. Ugyanakkor vigyázni kell vele, mert az eljárás minden dekonvolúció során mindig a maradvány spektrum legmagasabb csúcsát tekinti következő komponensnek.

II.2. A CLEAN-algoritmus

Tekintsünk egy olyan harmonikus fénygörbét, amelynek amplitúdója állandó, fázisa időben lineáris:

$$m(t) = A \cos(2\pi f^* t + \phi), \quad (2.22)$$

így ennek spektruma:

$$F(f) = a \delta(f-f^*) + a^* \delta(f+f^*), \quad a = A/2 e^{i\phi}. \quad (2.23)$$

A hamis spektrum, amely egy véges időtartamú diszkrét adatsorból számítható:

$$D(f) = a W(f-f^*) + a^* W(f+f^*). \quad (2.24)$$

A spektrál ablak egy ($f=0$ -nál lévő) centrális csúcsból áll, továbbá másodlagos oldalcsúcsokból, amelyek a főcsúcsból elkülönültek.

A hamis spektrum két valódi ($\pm f^*$) és több hamis csúcsból áll. Ezek a hamis csúcsok megnehezítik a spektrum értelmezését.

A hamis spektrum (2.24) szerint f^* -nél felveszi a

$$D(f) = a W(0) + a^* W(2f)$$

értéket. Mivel $m(t)$ valós, ezért

$$D(-f) = D^*(f), \text{ ill. } W(-f) = W^*(f),$$

és így

$$a = \frac{D(f) - D^*(f)W(2f)}{1 - |W(2f)|} \quad (2.25)$$

Az oldalcsúcsok hatása miatt azonban a -t nem tudjuk pontosan meghatározni a hamis spektrumból, ugyanis nem feltétlenül f^* -nél van $|D(f)|$ -nek maximuma. Azonban ha bevezetjük (2.25) mintájára az

$$\alpha(D; f) = \frac{D(f) - D^*(f)W(2f)}{1 - |W(2f)|} \quad (2.26)$$

függvényt, akkor $a \approx \alpha(D; f^*)$, ha $|f^* - f| < \delta f$, ahol f^* a maximum helye.

A kérdés az, hogy milyen módon küszöbölhetők ki a spektrál ablak oldalcsúcsai és azoknak a hatása a spektrumra.

A CLEAN-algoritmus alapgondolata a következő. Keressük meg a $|D(f)|$ spektrum totális maximumhelyét. Ez minden bizonnyal valódi csúcs helye. (Bár vannak olyan esetek, amelyeknél hamis csúcs a legmagasabb, a gyakorlatban ezek a szerencsétlen véletlenek" nem számottevőek.) A hozzá rendelhető spektrális komponens amplitúdóját (2.26)-ból jól becsülhetjük. Mivel ez becslés úgy az amplitúdóra, mint a frekvenciára és fázisra, ezért az amplitúdónak csak egy töredékét tekintjük, és az ezzel (2.24) mintájára képzett részspektrumot vonjuk ki a hamis spektrumból; a kivonandót, mint "spektrálisan tiszta" komponensrészt pedig gyűjtsük össze. Olyan spektrumot kapunk ezáltal, amelynek valódi csúcsai kevésbé terheltek az oldalcsúcsok okozta hibával, így az eljárást ismételve valamiféle megállási feltétel teljesüléséig, pontosabban kapjuk meg az egyes spektrális komponensek paramétereit.

Miután a tiszta komponenseket meghatároztuk, azokat ne a spektrálablakkal, hanem egy $B(f)$ ún. "clean beam" függvényvel konvoláljuk (B valós Gauss-görbe, amely illeszkedik $|W|$ centrális csúcsára).

Ehhez a konvolúcióhoz még vegyük hozzá az utolsó maradékspektrumot, megalkotva ezzel a tiszta spektrumot.

Az eljárás formulákkal és az $X_j \equiv X(f_j)$ konvencióval:

$$a, \quad D_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (m_j - \langle m_j \rangle) \exp \left[-i 2\pi f_k (t_j - \langle t_j \rangle) \right], \quad k = -m, \dots, m;$$

$$b, \quad W_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp \left[-i 2\pi f_k (t_j - \langle t_j \rangle) \right], \quad k = -2m, \dots, 2m;$$

(az átlagértékek kivonása azért célszerű mert így lehet B -t valósként felvenni)

c, $R_k^0 \equiv D_k$, $k = -m, \dots, m$; $i=1$; (i. iteráció)

d, $a^1 := \alpha(R^{i-1}; f_{I(i)})$, ahol $|R_{I(i)}^{i-1}| = \max_k |R_k^{i-1}|$;

e, $R_k^i = R_k^{i-1} - g(a^i W_{k-I(i)} + (a^i)^* W_{k+I(i)})$, $k = -m, \dots, m$;

f, $C_{+I(i)}^i = C_{+I(i)}^{i-1} + g a^i$, ill. $C_{-I(i)}^i = C_{-I(i)}^{i-1} + g (a^i)^*$,
 $(C_k^0 = 0, k = -m, \dots, m)$;

g, ha a megállási feltételek nem teljesülnek, akkor $i \rightarrow i + 1$ és vissza d,-hez

h, Gauss-görbe illesztése az ablakfüggvényre (a félszélesség alapján):

$$W_k \Rightarrow B_k, \quad k = -2m, \dots, 2m;$$

i, a tiszta spektrum előállítása az L. iteráció után:

$$S_k = \sum_{n=-m}^m C_n^L B_{k-n} + R_k^L, \quad k = -m, \dots, m.$$

A megállási feltételek a következők lehetnek:

- a, A mérési hiba spektruma összemérhető a maradékspektrummal az utóbbi maximumhelyén.
- b, A tiszta komponensek nem növekszenek lényegesen.
- c, A (g növekményparaméter) $\times$ (a tiszta komponensek száma) összemérhető $(2m+1)$ -gyel.
- d, A számolási pontatlanság jelentős zajt okozott a spektrumban.
- e, Az iterációk száma elért egy előre adott észszerű értéket, vagy a számolásra szánt idő letelt.

A g növekményparaméter megválasztásában a következő szempontok játszanak szerepet:

- ha túl nagy értéket választunk, akkor nagy lesz a tévedés valószínűsége a tiszta komponensek paramétereire vonatkozóan.

- ha túl kicsi a g , az iterációk szükséges száma nagy, és a számolási pontatlanságból eredően jelentősen torzulhatnak a spektrumok ("füvesedés"). Tipikus érték: 0,5.

Alkalmazás

Mivel fő célom a wavelet analízis elemzése és alkalmazása, az értekezésben csak utalok a CLEAN-módszerrel végzett vizsgálatainkra.

Az általunk fejlesztett program mind az a - e , feltételek megadását, mind pedig g helyes megválasztását lehetővé teszi. Segítségével elkészítettük az SZ Lyn és az Y Lyn fénygörbéjének tiszta spektrumát, és összehasonlításként hamis spektrumokat is feltüntettük (Tápai 1991).

Az SZ Lyn monoperiodikusan pulzáló törpecefeida csillag (Szeidl 1983, Soliman et al. 1986), de a fénygörbe mérési pontjainak eloszlása miatt a spektrum tele van hamis csúcsokkal (Szatmáry 1987b).

Többszörösen periodikus az Y Lyn félszabályos (SRc) változócsillag fénygörbéje, az adateloszlás viszont nem okoz jelentősebb hamis csúcsokat - a CLEAN-eljárás a három komponens közül egyet sem tüntet el (Szatmáry and Vinkó 1992).

Fontos, hogy hamis csúcs akkor is keletkezhet, amikor egy valódi csúcs tükörképe és a spektrál ablak oldalcsúcsai konvolválódnak egymással. A negatív frekvencia tartományból áttükröződő hamis csúcsok sokszor téves következtetésekhez vezethetnek. Az ilyen "tükröződések" eredményeit nagyon hatékonyan mutatja ki a CLEAN-eljárás.

A módszer akkor nem alkalmazható eredményesen, ha hamis csúcsok valódi, vagy hamis csúcsokkal esnek egybe. Ilyen esetekben még a legkisebb g paraméterek mellett sem kapunk mindig tiszta spektrumot, a spektrálablak alaposabb vizsgálata szükséges a spektrum helyes értelmezéséhez, amely egyben a CLEAN-módszer tökéletesítését is maga után vonhatja.

A fehérítés (whitening) tehát azt jelenti, hogy a spektrum alapján meghatározott paraméterekkel rendelkező harmonikust leválasztjuk. Ez történhet közvetlenül az eredeti adatsornál (prewhitening), vagy a frekvencia spektrumban az adott rezgéshez tartozó hamis spektrum levonásával - a két módszer egymással ekvivalens a Fourier transzformáció linearitása révén.

A CLEAN-algoritmus tulajdonképpen finomított változata a fehérítés utóbbi módszerének. Bár itt nem vesszük figyelembe azt a tényt, hogy az egymás utáni spektrumok maximumhelyei csak közelítőleg egyeznek a tényleges harmonikus tagok frekvenciáival, a módszer mégis alkalmas hamis csúcsok felfedezésére (Tápai 1991).

CLEAN néven ismert egy képjavító eljárás is, amit főleg a rádiócsillagászatban használnak.

II.3. Wavelet analízis

A Fourier transzformációval lényegében csak a fénygörbe egészére jellemző additív harmonikusokat szemléltethettük. Most egy olyan transzformációval foglalkozunk, amelynek segítségével a periódus, az amplitúdó és a fázis időbeli változását is nyomon követhetjük. Az idő-frekvencia módszereknél egy görbe vagy egy síkbeli eloszlás lokális tulajdonságai is elemezhetők.

Az ún. wavelet transzformáció története hosszú időre nyúlik vissza, de sokáig csak matematikai vizsgálatok tárgya volt (pl. Scargle 1993). Később az akusztikában, a zenében, a geofizikában, a meteorológiában, az orvostudományban használták különféle elnevezésekkel. Például a Föld atmoszférájában terjedő, kozmikus eredetű rádiójelek egy részének (a whistler-eknek) az időbeli frekvenciaváltozását dinamikus (frekvencia-idő-amplitúdó) spektrumok térképeivel tanulmányozták (pl. Szegő 1992).

Manapság tág fogalmat takar a wavelet transzformáció. Egyre több területen használják, sokféle alakban (pl. Daubechies 1992, Chui 1992a, 1992b). Mint a CLEAN és a MEM módszereknél, egyik fő alkalmazás a képfeldolgozás (Meyer 1993). Speciálisan a csillagászatban többször galaxisok térbeli eloszlásának vizsgálatát végezték segítségével (pl. Martinez et al. 1993, Murtagh et al. 1993). A wavelet eljárások egyre gyakoribbak a

turbulenciák és a fraktálok matematikai elemzésénél és a telekommunikáció területén is (Meyer 1993).

A módszer iránt igen érdeklődnek a napfizikusok is. Korábban a "sonagram" nevű idősor darabolásos Fourier módszerrel próbálták a naptevékenységi ciklusok változását vizsgálni (Charvátová and Streátič 1991). Újabban a wavelet transzformáció megjelent a napfoltciklusok periodicitásának analizésénél is (Ochadlick et al. 1993).

A wavelet analízis a változócsillagok fénygörbéjének elemzéséhez csak pár éve van terjedőben. Olyan adatsorokra alkalmazható leginkább, melyekben alig vannak kisebb rök. Eddig pulzáló fehér törpék (Goupil et al. 1990, 1991), egy cefeida (Kolláth and Szeidl 1993) és hosszúperiódusú félszabályos csillagok (Sztarmár and Vinkó 1992, Sztarmár and Gál 1992, Gál, Sztarmár and Vinkó 1993) esetében került felhasználásra.

II.3.1. Matematikai alapok

Egy valós $m(t)$ függvény (általában komplex) $g(t)$ ún. analizáló hullámra vonatkozó wavelet transzformáltján (Grossmann et al. 1989) a következő kétváltozós kifejezést értjük:

$$W(b, a) := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) g^*[(t-b)/a] dt, \quad (2.27)$$

amely a $H = \{ (b, a) \mid a \in \mathbb{R}, a > 0, b \in \mathbb{R} \}$ nyitott félsíkon értelmezhető.

Az (2.27) alakot át lehet írni Fourier transzformáltakra a Parseval-formula alapján:

$$W(b, a) := \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) G^*(af) e^{i2\pi b f} df. \quad (2.28)$$

Legyen

$$c_g := 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 / |f| df < \infty, \quad (2.29)$$

és a $g(t)$ generátorfüggvényről feltesszük, hogy

$$G(0) = 0, \text{ azaz } \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 0,$$

továbbá $G(f)$ differenciálható, akkor a wavelet transzformáció invertálható:

$$m(t) = \frac{1}{c_g} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(b, a) \frac{1}{\sqrt{a}} g[(t-b)/a] / a^2 da db. \quad (2.30)$$

Ha bevezetjük a

$$g^{(b,a)}(t) := 1/\sqrt{a} \ g[(t-b)/a] \quad (2.31)$$

jelölést, akkor (2.27)-et skalárszorzat alakban is felírhatjuk:

$$W(b,a) = \langle g^{(b,a)} | m \rangle. \quad (2.32)$$

A wavelet transzformáció lineáris, továbbá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |m(t)|^2 dt = 1/c_g \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(b,a)|^2 / a^2 da db. \quad (2.33)$$

Ha $m(t)$ mintavételezése egyenlő Δt időközönként történt, akkor a wavelet transzformáció diszkrét alakja (Holschneider et al. 1990):

$$W(k\Delta t, a) = \Delta t / \sqrt{a} \sum_{r=1}^N m(r\Delta t) g^*[(r-k)\Delta t / a] \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2.34)$$

Nemegyenközű adateloszlás esetén egy konkrét realizáció a következő formában történhet (Kolláth 1991):

$$W(\tau, f) = 1/C \sum_{k=1}^N m(t_k) \exp[-i 2\pi f(t_k - \tau)] \exp[-(t_k - \tau)^2 / (\Delta\tau)^2], \quad (2.35)$$

ahol

$$C = \sum_{k=1}^N \exp[-(t_k - \tau)^2 / (\Delta\tau)^2].$$

Az itt szereplő τ a korábbi b változónak, ill. az $1/f$ idő dimenziójú mennyiség az a változónak felel meg. A τ az időbeli eltolás, $\Delta\tau$ pedig a Gauss-ablak félszélességével arányos. A fenti kifejezés szerint az ablak szélessége a frekvenciától független állandó. Általában azonban az ablak szélességet úgy választják meg, hogy megegyezzen a próba-periódussal, azaz $\Delta\tau \approx P = 1/f$.

A (2.35) kifejezésben egy fix τ mellett kiemeljük a $\tau \approx t_k$ időponthoz közeli függvénytulajdonságokat az adateloszlástól és a próba-periódustól függő szélességben, és képezzük a Fourier spektrumot. Amennyiben a t_k -hoz közeli időben az érvényes frekvencia f' , úgy a wavelet transzformált amplitúdója nagy a (t_k, f') pont felett.

Az analízáló hullám, vagy magfüggvény alakja nagyon sokféle lehet, attól függően, hogy a vizsgálandó függvény milyen tulajdonságokkal rendelkezik. A transzformáció - általánosságánál fogva - sok segítséget nyújthat előzetes tájékozódáshoz a legkülönbözőbb változások felismerésében.

II.3.2. Diszkrét Wavelet Transzformáció

Legyen $m(t)$ a csillag fényváltozását leíró függvény. Az f frekvenciához és a τ időeltolási paraméterhez tartozó wavelet transzformáció:

$$W(f, \tau) = \sqrt{f} \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) g^*[f(t-\tau)] dt, \quad (2.36)$$

az ún. Morlet-féle analizáló wavelet egy módosított Gauss-görbe:

$$g^*[f(t-\tau)] = \exp(-icx) \exp(-1/2 x^2), \quad (2.37)$$

ahol $x = f(t-\tau)$ és általában $c=2\pi$ (a c értékének hatását még vizsgálni fogjuk).

A gyakorlatban a DFT-hez hasonlóan bevezethető a Diszkrét Wavelet Transzformáció (DWT), mely szerint az amplitúdó spektrum (Szatmáry and Gál 1992):

$$W(f, \tau) = [f C(f, \tau)^2 + f S(f, \tau)^2]^{1/2}, \quad (2.38)$$

ahol

$$C(f, \tau) = \sum_{j=1}^N m(t_j) \cos(2\pi f(t_j - \tau)) \exp(-1/2 f^2 (t_j - t_0 - \tau)^2), \quad (2.39)$$

$$S(f, \tau) = \sum_{j=1}^N m(t_j) \sin(2\pi f(t_j - \tau)) \exp(-1/2 f^2 (t_j - t_0 - \tau)^2), \quad (2.40)$$

és t_0 az adatsor első eleméhez tartozó idő.

A Gauss-ablak félszélessége a próba-periódussal arányos ($P=1/f$), nem pedig állandó érték, mint a Fourier módszernél. Az ablakot τ értékkel toljuk el az adatsor elejétől a végéig, és minden eltolásra kiszámoljuk a frekvencia spektrumot.

Fontos megjegyezni, hogy a wavelet nem egyszerűen egy adatsor feldarabolásos Fourier módszer! A csúsztatott ablakozás mellett alapvető, hogy az ablak szélessége mindig illeszkedik a keresett periódus hosszához. Ennek következtében a frekvencia spektrumban a csúcsok félszélessége nem egyforma, mint a Fourier analízisnél, hanem a frekvenciával arányosan növekszik. Ez az aszimmetria egyetlen csúcs esetében is jelentkezik, a nagyobb frekvenciájú oldala "laposabb".

II.3.3. Wavelet térkép

A wavelet transzformációval kapott frekvencia-idő-amplitudó adathármasok egy felületként ábrázolhatók, ezt nevezzük wavelet térképnek. Ez azt szemlélteti, hogy a különböző frekvenciájú ill. periódusú fényváltozások mikor és milyen amplitúdóval vannak jelen a fénygörbében.

A wavelet analízishez több programot írtam Turbo Basic nyelven. A fénygörbe alapos szemrevételezése után a vizsgált adatsornak először mindig a Fourier spektrumát számoltam ki, mely alapján tájékozódni lehet a periódusok helyéről, és megválaszthatóak a wavelet analízis paraméterei (időbeli és frekvenciabeli felbontások, lépésközök, határok).

A módszer szemléltetésére a Z UMa SRb típusú csillag példáján keresztül bemutatjuk a wavelet térképet (Sztarmár and Gál, 1992). A 6. ábrán felül a fénygörbe, mellette a teljes adatsor Fourier spektruma látható. A wavelet térképet érdemes többféle nézőpontból ábrázolni. Szerencsére számos szoftver alkalmas arra, hogy a frekvencia-idő-amplitudó adathármasok által alkotott felületet tetszőleges helyzetben kirajzolja. Az általunk használt ilyen program a SURFER nevű volt, melyhez a Basic programból már eleve speciális szerkezet (grid) adatfile készült.

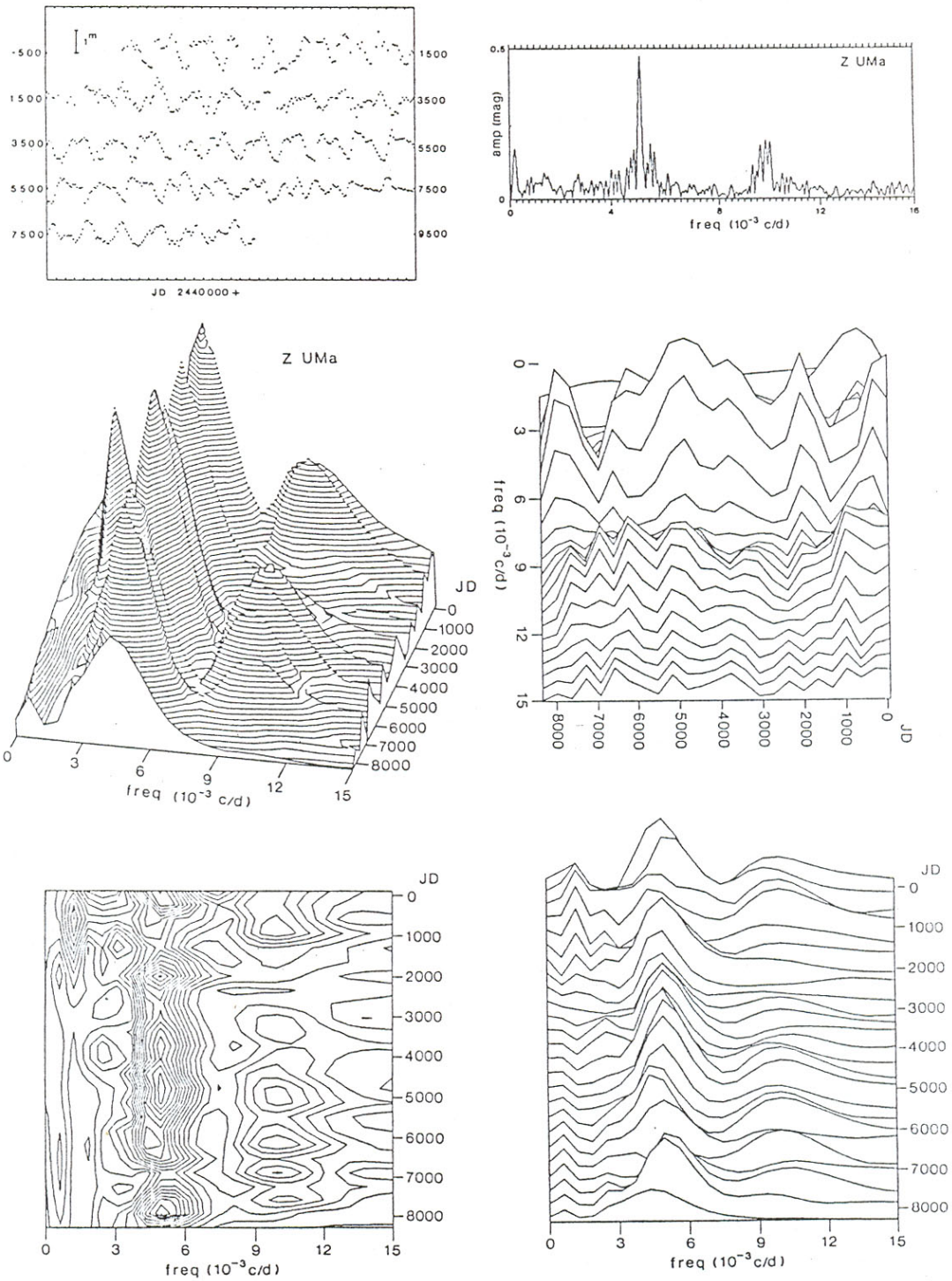
A baloldali középső szintvonalas ábra a perspektivikus térkép, melyen az amplitudó "hegyek és dombok" jól megfigyelhetők. Alatta szerepel ennek felülnézete, amelyen jobban nyomon követhető a csúcsok pozíciója. Ugyanakkor ezen a "topo" térképen néha nehéz megkülönböztetni csúcsokat a gödröktől, ezért vagy színes szintvonalas ábrázolás, vagy tónusos felülnézeti kép készítése célszerű. Az utóbbit úgy valósítottuk meg, hogy a grid file-okból GIF típusú színes vagy szürke árnyalatú képeket generáltunk (az eljáráshoz a programot Kaszás Gábor fizikus hallgató készítette).

A jobboldalon középen lévő ábra azt mutatja, hogy az egyes frekvenciákhoz tartozó amplitúdók hogyan változnak az időben, végül az alatta található ábra a Fourier spektrum időbeli változását tárja elénk.

A cél az, hogy a térképek alapján olyan jelenségeket mutassunk ki (pl. modulációk, fázisugrás, módusváltás), amelyek a hagyományos Fourier módszerrel nem tanulmányozhatók kielégítő részletességgel. Azonban a bemutatott példán látható, hogy a térkép rendkívül bonyolult. A wavelet módszer tulajdonságainak a következőkben szereplő részletes vizsgálata nélkül hamis következtetésekre juthatunk, különösen az amplitudó változására vonatkozóan.

A különféle jelenségeket reprezentáló teszt-adatsorok wavelet térképeinek tulajdonságai mellett alapvető az adatok időbeli eloszlásának hatása az amplitudó szempontjából. Mint ahogyan a Fourier módszernél, itt is tapasztalható, hogy a mintavételezés romlásával az amplitudó spektrum ill. térkép "kicsipkéződik", és sokszor amplitudó-modulációhoz hasonló képhez vezet. Emiatt speciális fehérítő eljárást vezettem be, melynek bemutatására és alkalmazására a változócsillagok konkrét vizsgálatánál kerül sor.

Fontos megjegyezni, hogy a wavelet térképen a fázisértékek nyomon követése is lényeges információt jelent, főleg, ha esetleges kaotikus jelleget szeretnénk kimutatni. Jelen értekezésben erre nem térek ki, de a további tervezett vizsgálatok egyik iránya a fázisok megjelenítésével a wavelet térkép bővítése (ábrázolás-technikailag például színezéssel).



6. ábra: A Z UMa SRb típusú csillag fénygörbéje, Fourier spektruma és wavelet térképe

III. A wavelet analízis tulajdonságainak vizsgálata teszt adatsorokkal

A wavelet analízis használatának fő célja, hogy a fénygörbét leíró paraméterek (periódus, amplitúdó, fázis) esetleges időbeli változását meghatározzuk. Erre más eddigi módszerek nem voltak alkalmasak.

Az előzőekben láthattuk, ha például egy félszabályos pulzáló változócsillag (SR) adatsorának elkészítjük a wavelet térképét, igen bonyolult felületet kapunk. Ahhoz, hogy megfelelően tudjuk az eredményt értelmezni, feltétlenül ismernünk kell a különféle jelenségek hatását a wavelet térképre.

E célból számos, a valós megfigyelési adatsorok mintavételezésében és a csillagok fénygörbéjének menetében gyakori jelenséget modelleztünk. Teszt adatsorokat generáltunk, és vizsgáltuk a wavelet térkép jellegzetességeit. A tesztek készítésénél fő szempont volt a gyakorlat közelítése, a valódi adatsorok szimulálása (Szatmáry and Gál 1992, Gál 1992, Szatmáry, Gál and Vinkó 1993, Szatmáry, Vinkó and Gál 1994).

A wavelet módszer tesztelésekor az alábbi szempontokra kell figyelemmel lennünk: Egyrészt vizsgálandó, hogy maga az eljárás technikailag, pontosabban számítástechnikailag mennyire alkalmazható (szükséges gépidő, elérhető számítási pontosság). Másrészt kérdéses, hogy a csillagászati megfigyelések feldolgozására milyen eredménnyel használható ez az eljárás. Arra ugyanis tekintettel kell lennünk, hogy pl. a légkör állapota és egyéb tényezők miatt általában nincs lehetőség tetszőleges időpontban tetszőleges pontosságú mérés elvégzésére. (Ezen a területen az űrcsillagászat fejlődése hozhat előrelépést.) Az első feltétel, mint majd látni fogjuk, a wavelet térképek minőségére, a második pedig a vizsgálható csillagok körére lesz befolyással.

További szempont volt a teszt-adatsorok kiválasztásánál, hogy olyan jelenségeket modellezzünk, amelyek valójában felléphetnek a csillag pulzációja során, így ezeknek a szabálytalanságoknak a kimutathatóságáról is sokat elárulnak a tesztek eredményei.

A teszt-adatsorok generálásánál tekintettel kellett lennünk a wavelet módszer támasztotta követelményekre (pl. a periódushoz képest hosszú adatsor generálása) és azt is szem előtt kellett tartanunk, hogy több csillagtípusra is alkalmazható legyen az eljárás.

A teszteknel használt időegység tetszőleges, hiszen a gyakorlatban a mintavételezés a fehér törpe és a roAp csillagoknál másodperc nagyságrendű míg a mira csillagoknál akár tíz nap is lehet. A frekvencia mértékegysége a ciklus/időegység. Hasonlóképpen az amplitúdó is tetszőleges egységekben szerepel.

Törekedtünk arra is, hogy amennyiben lehetséges, az analízisnél használt paraméterek (adatsor hossza, mintavételezési időköz, ciklushosszak, amplitúdók) ne nagyon változzanak, hogy mód legyen a wavelet térképek összehasonlítására.

III.1. Tesztek

A teszt adatsorok paraméterei:

A pontok száma: $N=500$

Az idők: $t_i = i$ ($i=1, \dots, 500$)

Időeltolási lépték: $\tau = 10$, az amplitúdó spektrumok száma = 50

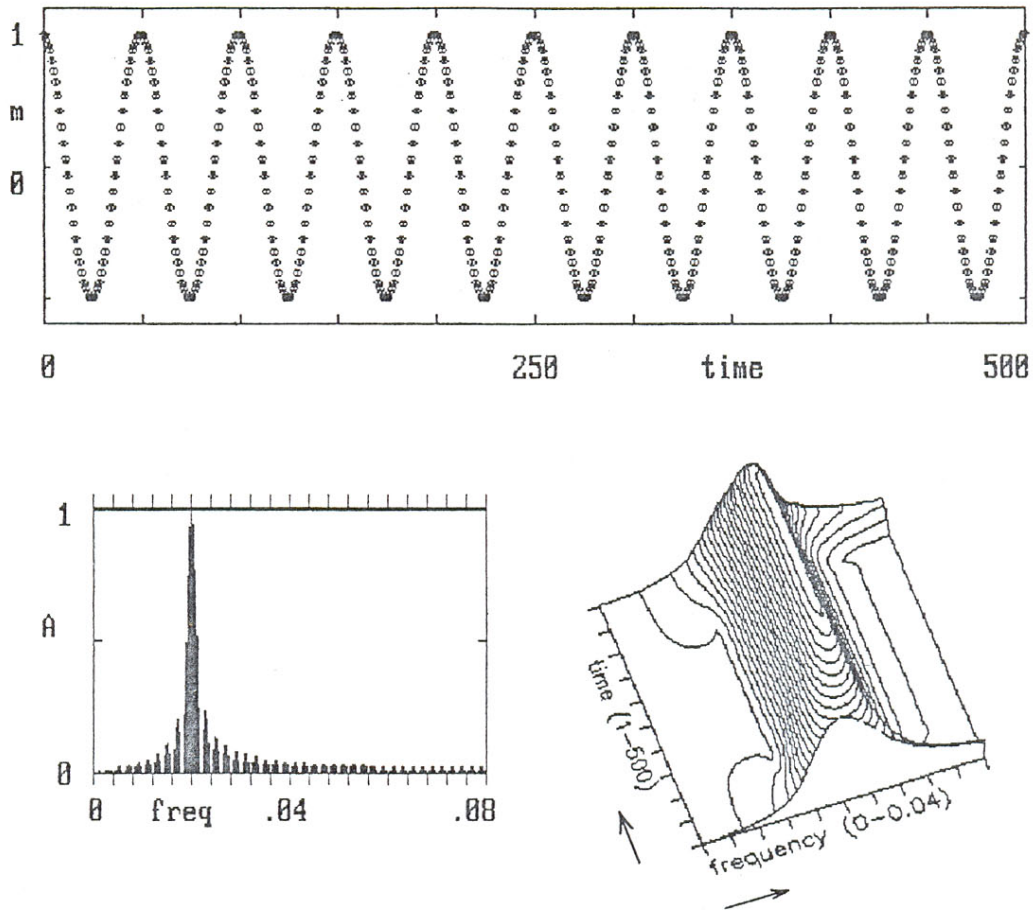
Kezdő frekvencia: $f_0 = 8e-4$, lépésköz: $\Delta f = 8e-4$,

frekvenciák száma = 50

A következőkben megadjuk a teszt-adatsorok generálásához használt kifejezéseket és paramétereket. Az ábrákon legfelül az adatsor grafikonja (fénygörbe), alatta pedig a

Fourier amplitúdó spektrum és a perspektivikus wavelet térkép látható szintvonalas ábrázolással.

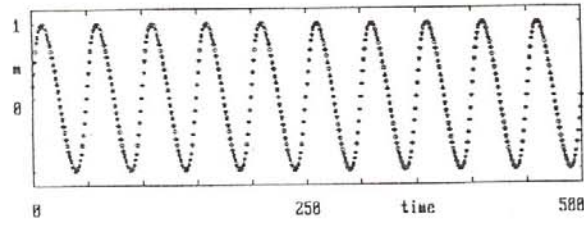
Az ábra száma után a modell száma szerepel.



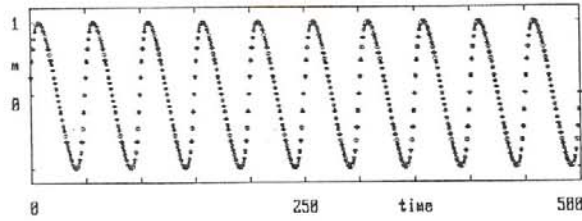
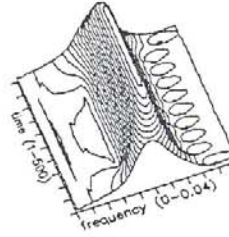
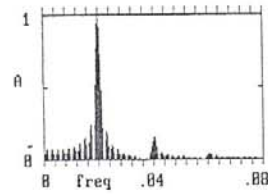
7. ábra: 1. Egy szinuszos komponens

$$m(t_i) = A \cos(2\pi/P t_i)$$

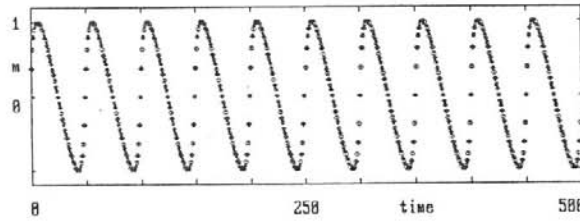
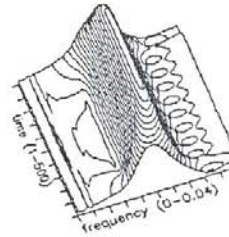
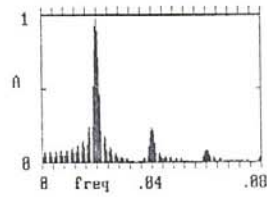
$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad P=50, A=1$$



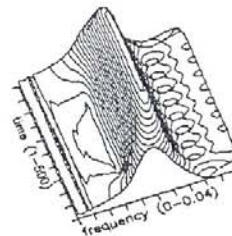
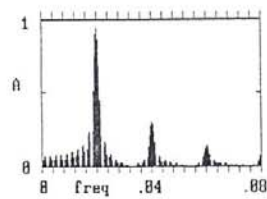
a



b



c

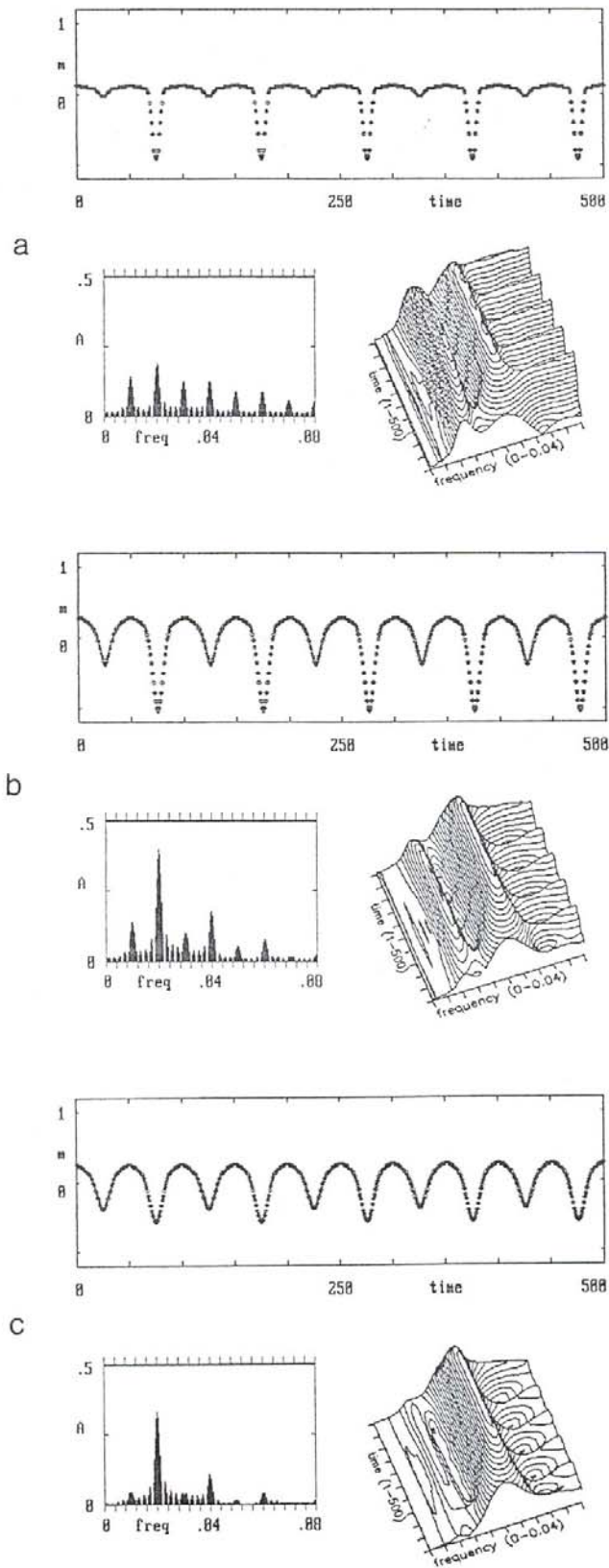


8. ábra: 2. Aszimmetrikus fénygörbe

LITE O-C görbével generálva

$i=1, \dots, 500$ és $t_i = i$, $P=50$, $A=1$

a) $e=0,3$ b) $e=0,5$ c) $e=0,7$

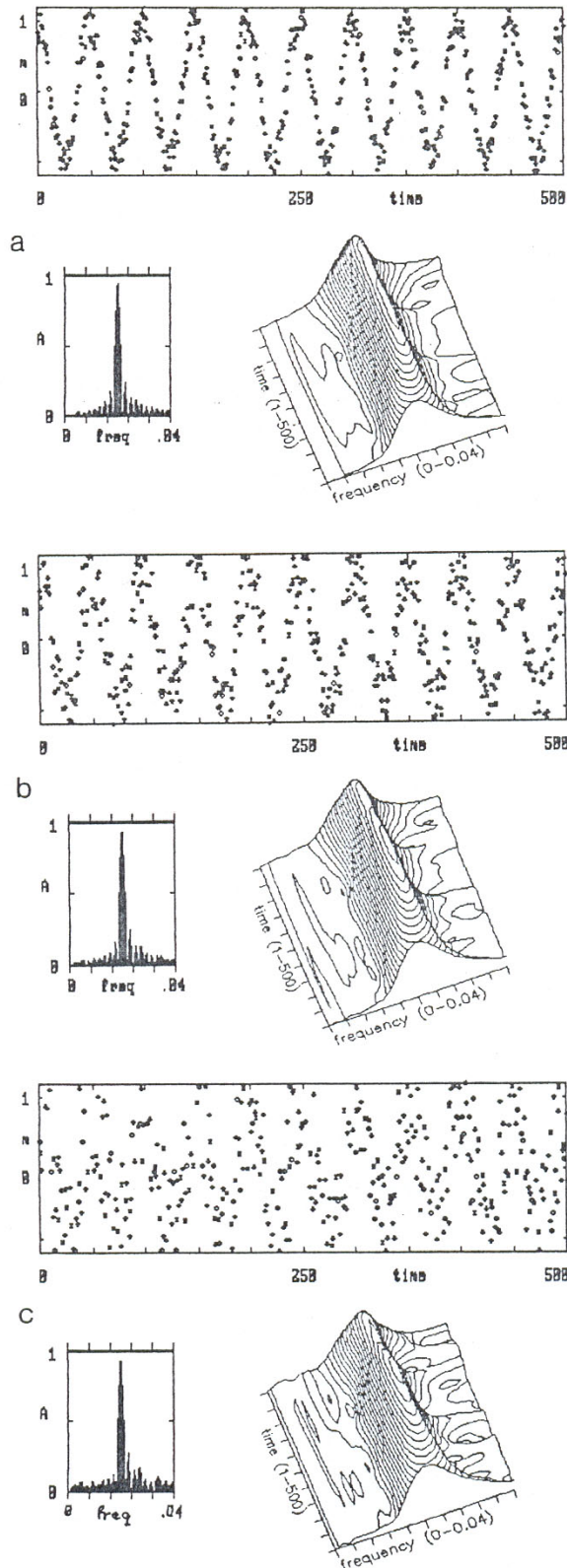


9. ábra: 3. Fedési fénygörbe

A BINMAKER programmal készítve

$i=1, \dots, 500$ and $t_i = i$, $P=100$, $A=1$

a) Algol b) β Lyr c) W UMa fénygörbe



10. ábra: 4. Egy szinuszos komponens kis fehér zajjal

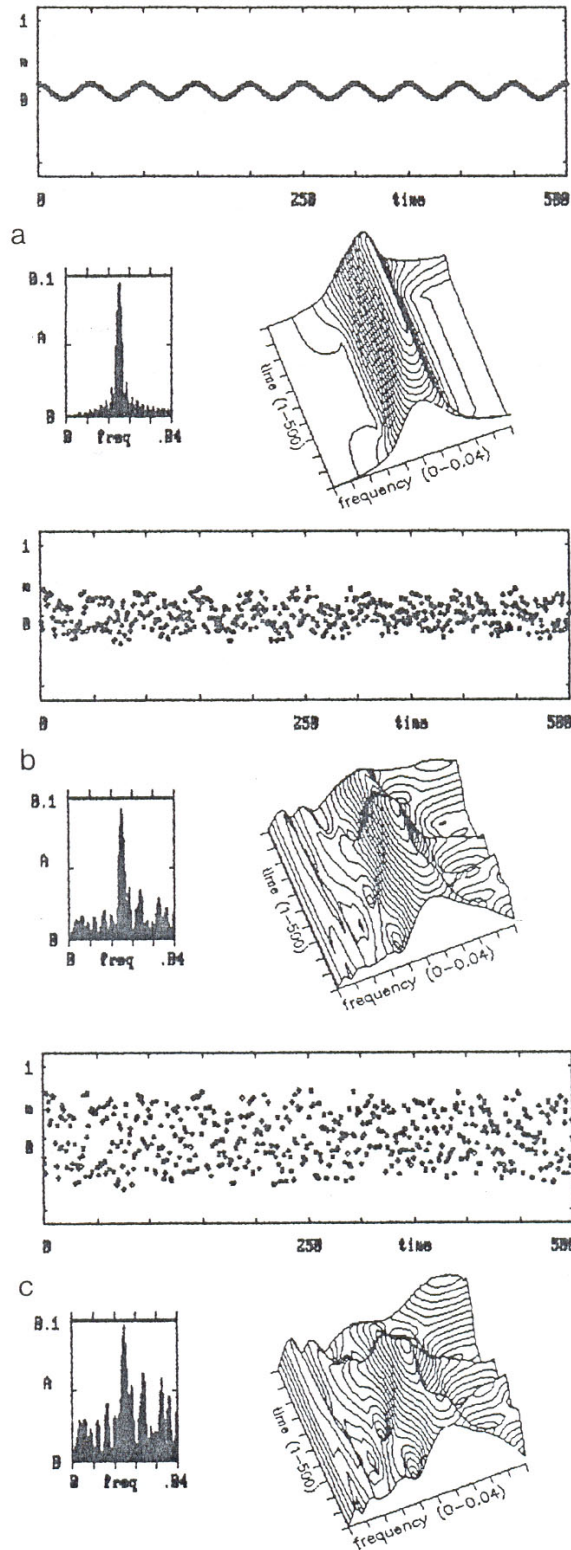
$$m(t_i) = A \cos(2\pi/P t_i) + \text{rnd}$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad P=50, \quad A=1$$

$$\text{a) } \text{rnd}=[+0,25;-0,25] \quad S/N=4$$

$$\text{b) } \text{rnd}=[+0,50;-0,50] \quad S/N=2$$

$$\text{c) } \text{rnd}=[+1,00;-1,00] \quad S/N=1$$



11. ábra: 5. Nagy megfigyelési hiba (fehér zaj)

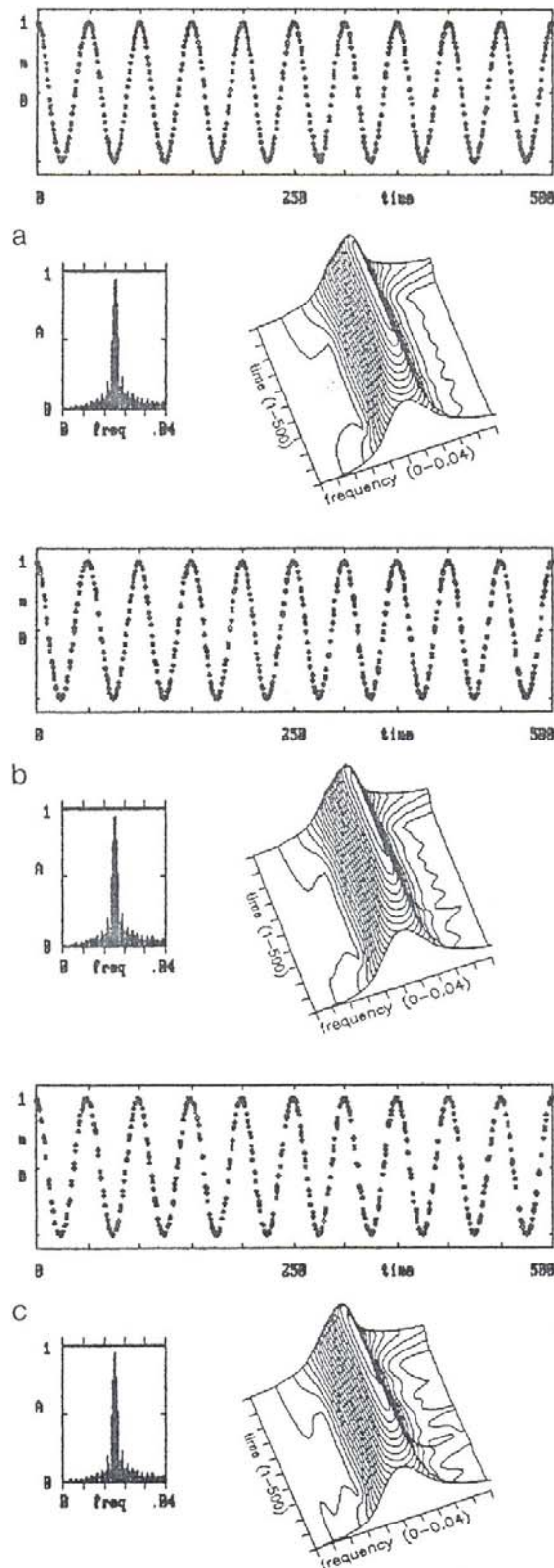
$$m(t_i) = A \cos(2\pi/P t_i) + \text{rnd}$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, P=50, A=0.1$$

a) $\text{rnd}=0$

b) $\text{rnd}=[+0.30; -0.30]$ $S/N=1/3$

c) $\text{rnd}=[+0.60; -0.60]$ $S/N=1/6$



12. ábra: 6. Gyengén nem egyenletes mintavételezés

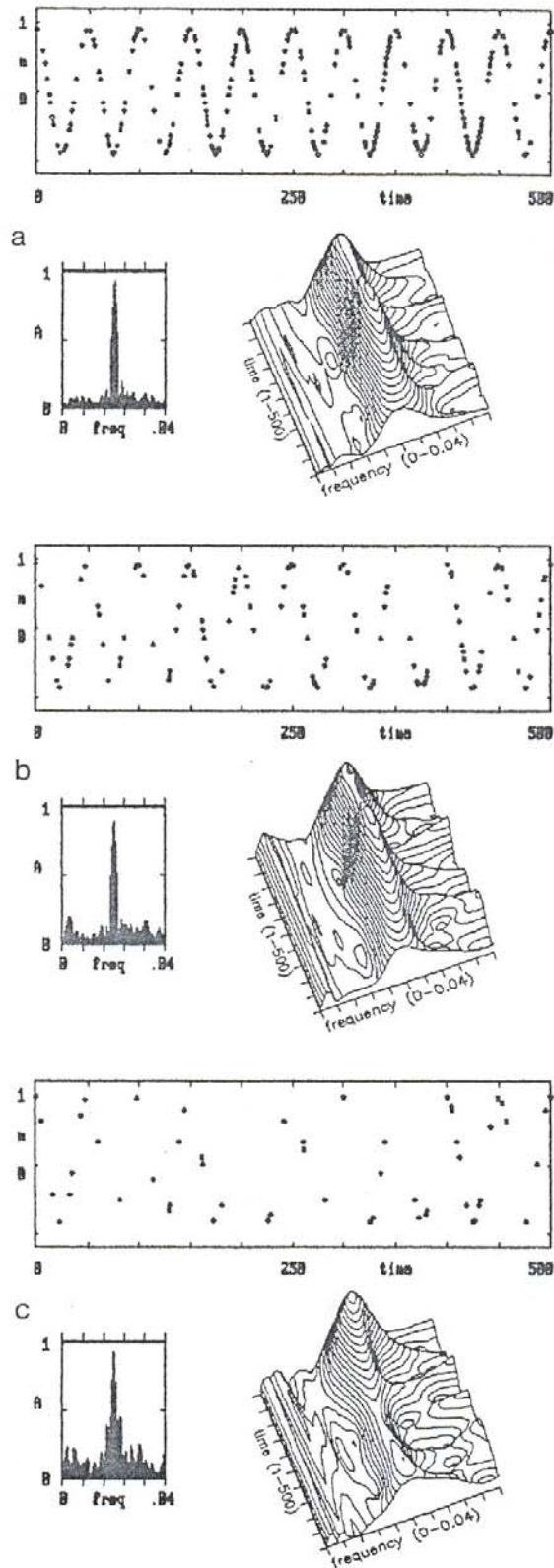
$$m(t_1) = A \cos(2\pi/P t_1)$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_1 = i + \text{rnd}, \quad A=1, \quad P=50$$

$$\text{a) } \text{rnd}=[+0,25;-0,25]$$

$$\text{b) } \text{rnd}=[+0,50;-0,50]$$

$$\text{c) } \text{rnd}=[+1,00;-1,00]$$



13. ábra: 7. Hiányos adatsor

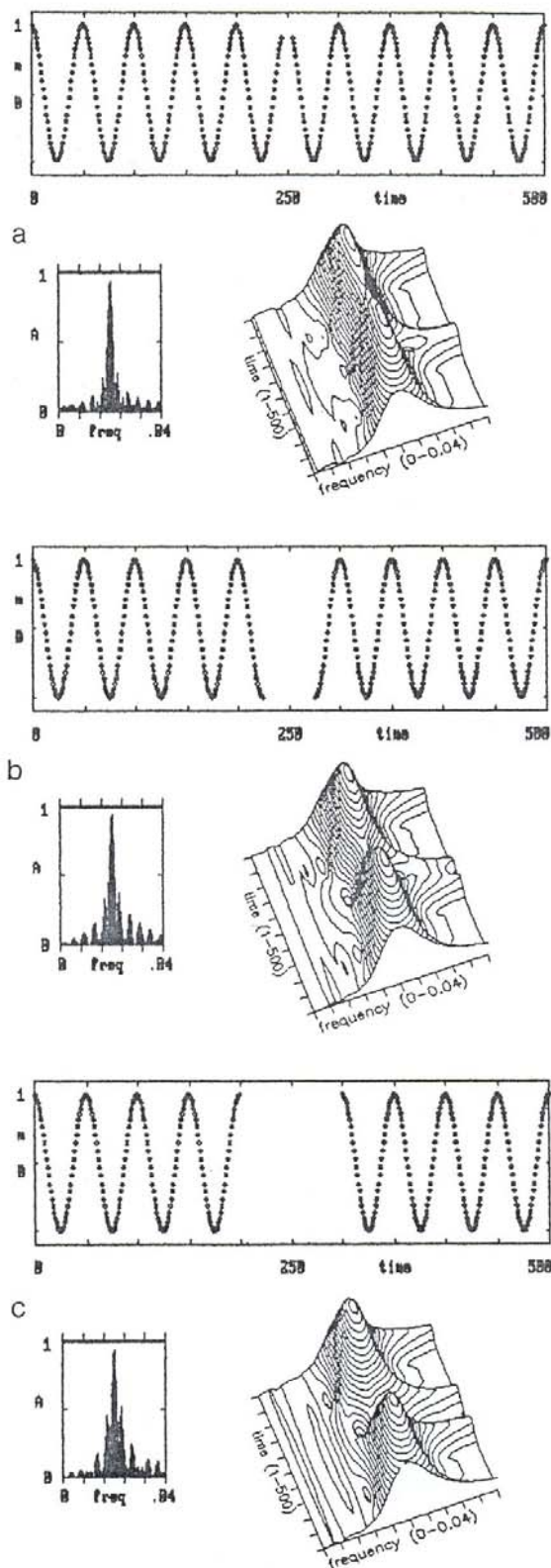
$$m(t_i) = A \cos(2\pi/P t_i) \quad A=0,9, P=50$$

$t_i = i$ ha $\text{abs}(\text{rnd}) < 0,5$ egyébként hiányzik

a) $\text{rnd}=[+1;-1]$ $N=256$

b) $\text{rnd}=[+2;-2]$ $N=122$

c) $\text{rnd}=[+5;-5]$ $N=54$



14. ábra: 8. Egy űr (gap) az adatsor közepén

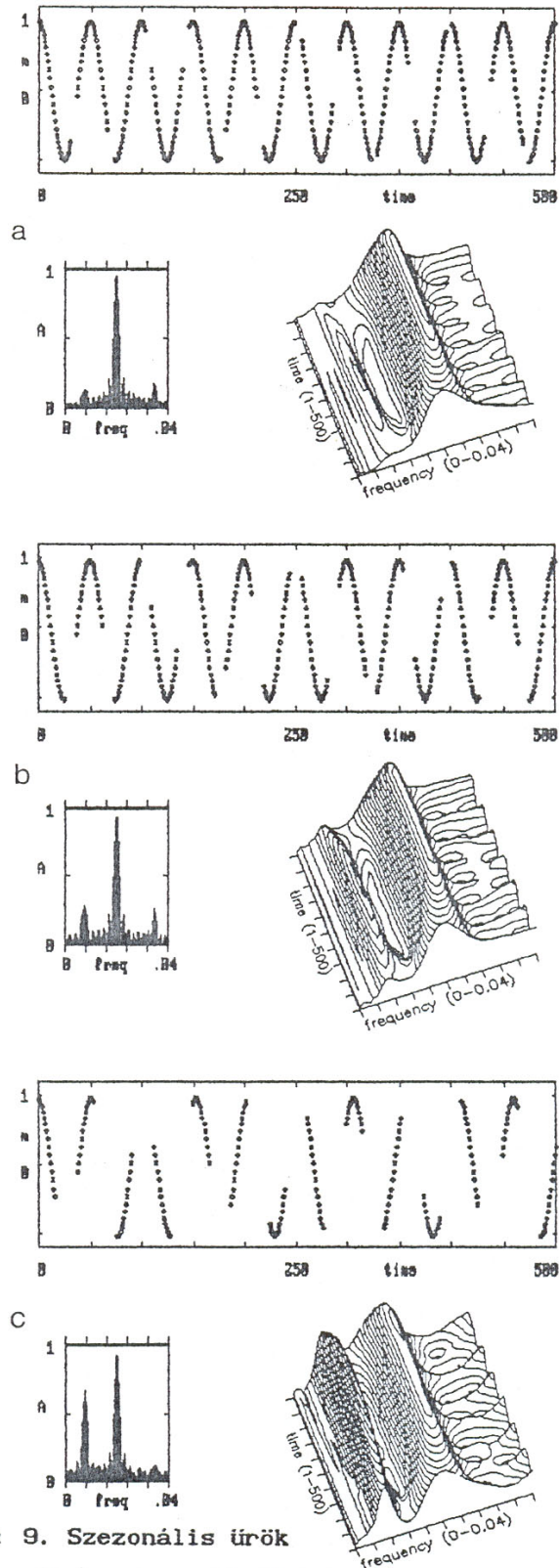
$$m(t_i) = A \cos(2\pi/P t_i)$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad P=50, A=1$$

$$a) \quad T_{\text{gap}}=10, \quad N=490$$

$$b) \quad T_{\text{gap}}=50, \quad N=450$$

$$c) \quad T_{\text{gap}}=100, \quad N=400$$



15. ábra: 9. Szezonális ürök

$$m(t_i) = A \cos(2\pi/P t_i)$$

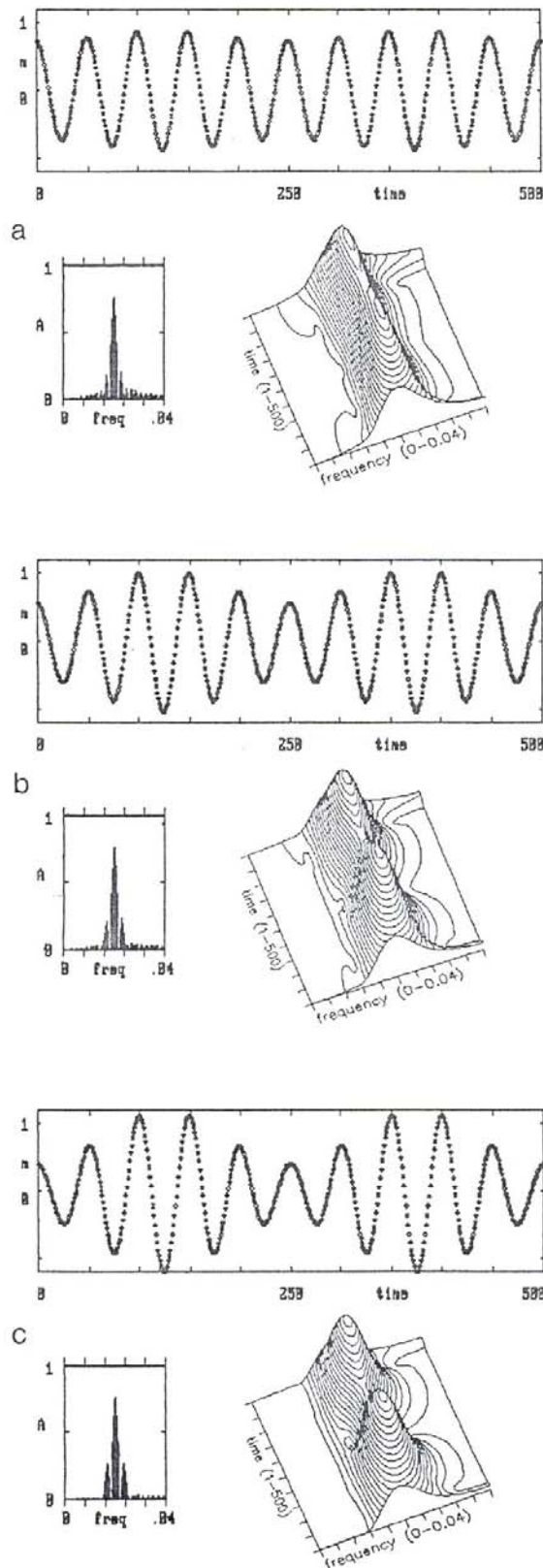
$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad P=50, \quad A=1$$

$T_{\text{obs}} + T_{\text{gap}} = 36,5$ időegység (1 egység pl. 10 nap)

a) $T_{\text{obs}} = 31,5, \quad T_{\text{gap}} = 5, \quad N=429$

b) $T_{\text{obs}} = 26,5, \quad T_{\text{gap}} = 10, \quad N=364$

c) $T_{\text{obs}} = 16,5, \quad T_{\text{gap}} = 20, \quad N=224$

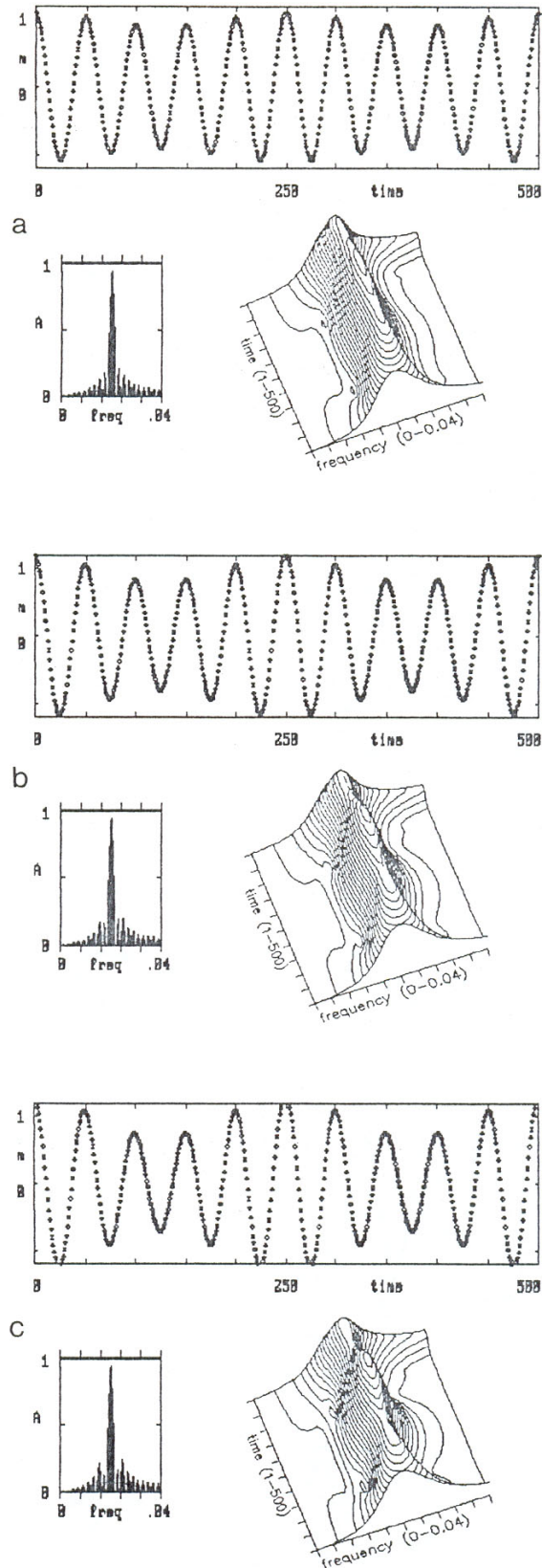


16. ábra: 10. Ciklikus amplitudómoduláció

$$m(t_i) = A \left(1 - m_a \cos(2\pi/P_a t_i) \right) \cos(2\pi/P t_i)$$

$i=1, \dots, 500$ és $t_i = i$, $P=50$, $P_a=250$, $A=0,8$

a) $m_a = 0,1$ b) $m_a = 0,3$ c) $m_a = 0,5$

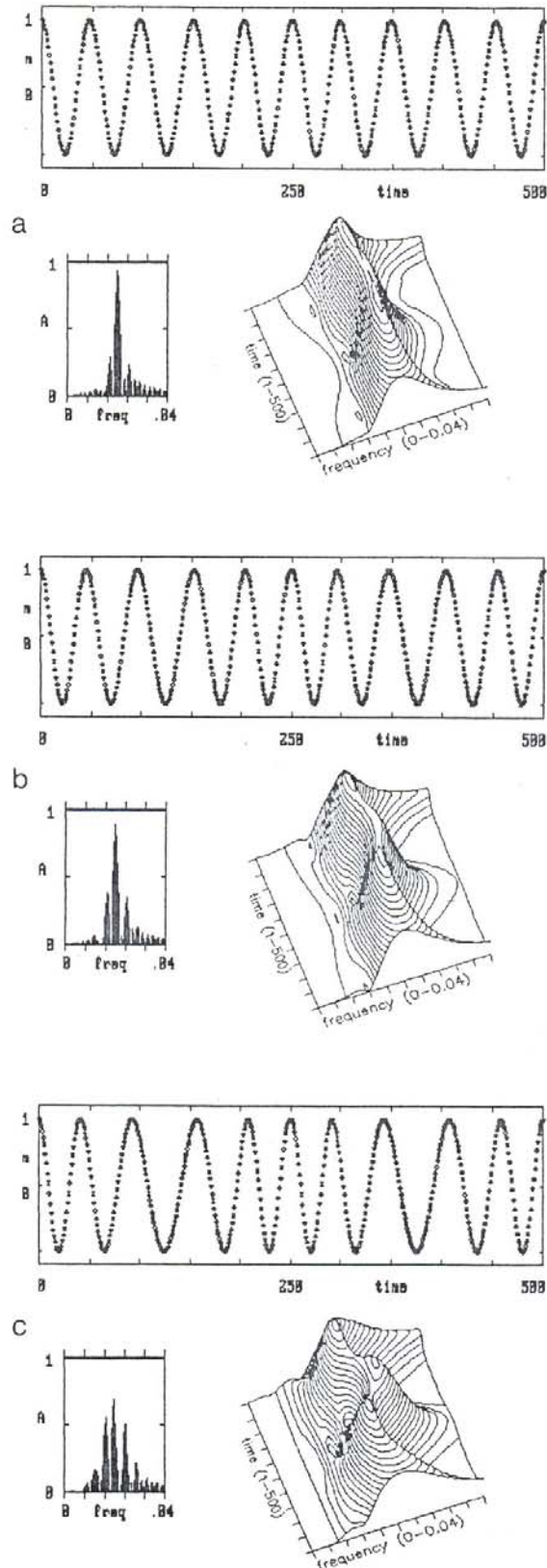


17. ábra: 11. Ciklikus amplitúdómoduláció

$$m(t_i) = A \left(1 + m_a \cos(2\pi/P_a t_i) \right) \cos(2\pi/P t_i)$$

$i=1, \dots, 500$ és $t_i = i$, $P=50$, $P_a=250$, $A=1$

a) $m_a = 0,1$ b) $m_a = 0,2$ c) $m_a = 0,3$

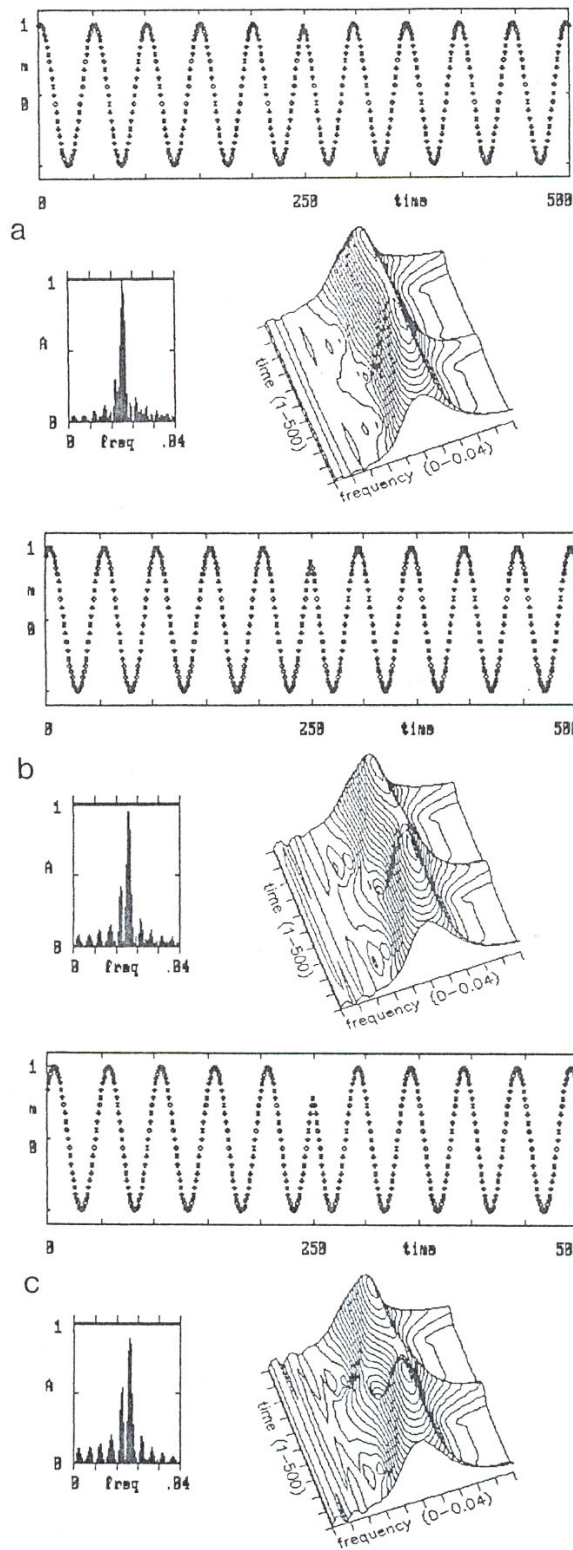


18. ábra: 12. Szinuszos fázismoduláció

$$m(t_i) = A \cos \left(2\pi/P \, t_i + m_f \sin(2\pi/P_f t_i) + \phi \right)$$

$$t_i = i, \quad P=50, \quad P_f=250, \quad A=1, \quad \phi = -2\pi m_f \sin(2\pi/P_f)$$

a) $m_f = 0,05$ b) $m_f = 0,10$ c) $m_f = 0,20$



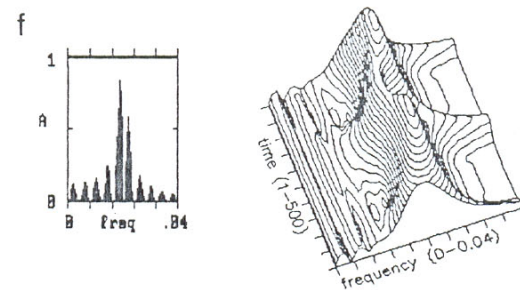
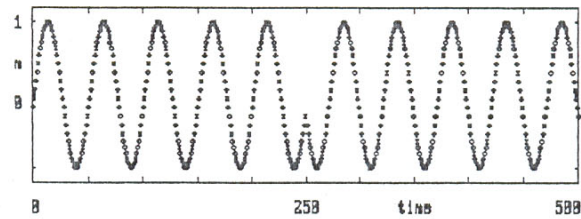
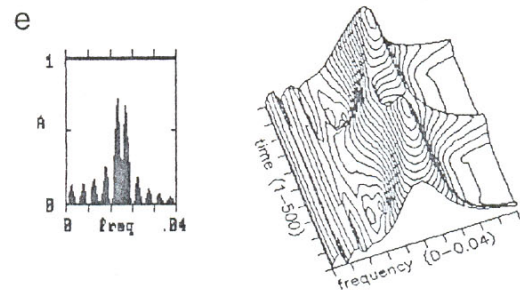
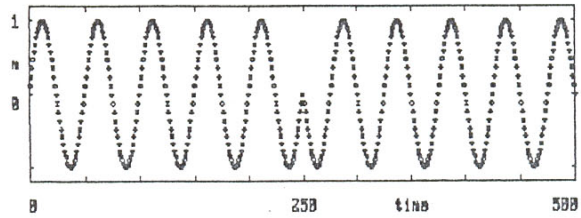
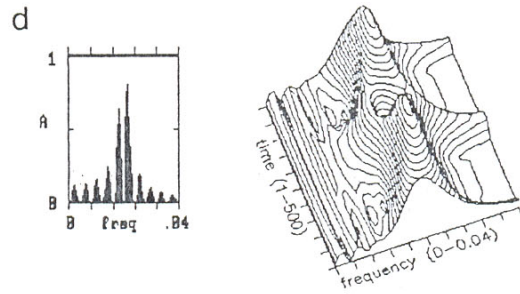
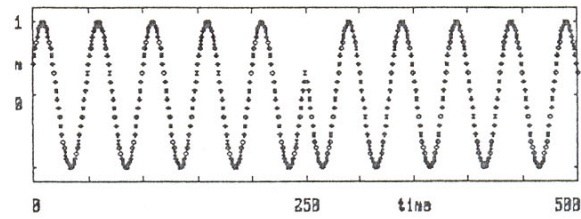
19/1. ábra: 13. Fázisugrás az adatsor közepén

$$t_1 = i, A=1, P=50$$

$$i = 1, \dots, 250 : m(t_1) = A \cos(2\pi/P t_1)$$

$$i = 251, \dots, 500 : m(t_1) = A \cos(2\pi/P t_1 + 2\pi\phi)$$

$$a) \phi = 0,1 \quad b) \phi = 0,2 \quad c) \phi = 0,3$$



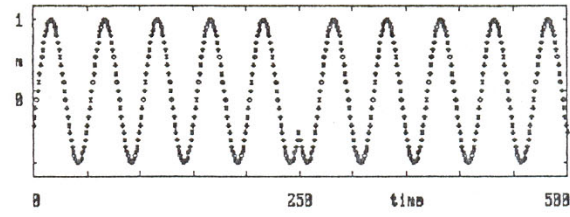
19/2. ábra: 13. Fázisugrás az adatsor közepén

$$t_1 = i, A=1, P=50$$

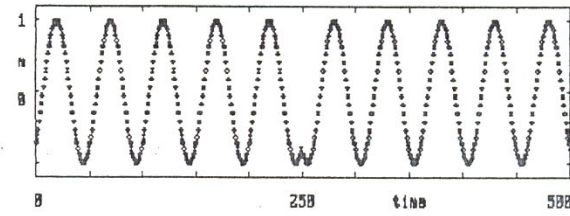
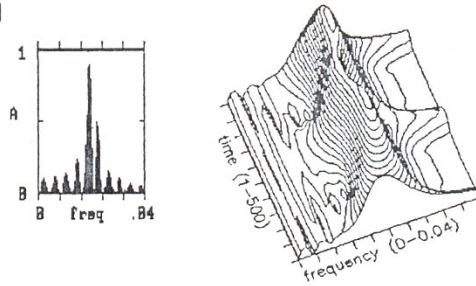
$$i = 1, \dots, 250 : m(t_1) = A \cos(2\pi/P t_1)$$

$$i = 251, \dots, 500 : m(t_1) = A \cos(2\pi/P t_1 + 2\pi\phi)$$

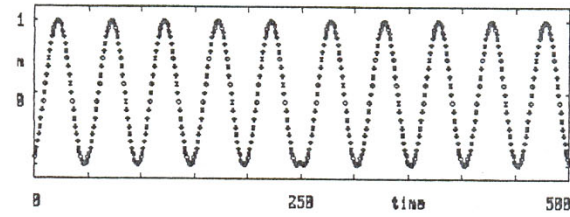
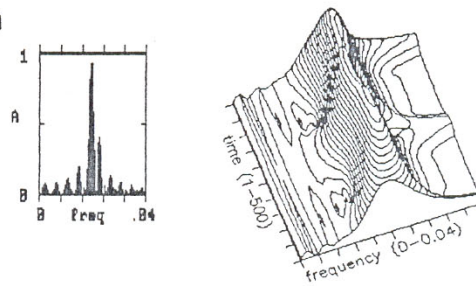
$$d) \phi = 0,4 \quad e) \phi = 0,5 \quad f) \phi = 0,6$$



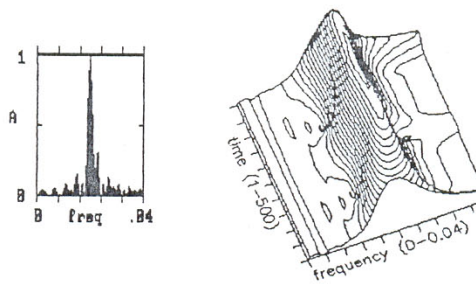
g



h



i



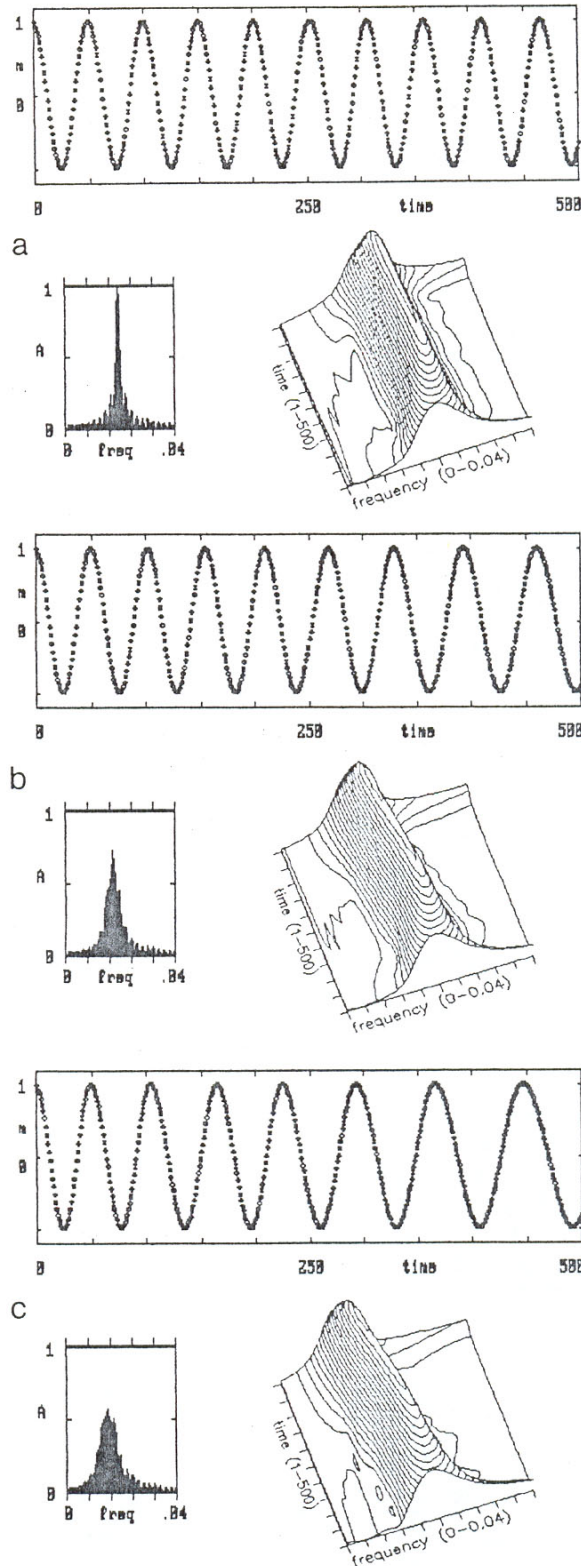
19/3. ábra: 13. Fázisugrás az adatsor közepén

$$t_1 = i, A = 1, P = 50$$

$$i = 1, \dots, 250 : m(t_1) = A \cos(2\pi/P t_1)$$

$$i = 251, \dots, 500 : m(t_1) = A \cos(2\pi/P t_1 + 2\pi\phi)$$

$$g) \phi = 0,7 \quad h) \phi = 0,8 \quad i) \phi = 0,9$$



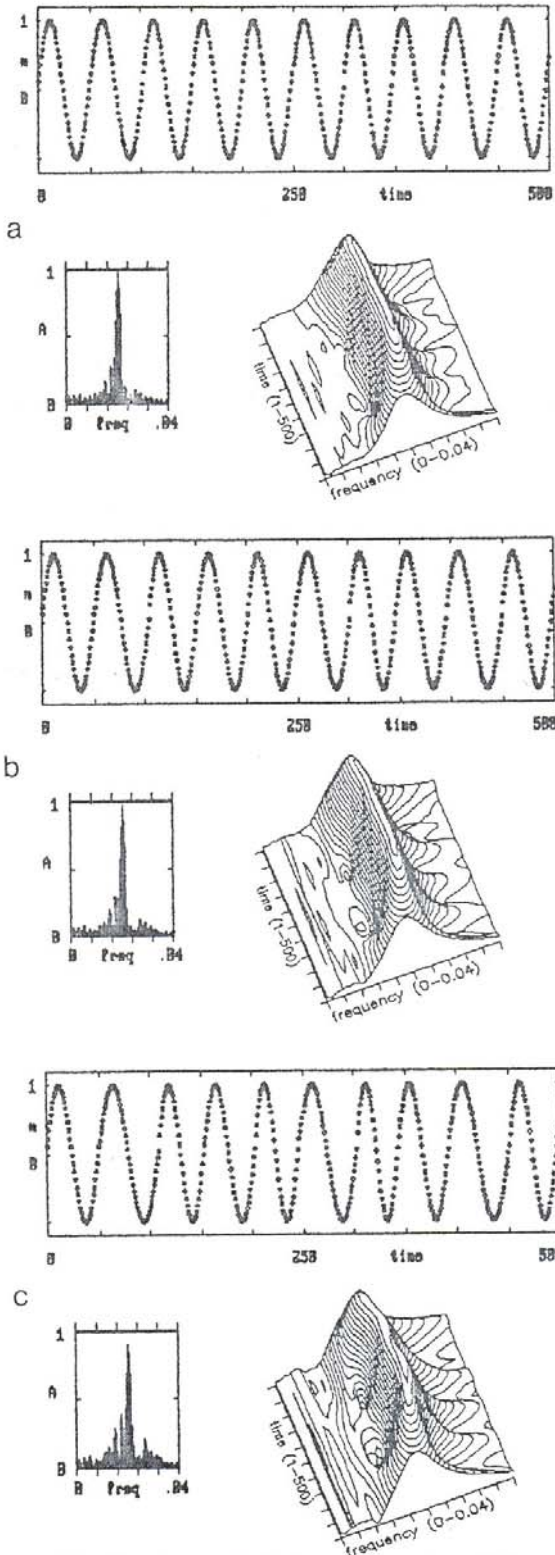
20. ábra: 14. Folyamatos periódusváltozás

$$m(t_i) = A \cos \left[2\pi / P_k (t_i - t_{\max_k}) \right]$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad P_1 = 50, \quad A=1$$

$$P_k = P_{k-1} (1 + \Delta P / P), \quad k=1, \dots, 10 \text{ ciklusszám}$$

$$a) \Delta P / P = 0,01 \quad b) \Delta P / P = 0,05 \quad c) \Delta P / P = 0,10$$



21. ábra: 15. Random periódusváltozás ciklusról ciklusra

$$m(t_i) = A \cos \left[2\pi / P_k (t_i - t_{0_k}) \right]$$

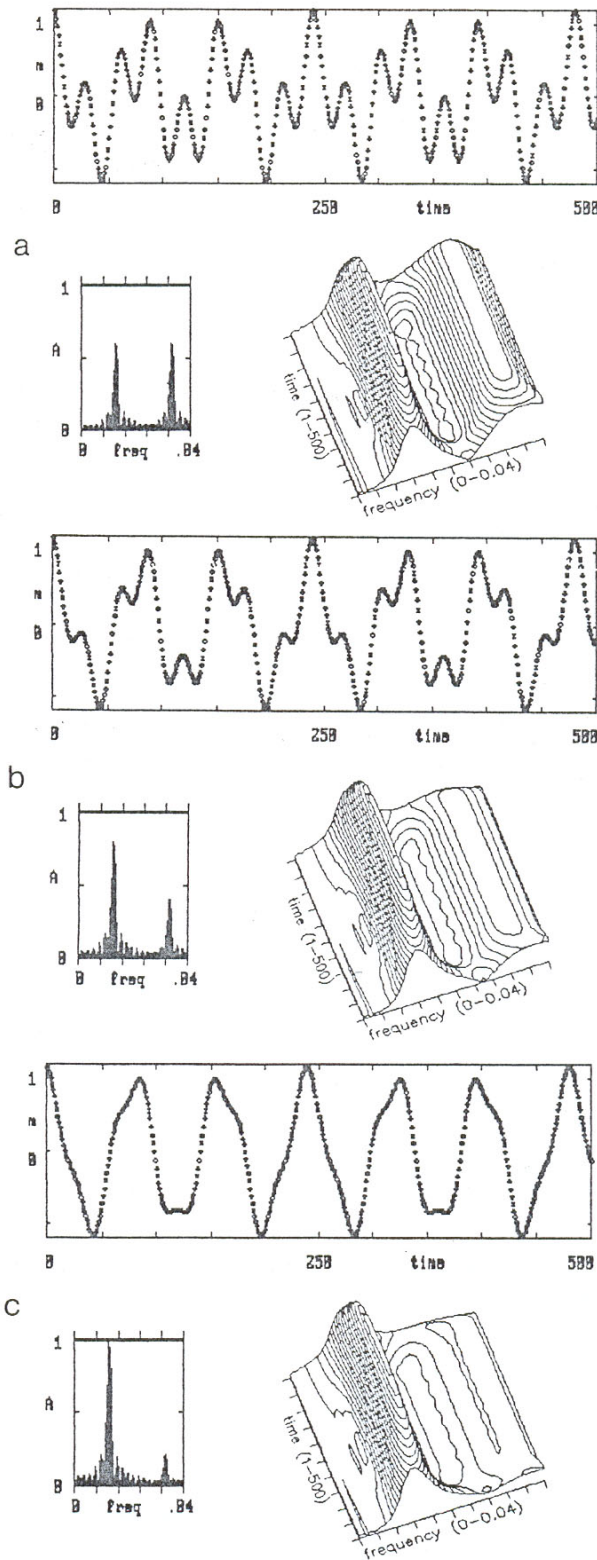
$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad P_0 = 50, A=1$$

$$P_k = P_0 + \text{rnd}, \quad k=1, \dots, 10 \text{ ciklusszám}$$

$$\text{a) } \text{rnd} = [+2, 5; -2, 5], \quad (\Delta P/P)_{\max} = 1/20$$

$$\text{b) } \text{rnd} = [+5, 0; -5, 0], \quad (\Delta P/P)_{\max} = 1/10$$

$$\text{c) } \text{rnd} = [+10, 0; -10, 0], \quad (\Delta P/P)_{\max} = 1/5$$



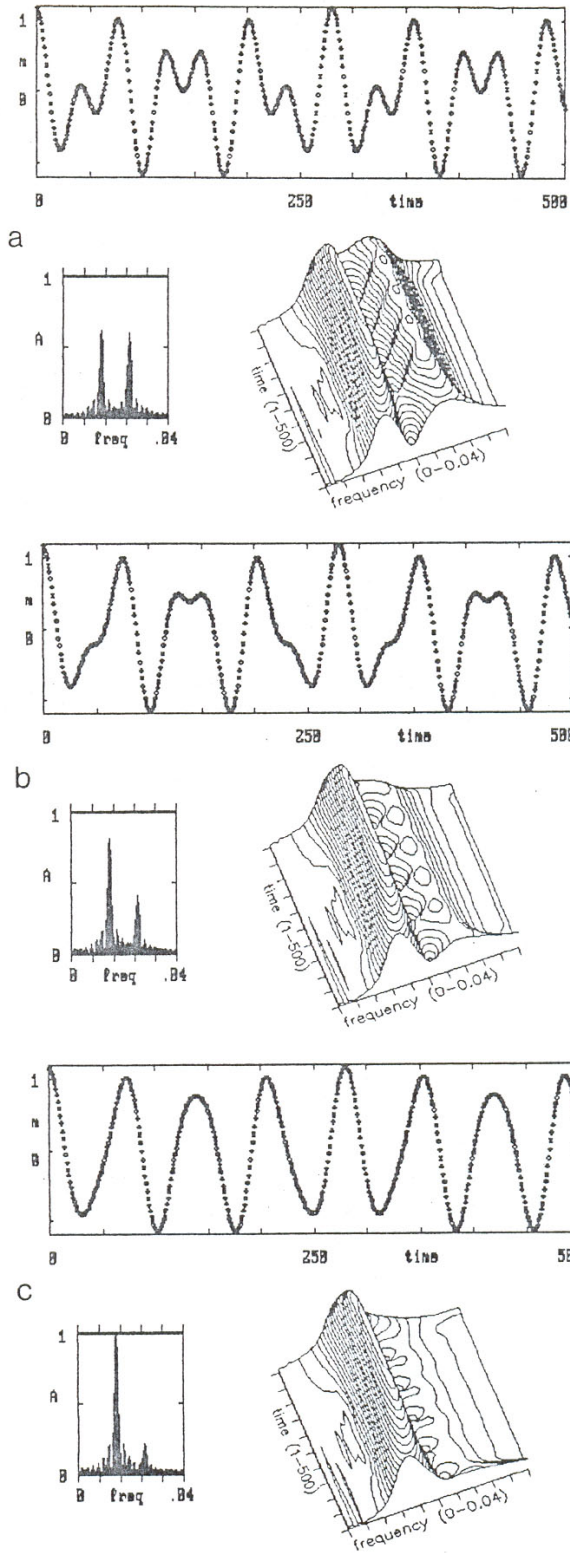
22. ábra: 16. Kétmódusú oszcilláció

$$m(t_i) = A_1 \cos(2\pi/P_1 t_i) + A_2 \cos(2\pi/P_2 t_i + \phi)$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad \phi=0$$

$$P_1=30, \quad P_2=80, \quad A_1 + A_2 = 1,2$$

$$a) A_2/A_1 = 1 \quad b) A_2/A_1 = 2 \quad c) A_2/A_1 = 5$$



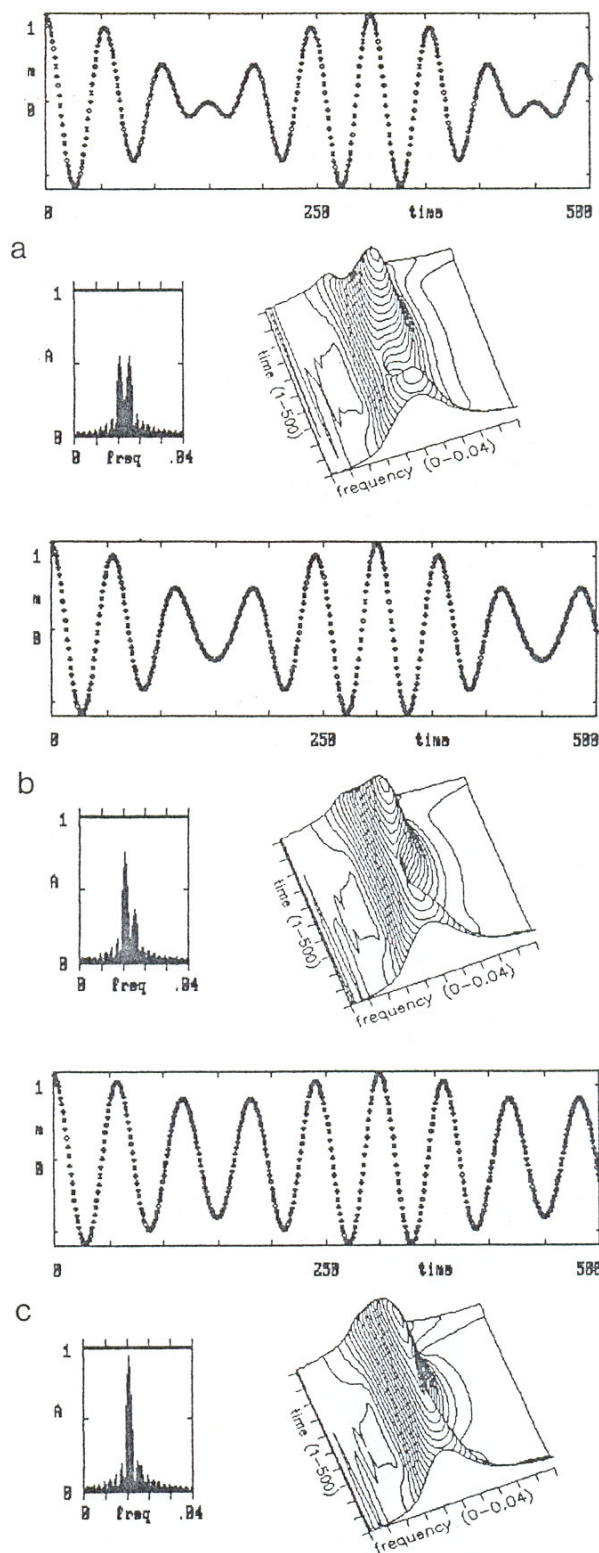
23. ábra: 17. Kétmódusú oszcilláció

$$m(t_i) = A_1 \cos(2\pi/P_1 t_i) + A_2 \cos(2\pi/P_2 t_i + \phi)$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad \phi=0$$

$$P_1=40, \quad P_2=70, \quad A_1 + A_2 = 1, 2$$

$$\text{a) } A_2/A_1 = 1 \quad \text{b) } A_2/A_1 = 2 \quad \text{c) } A_2/A_1 = 5$$



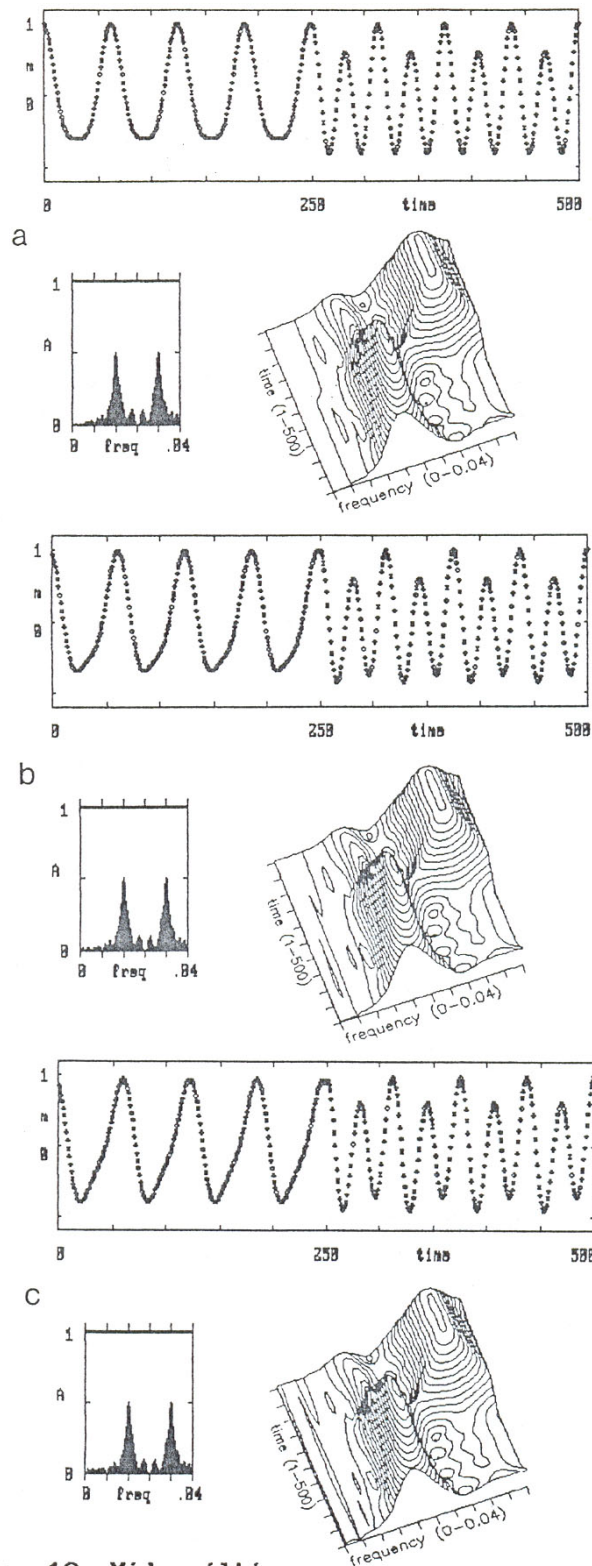
24. ábra: 18. Kétmódusú oszcilláció

$$m(t_i) = A_1 \cos(2\pi/P_1 t_i) + A_2 \cos(2\pi/P_2 t_i + \phi)$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad \phi=0$$

$$P_1=50, \quad P_2=60, \quad A_1 + A_2 = 1,2$$

$$\text{a) } A_2/A_1 = 1 \quad \text{b) } A_2/A_1 = 2 \quad \text{c) } A_2/A_1 = 5$$



25. ábra: 19. Módusváltás

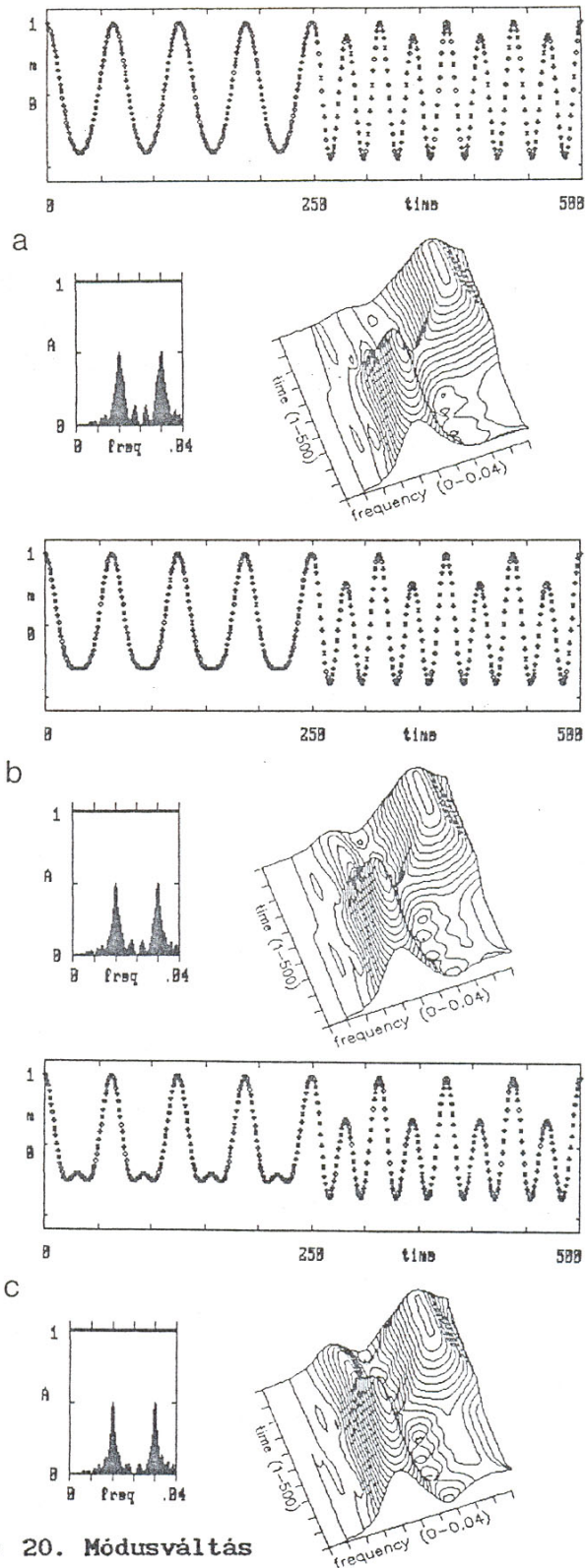
$$m(t_i) = A_1 \sin(2\pi/P_1 t_i) + A_2 \sin(2\pi/P_2 t_i + \phi)$$

$i=1, \dots, 500$ és $t_i = i$, $P_1=31,25$; $P_2=62,5$

$0 < t_i \leq 250$: $A_1 = 0,2$, $A_2 = 0,8$

$250 < t_i \leq 500$: $A_1 = 0,8$, $A_2 = 0,2$

a) $\phi = 0$ b) $\phi = \pi/2$ c) $\phi = \pi$



26. ábra: 20. Módusváltás

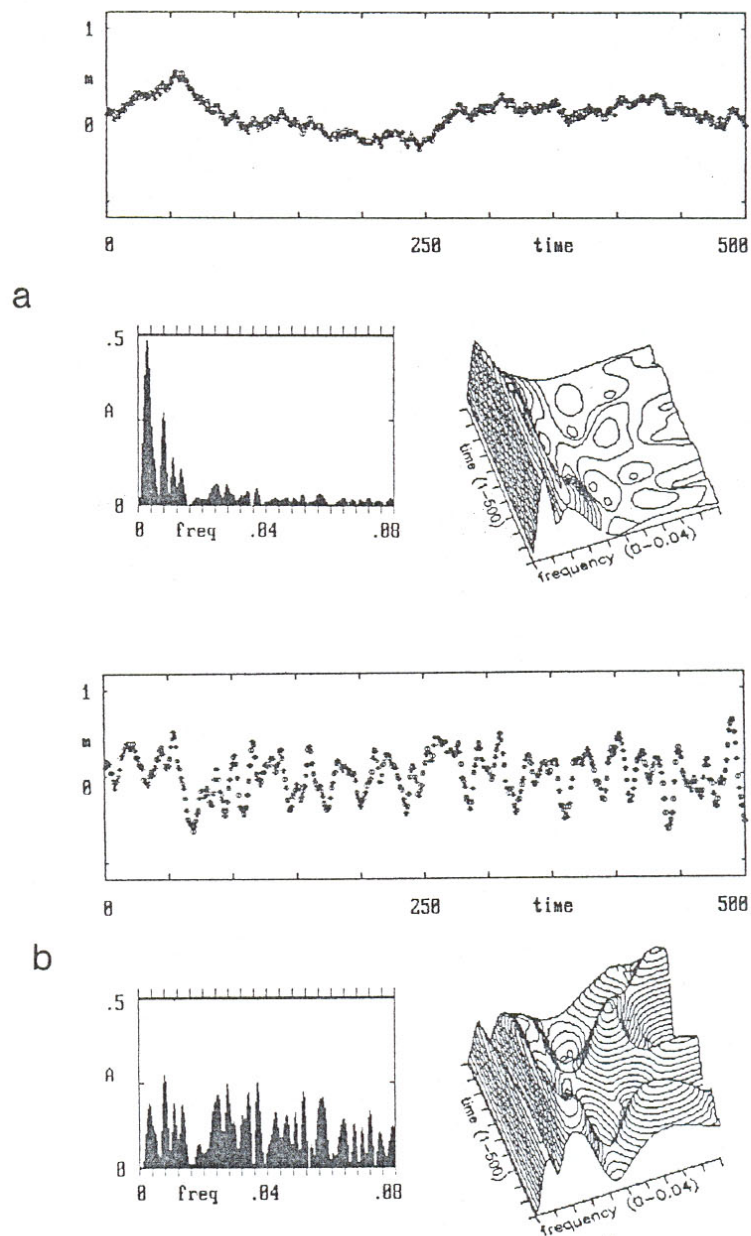
$i=1, \dots, 500$ és $t_i = i$, $P_1=31,25$; $P_2=62,5$

$A_1 + A_2 = 1$, $\phi=0$

$0 < t_i \leq 250$: $m(t_i) = A_1 \sin(2\pi/P_1 t_i) + A_2 \sin(2\pi/P_2 t_i + \phi)$

$250 < t_i \leq 500$: $m(t_i) = A_2 \sin(2\pi/P_1 t_i) + A_1 \sin(2\pi/P_2 t_i + \phi)$

a) $A_2/A_1 = 9/1$ b) $A_2/A_1 = 8/2$ c) $A_2/A_1 = 7/3$



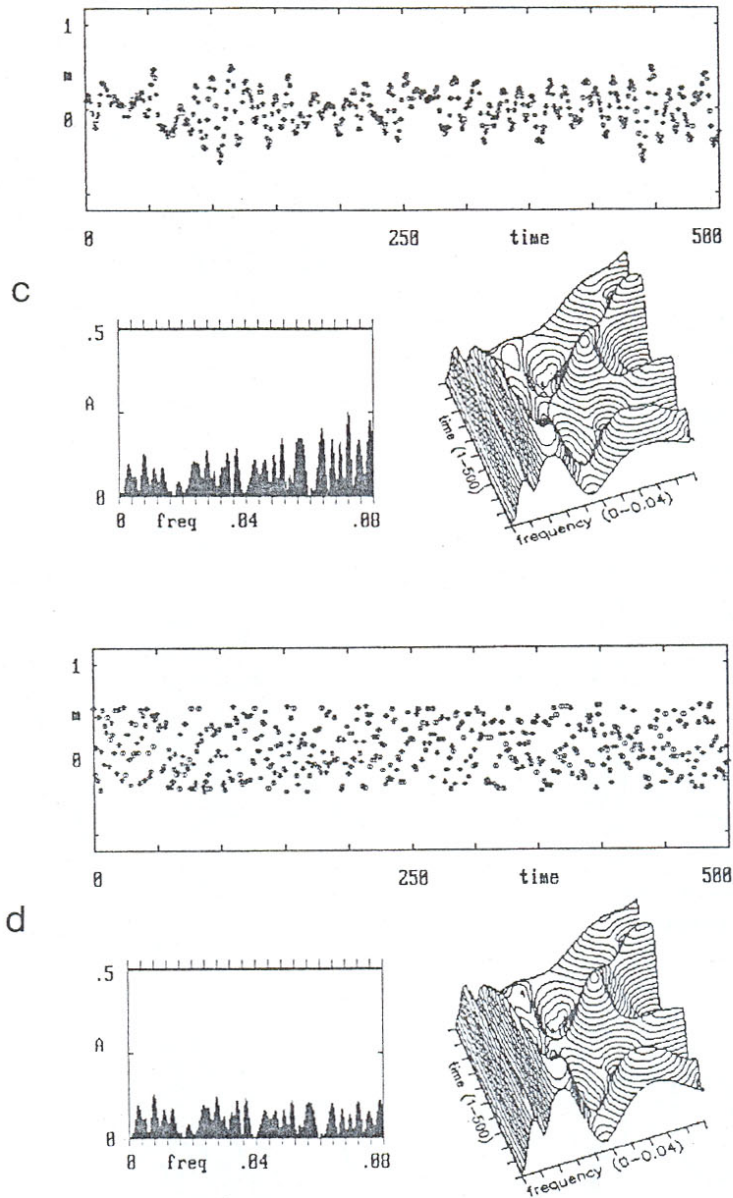
27/1. ábra: 21. ARMA folyamat

$$m(t_i) = c_1 m(t_{i-1}) + c_2 m(t_{i-2}) + \text{rnd}; \quad m(t_1) = 0,1 \quad m(t_2) = 0,1$$

$i = 1, \dots, 500$ és $t_i = i$, rnd: fehér zaj zéró körül

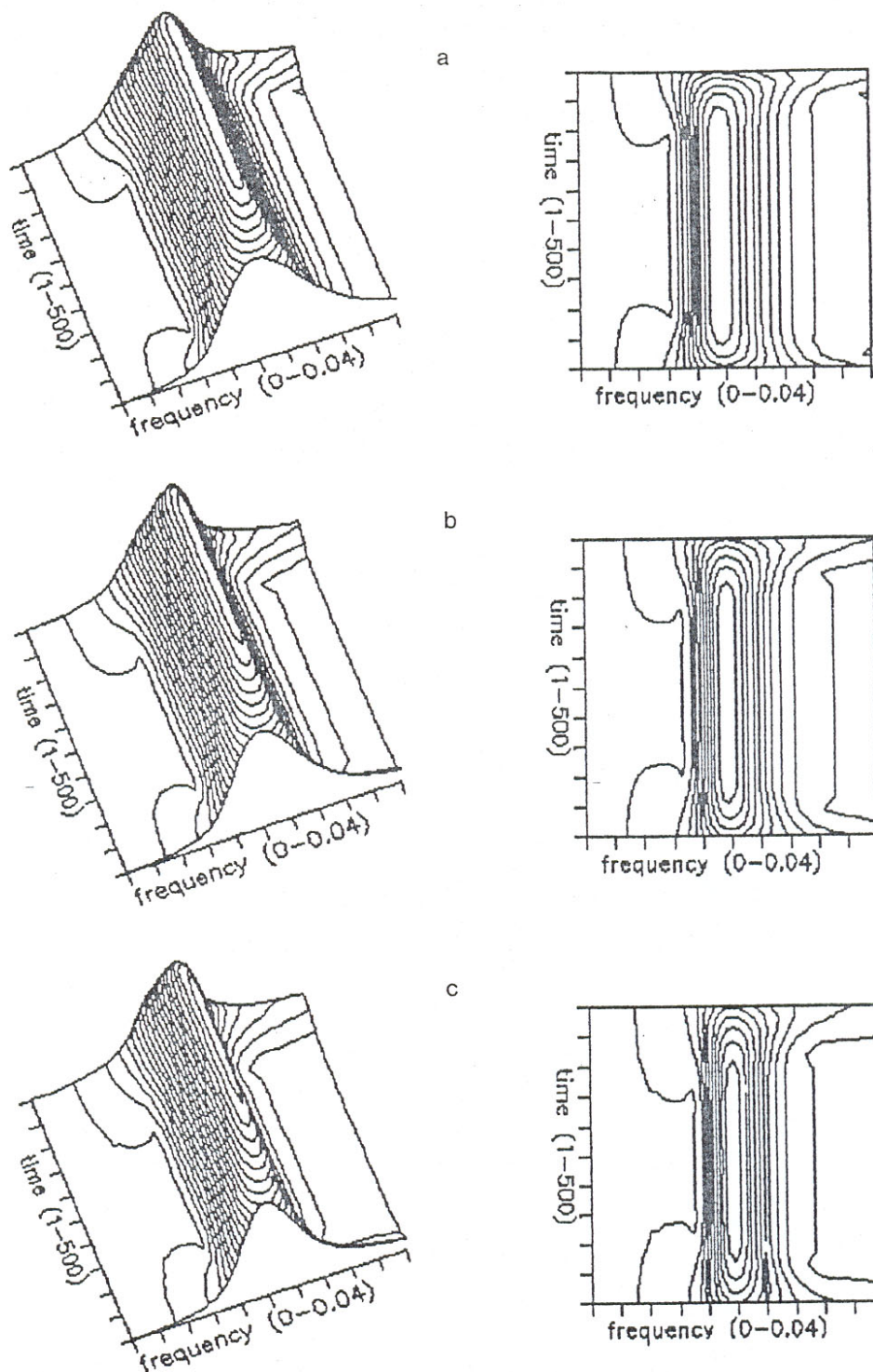
a) $c_1 = 0,6$, $c_2 = 0,4$, $\text{rnd} = [+0,07; -0,07]$

b) $c_1 = 1,6$, $c_2 = -0,7$, $\text{rnd} = [+0,07; -0,07]$



27/2. ábra: 21. ARMA folyamat

$m(t_1) = c_1 m(t_{1-1}) + c_2 m(t_{1-2}) + \text{rnd}; \quad m(t_1) = 0,1 \quad m(t_2) = 0,1$
 $i = 1, \dots, 500$ és $t_i = i$, rnd: fehér zaj zéró körül
 c) $c_1 = 1,6$, $c_2 = -0,8$, $\text{rnd} = [+0,07; -0,07]$
 d) $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\text{rnd} = [+1; -1]$

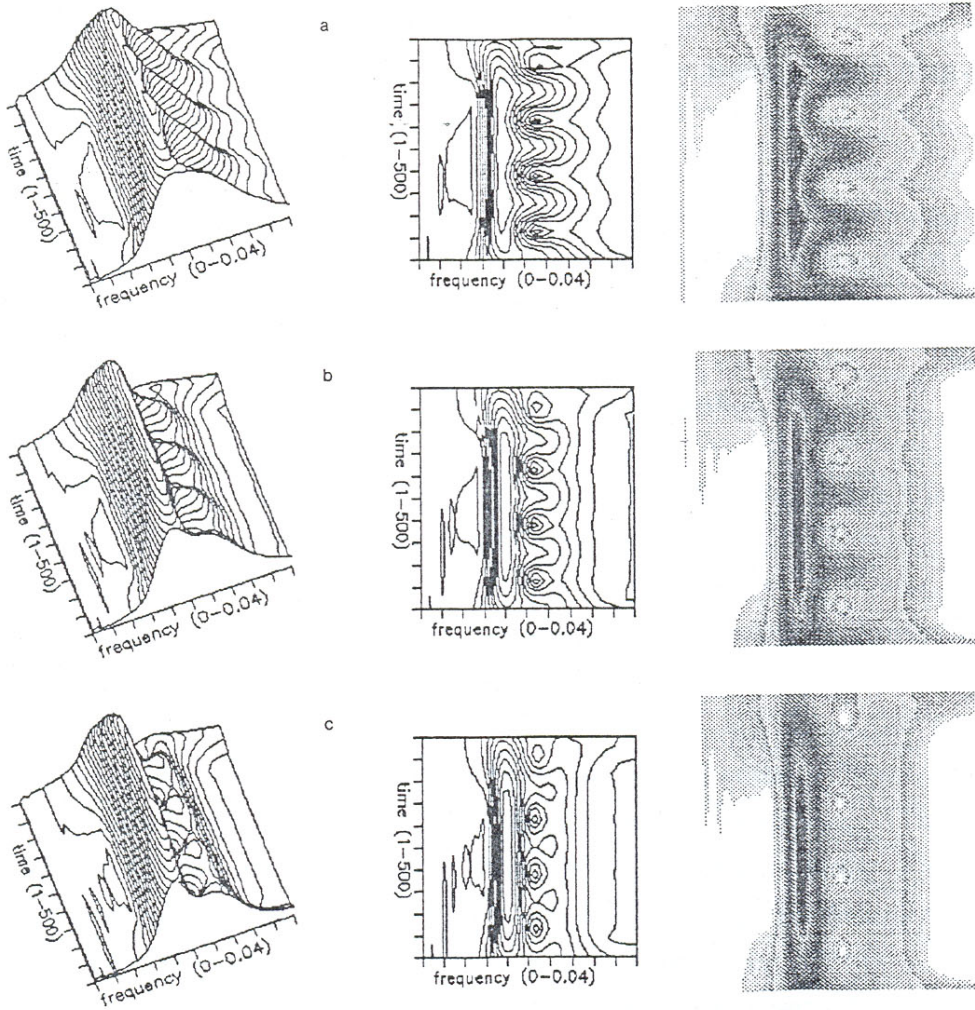
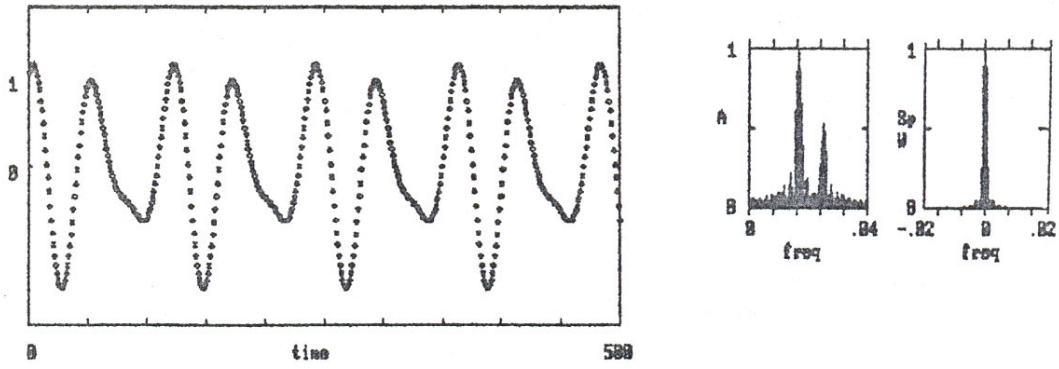


28. ábra: Az analizáló wavelet különböző c paramétere mellett a felbontás jellemzése egy szinuszos komponens esetén

$$m(t_i) = A \cos(2\pi/P t_i)$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i, \quad P=50, \quad A=1$$

$$\text{a) } c = 5 \quad \text{b) } c = 2\pi \quad \text{c) } c = 7,5$$



29. ábra: Az analízáló wavelet különböző c paramétere mellett a felbontás jellemzése két szinuszos komponens esetén

$$m(t_i) = A_1 \cos(2\pi/P_1 t_i) + A_2 \cos(2\pi/P_2 t_i + \phi)$$

$$i=1, \dots, 500 \text{ és } t_i = i,$$

$$P_1=60, P_2=40, A_1=1, A_2=0,5, \phi=0,3$$

$$\text{a) } c = 5 \quad \text{b) } c = 2\pi \quad \text{c) } c = 7,5$$

A (2.37)-ben szereplő Morlet-féle analizáló wavelet tartalmaz egy c paramétert. Ennek értéke befolyásolja az időbeli és frekvenciabeli felbontást (Kolláth and Szeidl 1993). Eerre vonatkozóan néhány tesztet végeztem el. A 28. ábrán egyetlen szinuszos komponens esetén jól látható, hogy a c növekvő értékeire egyre keskenyebb a csúcs, azaz javul a frekvencia meghatározásának pontossága. Ugyanakkor az adatsor elején és a végén a véges adatsor miatti levágás egyre jelentősebb, így az adatsor egyre rövidebb szakaszáról nyerhetünk csak információt. Fontos, hogy ha c nem 2π , akkor a frekvenciaskálát transzformálni kell: $f := f 2\pi / c$ szerint (pl. Ochadlick et al. 1993).

A 29. ábrán két, aránylag közeli frekvencia esetén tanulmányozható a c paraméter hatása. Kis c értéknél a két gerinc összeolvad, a rövidebb periódus azonosítása nem lehetséges.

Az alkalmazott c értékét mindig az adott probléma határozza meg. Általában javasolható a $c=2\pi$, de közeli frekvenciák esetén a felbontásukhoz nagyobb c értéket válasszunk.

III.2. A wavelet térkép tulajdonságai

A modell számára (az ábra száma 6-tal nagyobb!) hivatkozva sorra megjegyzéseket fűzünk a wavelet térképekhez.

1. Az egyetlen szinuszhullám esete alapján a wavelet analízis eredményének három lényeges tulajdonságára mutatunk rá:

a) A wavelet térkép frekvenciában nem szimmetrikus (a kisfrekvenciás oldalon gyorsabban változik az amplitúdó). Ennek oka az, hogy az ablak szélessége a próbaperiódussal arányos. A nagy frekvenciák felé haladva az ablak keskenyedek, ezért a frekvencia-csúcsok félszélessége nő. Ez azt is jelenti, hogy a frekvencia meghatározás pontossága is függ magától a frekvencia értékétől.

b) A másik tulajdonság az adatsor végességéből ered. Emiatt a térkép időbeli két szélén az amplitúdó lecsökken. Emlékeztetünk rá, hogy a teljes adatsorból Gauss ablakkal vágjuk ki a vizsgálandó τ középpontú szegmenst, így az adatsor elején és végén a Gauss ablakon belül kevesebb adat lesz mint középen. A wavelet transzformált rendkívül érzékeny az ablakbeli adathiányokra, ekkor radikálisan lecsökken az amplitúdó! Ez jól megfigyelhető az adatsor belsejében lévő ürök esetében is.

c) Szintén vég-effektus a lefutó gerincek megjelenése az adatsor elejénél és a végénél, különösen a nagyfrekvenciás részen. A későbbiekben majd látjuk, hogy ez igen kellemetlen, mert az adatsorban lévő nagyobb hiányok, ürök esetén is tapasztalható!

Ezeknek a módszerből eredő jellegzetességeknek a szem előtt tartása alapvető fontosságú. Történtek próbálkozások az idősor végeinél való levágásnak az adateloszlástól függő normálási tényezővel való kiküszöbölésére (pl. a (2.35) szerint), de jobb megoldást a későbbiekben bemutatandó fehérítés jelenthet.

2. Legtöbbször a csillagok fényváltozása nem szinuszos. A pulzáló változókra szorítkozva ez különösen érvényes az RR Lyrae és a delta Cephei típusú csillagokra. Az aszimmetrikus fénygörbét a fény-idő effektust (LITE) leíró O-C matematikai formulával generáltuk. Az aszimmetria mértékét az e excentricitás értékével lehet változtatni.

Az aszimmetria növekedésével egyre erősebben jelentkeznek az f frekvenciájú oszcilláció $2f$, $3f$, ... felharmonikusai a Fourier spektrumban és a wavelet térképen. Ez várható is volt.

3. Kíváncsiak voltunk, hogy mit mutat a wavelet módszer a fedési kettőscsillagok esetében. A fénygörbéket a BINMAKER (Bradstreet 1993) programmal állítottuk elő. A Fourier spektrumban megjelenő jellegzetes felharmonikusok és "felező csúcsok" a waveleten is megfigyelhetők, de itt erősen hullámosan. Ennek oka a már említett fontos tulajdonsága a wavelet módszernek: a rövidebb periódust keskenyebb ablakkal keressük. Különösen az Algol típus példáján látszik jól, hogy a mély, keskeny minimumok idején a nekik megfelelő rövid periódusnál igen nagy amplitudó jelentkezik (5 főminimum -> 5 éles gerinc a térképen).

4. Mivel a valóságban mérési hiba nélküli észlelések nincsenek, megvizsgáltuk mi történik akkor, ha a szinuszhullámot különböző mérték fehér zajjal terheljük. A jelentős, 1-hez közeli jel/zaj többször előfordul a gyakorlatban. A kis amplitudójú delta Scuti csillagok fotometriája során a mintegy 0,01 magnitúdós mérési pontossággal sokszor azonos nagyságrendű a kimutatandó fényváltozás. Az amatőr csillagászok által végzett megfigyelések pontossága is kb. ilyen jel/zaj értékre vezet az adatsorban az átlagolás után. Mint látható, a zaj megjelenése a wavelet térkép alakjában nem okozott lényeges torzulást, ami megnyugtató, hiszen a hosszúperiódusú csillagok esetében a feldolgozásoknál elsősorban amatőr csillagászok észleléseire kell támaszkodnunk. Megemlítjük, hogy a Fourier tanszformáció alkalmazásánál is az adatsor hossza lényegesebb, mint az egyes megfigyelések pontossága (pl. Perez de la Blanca and Garrido 1981, Szatmáry and Vinkó 1992).

A kis zajjal terhelt adatsorról elmondható, hogy térképe nem különbözik jelentősen a zaj nélkül készített térképtől. Megfigyelhető, hogy a zaj miatt a nagyfrekvenciás részen kissé kicsipkéződnek a szintvonalak, hullámossá válik a térkép. Az egy, stabil módus esetén a wavelet semmi újat nem mutat a Fourier módszer eredményéhez képest.

5. Erős fehér zaj esetén a wavelet térkép teljesen eltorzul, ilyenkor a Fourier spektrumot célszerű használni.

6. Ha a mintavételezés csak gyengén nem egyenletes, a Fourier spektrum alig változik, a wavelet térképen pedig csak enyhe fodrozódás jelentkezik a nagyobb frekvenciáknál.

7. A wavelet módszernek a fénygörbe lokális tulajdonságaira való rendkívüli érzékenysége tapasztalható a hiányos adatsoroknál. Míg a hagyományos frekvencia spektrumnál a főcsúcs kiszélesedése és (a spektrál ablak függvény által is jelzett) alias csúcsok megjelenése látszik, a wavelet térkép radikálisan változik, attól függően, hogy hol milyen az adatok lokális eloszlása. A nagyobb üröknél a tesztbeli periódus amplitudója alaposan lecsökken, ugyanakkor rövidebb periódusoknál mintha jelentős amplitudót találna. Pedig csak arról van szó (ld. 41. c) megállapítást), hogy minden ürnél megjelenik a "vég-gerinc".

8. Ez utóbbi effektus különösen erősen jelentkezik, és jól tanulmányozható, ha az adatsor közepén egy ürt (gap) generálunk. A jellegzetes gerinceken kívül az ürt idejénél gödrök is megjelennek. A Fourier spektrumban a főcsúcs felhasad, tarajossá válik. Mivel a gyakorlatban a csillagok fénygörbéjében nagyon gyakoriak a kisebb-nagyobb ürök, e teszt eredménye mindig szem előtt tartandó!

9. Szintén gyakoriak az adatsorokban a szezonális (napi, havi, évszakos), periodikusan jelentkező ürök. Ezek hatására a wavelet térképen periodikus vég-gerincek jelennek meg. A Fourier spektrumban is jelentkező, hosszú periódushoz tartozó csúcs a maradék adatok eloszlására jól illeszkedő hullám eredménye.

10. A wavelet technikának a Fourier módszerrel szembeni nagy előnye tapasztalható az amplitúdómoduláció esetében. Míg a frekvencia spektrumban csak (bár igaz, jellegzetes) frekvencia felhasadás figyelhető meg, a wavelet térképről leolvasható a moduláció szerinti amplitúdó változás.

11. Ezt a tesztet azért készítettem, hogy az előzővel való összehasonlításakor rámutassak egy fontos tényre. Mind a Fourier mind a wavelet igen érzékeny az adatsor végeinél lévő trendekre. Ha az amplitúdó a végeken csökkenő, az oldalsávok illetve a vég-gerincek magassága jelentősen lecsökken (ez kedvező, bár ekkor a főcsúcs kissé szélesebb lesz), és fordítva. Persze ez a Fourier analízisnél már régóta ismeretes, hiszen éppen ezért használnak időnként a derékszög négyszögablak helyett más alakúakat (pl. Hann-, Hamming-, Blackman-, háromszög-ablak) melyekkel az eredeti adatsort transzformálva, lecsengő amplitúdó érhető el (pl. Hesselmann 1985).

12. Ha egy monoperiodikus változócsillag kettős rendszerben kering, a megfigyelhető ciklushossz a pályaperiódus szerint modulált (fény-idő effektus).

A bemutatott ábra alapján látható, hogy a frekvenciamodulált rezgés Fourier spektruma felhasad (pl. Szatmáry 1987), míg a wavelet térképe tükrözi a pillanatnyi frekvencia változását. Mindazonáltal a csillagok fényváltozásában a frekvenciamoduláció kimutatása nagyon nehéz, hiszen az esetek többségében a modulációs mélység nem túl jelentős. A frekvenciaváltozás kimutatása csak jó minőség (kis zajjal terhelt, folyamatos, lehetőleg fotoelektromos) adatok alapján lehetséges.

Számos mira és félszabályos változócsillag esetén figyelték meg, hogy a fényváltozás amplitúdója ciklusról ciklusra változik. A hagyományos eljárások segítségével az amplitúdómodulációt csak nagyon nehezen lehetett nyomon követni. Az ún. moving window technika lényege (Howarth 1991) pl. az volt, hogy az adatszegmensek Fourier spektruma alapján próbálták a legnagyobb amplitúdójú komponens amplitúdóváltozását nyomon követni. Ha azonban a pulzáció frekvenciája pl. ciklikusan változik, úgy egy stabilnak feltételezett frekvencia amplitúdójának nyomon követésével amplitúdómodulációhoz hasonló jelenséget tapasztalunk. A wavelet eljárással a két effektus világosan különválasztható, fel kell azonban hívnunk a figyelmet arra a körülményre, hogy a vizsgált periódus amplitúdója igen érzékenyen függ az adatok eloszlásától, ezért az amplitúdó változásának kimutatásához folyamatos adatsorra, vagy igen gondos fehérítésre van szükség.

13. A kettős rendszerekben keringő pulzáló változócsillagoknál felléphet a fázisugrás (phase jump) jelensége, amit néha az O-C diagram jelezhet (Szabados 1989, 1991). A fényváltozás fázisa hirtelen megváltozásának megbízható kimutatása rendkívül nagy jelentőség lenne mind a félszabályos, mind az egyéb típusú pulzáló csillagok esetében, hiszen fontos információkat adhatna a pulzáció mechanizmusára és a csillag szerkezetére vonatkozóan. A fázis változása a hagyományos eljárásokkal nem tanulmányozható, így eddigi ismereteink szerint még egyetlen SR csillagnál sem sikerült ezt a jelenséget kimutatni.

Az erre vonatkozó teszt szerint a fázisugrás mértékétől függően a Fourier spektrum csúcsa felhasad és eltolódik. Már láttuk, hogy a wavelet eljárás mennyire érzékeny a lokális tulajdonságokra. Itt is kitűnik, hogy a fázisugrás idején radikálisan megváltozik az amplitúdó, nagyfrekvenciás részen jellegzetes gerinc és egyes esetekben az ugrás idejénél gödör jelenik meg. A fázis megváltozásának értékétől függ a létrejövő "domborzat" szerkezete.

14. A félszabályos és a delta Scuti csillagok esetében is gyakran megfigyelhető, hogy egyes periódusok aránylag erősen változnak az időben. Ennek kimutatása is igen fontos számunkra. Eddig az O-C diagramon kívül nem nyílt mód annak eldöntésére, vajon a változás lineáris, periodikus vagy szabálytalan.

A folyamatos periódusváltozás teszteléséből látható, hogy a Fourier csúcs eltolódik és kiszélesedik, amplitúdója lecsökken. Ezzel szemben a wavelet térképről leolvasható a valódi jelenség: állandó amplitúdó mellett folyamatosan nő a periódus (a "hegy" szélessége csökken az 1. a) megállapításnak megfelelően).

Meg kell jegyezni, hogy a valóságban a csillagfejlődésből származó folyamatos periódusváltozás a tesztbelieknél nagyságrendekkel kisebb mértékű így ennek kimutatása a wavelet módszerrel csak igen hosszú és jól mintavételezett adatsoroknál remélhető.

15. Különösen a hosszúperiódusú pulzáló csillagok esetében gyanítható, hogy a pulzációt számos véletlenszerű jelenség befolyásolhatja, melynek következtében a periódus ciklusról ciklusra változhat.

Az ezt modellező fénygörbék Fourier spektrumában több csúcs jelenik meg, nem szimmetrikusan a főcsúcs két oldalán. A wavelet - megint a letapogató jellegének megfelelően - az aktuális periódus szerint változik. Legjobban a legrövidebb periódusú ciklusok azonosíthatók, mert ekkor a nagyfrekvenciás részbe nyúló gerincek jelentkeznek.

16. Gyakran fordul elő, hogy a vizsgált csillagnál kettő, néha több periódus egyidejű jelenléte figyelhető meg, ezért ennek az esetnek a tanulmányozása rendkívül fontos számunkra.

Az 1. a) megállapítás szerinti tulajdonság, hogy a nagyobb frekvenciák felé nő a csúcsok szélessége, itt is jól látható. Ennél az esetnél a két frekvencia elég távol van egymástól, mindegyik amplitúdóarány mellett jól megkülönböztethetők.

17. Közelítve egymáshoz a frekvenciákat, jelentkezett egy probléma: a kisebb amplitúdójú, rövidebb periódusú hullámhoz tartozó "hegygerinc" kissé amplitúdó-moduláltnak tűnik, szemben a valósággal. A jelenséget a két periodikus komponens szélsőértékeinek egymáshoz viszonyított pozíciója illetve ennek időbeli változása magyarázza. Ennél a teszt fénygörbénél a 90, 180, 280, 370 és 470 időegység közelében válik a két rezgés eredője "hegyessé", ekkor talál a wavelet módszer aránylag nagyobb amplitúdójú rövid periódust.

Nagyon vigyázni kell, nehogy ezt a jelenséget egy csillag analízisének az egyik módus amplitúdómodulációjának tulajdonítsuk!

18. Két, nagyon közeli frekvencia esetén a wavelet térképen összeolvad a két gerinc. A fellépő lebegés jelensége válik dominánssá, különösen a hasonló amplitúdók mellett. A wavelet eredménye hasonló az amplitúdómodulációnál kapotthoz, míg a Fourier spektrum "hozza" a két komponenst.

Érdekes, hogy a lebegés minimális amplitúdójú részénél a wavelet hegy lecsökkenése frekvenciában nem szimmetrikus, a kisebb frekvenciáknál marad egy átkötés.

19. Néhány csillag fénygörbéje alapján (pl. AF Cyg, TX Dra, RV And, S Aql, U Boo) gyanítható, hogy módusváltások következnek be az alap és az első felharmonikus, vagy az első és a második felharmonikus között, tehát ezt a tesztet is kitüntetett figyelemmel kell kezelnünk.

A módusváltást úgy modelleztük, hogy az adatsor első és a második felében is jelenlévő két komponens az adatsor közepén amplitudót cserél. A periódusarányt pontosan kettőnek vettük, ehhez hasonló érték gyakori a félszabályos változóknál. A Fourier spektrum két, lefelé jelentősen kiszélesedő csúcsot mutat. Látható, hogy a wavelet térkép alapján a jelenség könnyen azonosítható, így elegendően hosszú és jól mintavételezett adatsorok birtokában az esetleges módusváltás kimutatására lehetőség nyílhat.

E tesztnél megfigyelhető, hogy a módusok közötti fáziskülönbség értéke csak a kisfrekvenciás részt befolyásolja, azt is kevésbé.

20. Az amplitudóarány csökkentésével egyre erősebben jelentkezik a két stabil módusnál már tapasztalt "gödörsor" a két tesztbeli frekvencia között, ugyanakkor a módusváltás idején a két fő hegyet egy egyre alacsonyabb gerinc köti össze.

21. Az autoregresszív mozgó átlag (ARMA) folyamatokkal régóta próbálják modellezni a félszabályos változócsillagok fénygörbéjét (pl. Scargle 1981, Whitney 1984).

Az ARMA folyamatoknál a függvény értékét néhány előző pont értékének lineáris regressziójaként állítjuk elő, és véletlen tagokat (fehér zajt) adunk hozzá. Az ARMA(p,q) folyamat (p és q a rend mértéke; Tusnády és Ziermann 1986):

$$m(t) = c_1 m(t-1) + c_2 m(t-2) + \dots + c_p m(t-p) + \sigma e(t) + \\ + b_1 e(t-1) + b_2 e(t-2) + \dots + b_q e(t-q)$$

AR(2), MA(1) és ARMA (2,1) folyamatokat generálva, az együtthatók értékének változtatásával, ugyanazon véletlen számsor alkalmazása mellett a félszabályos csillagok fénygörbéjéhez nagyon hasonló ábrákat kaptunk. A c_1 értékektől függ, hogy milyen ciklushosszak szerepelnek nagyobb amplitudókkal. A Fourier spektrum és a wavelet térkép is csak arra tud utalni, hogy a teljesítmény főleg milyen frekvencia tartományban van. A tiszta fehér zaj esetén megfigyelhetjük, hogy a wavelet térkép domborzatának jellegét alapvetően a konkrét véletlen számsor határozza meg.

III.3. Az alkalmazhatóságról

A tesztek alapján arra következtethetünk, hogy a wavelet analízis sok esetben lényegesen több információt ad a hagyományos, teljes adatsorra történő Fourier módszernél. Mindazonáltal a fénygörbe alapos szemlélése után először a Fourier spektrumot és a spektrál ablak függvényét számítjuk ki.

A fénygörbe, a frekvencia spektrum és a kimutatni kívánt jelenségek alapján kell megválasztani az analízáló wavelet függvényt, mely meghatározza az időbeli és frekvenciabeli felbontást.

Mivel a wavelet analízis eredménye rendkívül érzékeny az adatsor eloszlásának tulajdonságaira, főleg az ürokre, a lehető legteljesebb mintavételezésre kell törekedni. Ha mégis van egy-két ür, néhány adathiányos időszak, és egyenetlen a pontok közötti időbeli távolság, a térkép vizsgálatát speciális fehérítéssel kell kezdeni. Ennek lényege, hogy az eredeti időpontokban egy stabil szinuszt generálunk (melynek periódusát általában a Fourier spektrum alapján választjuk ki), így az adatsor eloszlásából és végességéből származó effektusokat a wavelet térképen azonosíthatjuk.

A wavelet térkép értelmezésénél nagyon óvatosan és körültekintően kell eljárunk, nehogy hamis következtetéseket tegyünk. Természetesen minden, a térkép alapján tett megállapítást az eredeti fénygörbével össze kell vetni, le kell ellenőrizni.

Különösen hatékony a wavelet, ha az adatsor lokális tulajdonságait akarjuk vizsgálni. A hirtelen periódus-, fázis- és amplitudóbeli változásokat eddig egyetlen elterjedt módszer sem tudta kimutatni.

A pulzáló változócsillagokra szorítkozva a következő, igen fontos jelenségek tanulmányozásánál ajánljuk a wavelet technikát (szem előtt tartva az említett nehézségeket):

- amplitudómoduláció
- frekvenciamoduláció
- fázisugrás
- módusváltás

Ezeket, szemben az eddigi módszerekkel, itt minőségileg, sőt egyes esetekben mennyiségileg is jellemezni lehet.

A wavelet térkép értelmezését nehezíti, hogy a csillagok fényváltozásában általában egyszerre több, a tesztekben külön-külön vizsgált tulajdonság jelentkezik.

Bár a tesztek során próbáltuk a csillagok fényváltozását meghatározó összes fontosabb jellemzőt sorbavenni, szükséges az eljárás további tesztelése.

Véleményünk szerint a wavelet analízis komoly minőségi fejlődést hozhat a csillagászatban, az idősorok analízise szempontjából a változócsillagok kutatása terén. Ezt kívánjuk bemutatni a következő részben, néhány SR csillag példáján keresztül.

IV. A wavelet analízis alkalmazása

A wavelet analízis alkalmazása a csillagok valamely jellemzőjének időbeli változására egészen újnak számít, alig néhány éve kezdődött el. Ugyanakkor, az a néhány cikk, amelyben felhasználták, jelentős eredményeket hozott a korábbiakhoz képest.

A napfizikában a wavelet módszer nem csak az oszcillációk vizsgálata során kaphat szerepet, hanem a naptevékenységi (pl. napfolt) ciklusok elemzésénél is (Ochadlick et al. 1993).

A változócsillagok területén olyan objektumok vizsgálatánál célszerű az eljárás használata, amelyek adatsora sok cikluson keresztül jól mintavételezett. Jelenleg az SS Cyg törpenóva példáján keresztül kipróbálom a módszer felhasználását e csillagtípusra is.

A pulzáló csillagokra szorítkozva, a wavelet analízis alkalmazásáról a következőket mondhatjuk:

1. A nagyon rövid (néhány perces) periódusú csillagok esetében már egyetlen éjszaka során kapott, akár 100 ciklust is tartalmazó fénygörbék elemzéséhez is felhasználható. Két ZZ Ceti típusú pulzáló fehér törpe analíziséből (Goupil et al., 1991) kiderült, hogy a fő fényesség-hullámmódosítás amplitúdója lassan változik, illetve sikerült kimutatni egy kisebb amplitúdójú periodicitást is. A gyorsan oszcilláló Ap színektípusú (roAp) csillagok esetében is hasonló, új eredmények várhatók, nem értem, miért nem alkalmazzák már rájuk a módszert azok, akiknek az adatsorok rendelkezésére állnak.

2. A közepes (néhány órás-néhány napos) periódusú delta Scuti, RR Lyrae és cefeida csillagoknál gyakorlatilag nincs időben folytonos, tíz periódusnál hosszabb, és ciklusonként legalább 5-10 mérési pontot tartalmazó fénygörbe. Ugyanakkor e csillagok esetében gyakori az aránylag stabil, monoperiodikus fényváltozás, és a viszonylag jól mintavételezett O-C diagram. Utóbbiak wavelet analízise a periódusváltozás esetleges időbeli tulajdonságairól adhat új információt.

3. A hosszú periódusú változóknál nagy lehetőségek vannak az idő--frekvencia módszer alkalmazására. A W Virginis típusú, 22 nap periódusú RU Cam esetében sikerült olyan adatsort összegyűjteni, ami alkalmas volt a wavelet analízisre (Kolláth and Szeidl 1993), és amely eredménye szerint a csillag fényváltozása erősen amplitúdó- és frekvenciamodulált.

Sok SR és RV Tauri csillag rendelkezik 100 napnál rövidebb periódussal. Ezekről nehéz hosszú és sűrűn mintavételezett fotoelektromos fénygörbét beszerezni. (Most dolgozom az SRd típusú, 64 nap periódusú V441 Her elemzésén.)

A mintegy 100 napnál nagyobb ciklushosszú csillagokról alig vannak fotoelektromos fotometriai adatsorok. Ezért a wavelet analízishez vizuális megfigyeléseket tartalmazó adatbankokból (MCSE, AFOEV, AAVSO) szereztünk be hosszú időt átfogó fénygörbéket.

A következő csillagokat vizsgáltuk wavelet módszerrel:

	<u>Csillag</u>	<u>Típus</u>	<u>Referencia</u>
1.	VX And	SRa	[5]
2.	UU Aur	SRb	[5]
3.	R Boo	M	[5]
4.	V Boo	SRa	[5], [9]
5.	ST Cam	SRb	[5]
6.	R Cas	M	[5]
7.	VZ Cas	M	[5]
8.	W Cep	SRc	[5]
9.	SS Cep	SRb	[5]
10.	o Cet	M	[5]
11.	RS Cnc	SRb	[5]
12.	V CrB	M	[5]
13.	V CVn	SRa	[5], [9]
14.	Y CVn	SRb	[5]
15.	R Cyg	M	[5]
16.	W Cyg	SRb	[7], [9]
17.	RS Cyg	SRa	[9]
18.	AF Cyg	SRb	[8], [9]
19.	R Dra	M	[5], [6]
20.	S Dra	SRb	[5]
21.	RY Dra	SRb	[9]
22.	TX Dra	SRb	[5], [9]
23.	AH Dra	SRb	[5], [9]
24.	T Her	M	[5]
25.	X Her	SRb	[5]
26.	UW Her	SRb	[5]
27.	R Leo	M	[5]
28.	Y Lyn	SRc	[1], [3], [4]
29.	W Lyr	M	[5]
30.	U Ori	M	[5]
31.	S Per	SRc	[5]
32.	W Tri	SRc	[5]
33.	S UMa	M	[5], [6]
34.	T UMa	M	[5], [6]
35.	Y UMa	SRb	[5]
36.	Z UMa	SRb	[2], [4], [9]
37.	RY UMa	SRb	[5]
38.	ST UMa	SRb	[5]

[1]: Szatmáry 1991

[2]: Szatmáry és Gál 1992

[3]: Szatmáry and Vinkó 1992

[4]: Szatmáry and Gál 1992

[5]: Kaszás és Kiss 1992

[6]: Kaszás, Kiss és Szatmáry 1993

[7]: Gál és Szatmáry 1993a

[8]: Gál és Szatmáry 1993b

[9]: Gál and Szatmáry 1993c

Mindegyik csillag esetében a wavelet térkép alapján lényegesen többet lehetett megállapítani a fényváltozásáról, mint a hagyományos Fourier spektrumból.

Kilenc SR csillagról kimutattuk (Gál and Szatmáry 1993c), hogy az átlagfényességük mintegy 0,1 magnitudoval, néhány ezer napos ciklushosszal változik, mely valószínűleg nem pulzációs eredet. A Fourier frekvencia spektrum csúcsai több esetben felhasadtak, amit - John Percy professzor tanácsára, erre a jelenségre vonatkozó modellszámításaink alapján - a pulzációs periódusok hosszának ciklusról ciklusra történő, véletlenszerű fluktuációja okozhat.

A TX Dra és az AF Cyg fénygörbéjének wavelet térképéből módusváltásra következtettünk (Gál and Szatmáry, 1993c), melyet a teljes adatsor feldarabolása után végzett Fourier analízis megerősített. További vizsgálatok szükségesek még annak megállapításához, hogy ezekben az esetekben valójában pulzációs módusok (rezonancia miatti) gerjesztődésének időbeli változását látjuk, vagy esetleg kaotikus pulzáció következtében fellépő bifurkációs jelenséggel magyarázható a fénygörbe viselkedése.

A vörös óriásoknál a pulzációt még sok egyéb, sokszor véletlenszerű hatás is befolyásolhatja, például a konvekció és a lökeshullámok. A csillag mért fényességének változásához vezethet a - több ilyen csillag körül már kimutatott - többé-kevésbé összefüggő porburok.

A csillagok fényváltozásának interpretációjához a fotometria mellett nagyon fontosak a spektroszkópiai vizsgálatok. A színképvonalak elemzéséből, a radiális sebesség görbének a fénygörbével való összevetése alapján lényegesen biztosabb következtetéseket lehet levonni a pulzációról vagy más jelenségről. Sajnos alig akad példa arra, hogy SR vagy mira csillagról rendszeresen színképeket készítsenek.

Ezen értekezésben terjedelmi okok miatt csak három SR csillag részletes analízise szerepel (V Boo, V CVn, Z UMa) melyekhez a korábbi, általunk végzett feldolgozásoknál hosszabb fénygörbéket, francia (AFOEV) adatbázisból és amerikai (AAVSO) táblázatokból vett megfigyeléseket is felhasználtunk. E vizsgálat során abból a célból, hogy az adatsor végességének és a mintavételezés egyenetlenségeinek a wavelet térképre gyakorolt hatásait kiküszöböljük, új módszert alkalmaztam.

A módszer a következő:

A Fourier analízisből meghatározzuk a fénygörbére jellemző egy vagy több pulzációs periódust, amplitudót és fázist. Ezekkel a harmonikusokkal az eredeti, megfigyelési időpontokban "fit" fénygörbét generálunk, majd ennek elkészítjük a wavelet térképét. Ez a térkép tartalmazza az adatsor véges voltának és időbeli eloszlásának a detektálható amplitúdó-felületre gyakorolt hatását (a Fourier transzformációnál használatos spektrál ablakhoz hasonlóan).

Ezután összevetjük a valódi "csillag" és a "fit" wavelet térképeket. Ha képezzük a csillag-fit különbséget az idő-frekvencia tartományban, megláthatjuk, hogy hol és mikor van többlet a fithez képest a csillag amplitudójában. Ezen a felületen jól kitűnnek a gyakorta előforduló, lassú átlagfényesség változás miatti csúcsok a kis frekvenciáknál, és a megfigyelési hibák következtében megjelenő "dombok" a nagyobb frekvenciáknál (ld. a tesztek eredményét).

A fit-csillag különbségi wavelet térképéből megállapítható, hogy mikor "erősebb" a fit, mikor nem éri el a csillag fényváltozásának amplitudója a stabil, fit jel amplitudóját.

Természetesen megtehető a Fourier technikában használatos idő tartománybeli előfehérítés is, és a maradvány térképek vizsgálata. Ekkor azonban a fehérítő harmonikus fázisának értékét a módszerrel meghatározhatónál pontosabban kellene tudnunk.

Ha egy módusnál jelentős periódusváltozás áll fenn, a különbségi térképekből kitűnik. E jelenségre hasonlóan informatív a "gerinc" (ridge) technika (pl. Ochadlick et al. 1993), amikor a wavelet térképen egy vonallal bejelölik egy ciklushosszhoz tartozó "hegyvonulat" tetejét.

Egy periódus amplitudómodulációját csak a fit térkép felvétele után keressük. Erre a következő eljárást végezhetjük:

Mind a "csillag" mind a "fit" wavelet térképnek elkészítjük egy metszetét a vizsgálandó ciklushossz frekvenciája mentén. Mivel a periódus általában kissé ingadozik, ne csak egy frekvenciaértéknél vágjuk át a felületet, hanem egy - a fluktuáció mértékét tartalmazó - frekvencia intervallumban integráljuk össze az amplitudót. Ezután külön ábrázoljuk a metszeteket, az amplitudó időbeli változását. A vizsgált ciklushossznak a valószínűsíthetően valódi, az adateloszlás hatásától torzítatlan amplitudóváltozását a csillag-fit különbség szolgáltatja.

IV.1. V Boo

142539	HD 127335	SAO 64180	BD+39° 2773	HIC 70885	SRa
$\alpha_{2000} = 14^h 29^m 45^s$ $\delta_{2000} = +38^\circ 51' 39''$					
Max = 7,0 magn. Min = 12,0 magn. (fotografikus, GCVS) Max = 7,6 magn. Min = 10,4 magn. (vizuális) V = 7,89 magn. B-V = +1,56 magn. (Sky Catalogue 2000.0) 12 μ m=41,72 25 μ m=14,42 60 μ m=2,16 100 μ m=1,00 Jansky IRC +40257 (IRAS Point Source Catalog) Spektrum: M6e RV= -38 km/s Periódus: 258, ^d 01 var. Epocha: JD 2444780 M-m = 0,49 (GCVS)					

1. táblázat

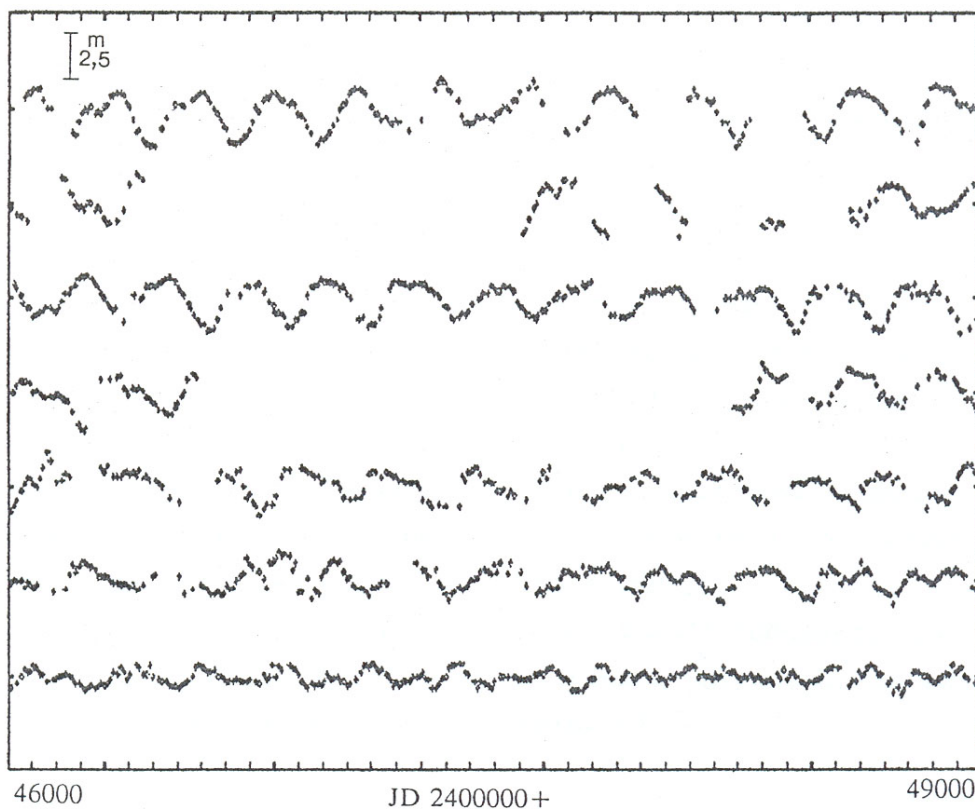
Az 1912-1943 időszak (45 ciklus) adatait elemezve Fritzová és munkatársai (1954) azt találták, hogy a V Bootis fő fényváltozási periódusa 248 és 264 nap között változik (átlagosan 257,5 nap). Szerintük a maximumban és a minimumban mért magnitúdó érték 2080 nap körüli ciklushosszal változik, és ezzel szinkronban oszcillál a pulzációs periódus (P) értéke is. Ilyen, közel 8P ciklusra utalt Wood (1976) is. Lacy (1973) O-C diagramot készített az 1904-1969 időszak AAVSO adataira. A lefelé nyíló parabolához hasonló görbére jelentős, véletlenszerűnek tűnő hullámmás rakódik rá. Percy et al. (1990) az 1900 és 1975 közötti AAVSO adatsor analiziséből a fényváltozás teljes amplitudójának 3 magnitúdóról 2-re való csökkenését mutatta ki, és P=257,97 nap periódust határozott meg.

A rendelkezésünkre álló magyar (PVH ill. MCSE) észleléseket régebbi francia (AFOEV, Strasbourg-i adatbank) és amerikai (AAVSO Quarterly Reports No.18-27) adatokkal egészítettük ki. A különböző forrásokból származó értékek korrekciójára nem volt szükség.

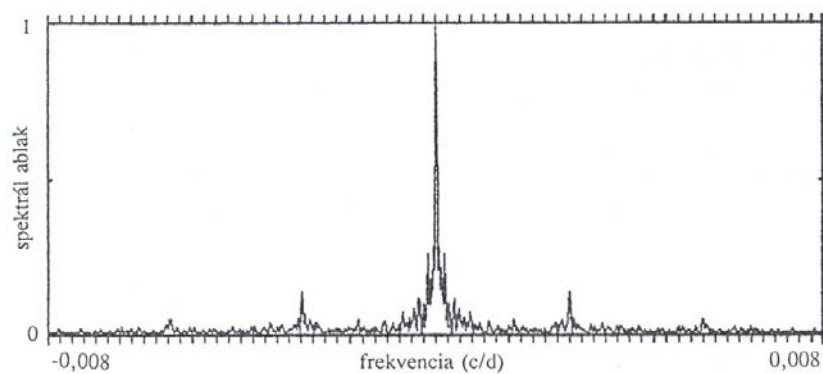
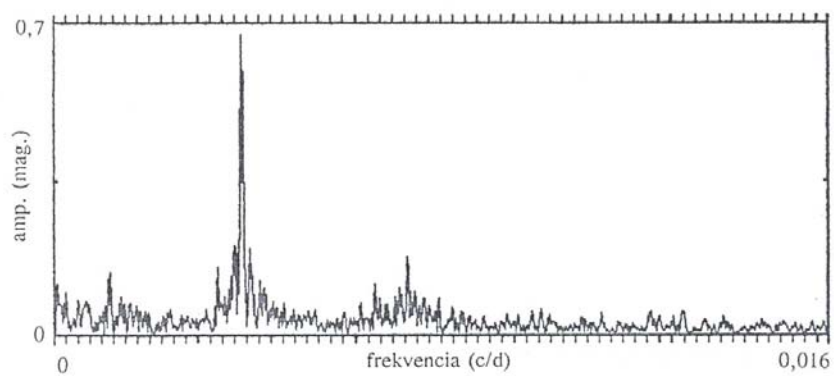
Az 1935 és 1992 közötti teljes adatsor (JD 2428050-2448990) 20940 nap hosszú és a 10 naponkénti átlagolás után 1443 pontot tartalmaz. Két nagyobb űr van a fénygörbében (30. ábra), JD 2431420-2432590 (1170 nap) és JD 2437590- 2439240 (1650 nap). Ezekon kívül néhány kisebb, egy periódusnál rövidebb hiány található az adatsorban. Az átlagfényesség: $\langle m \rangle = 8,75$ magnitúdó.

28000

31000



30. ábra: A V Bootis fénygörbéje (10 napos átlagok, N=1443)



31. ábra: A V Bootis Fourier amplitúdó spektruma és a spektrál ablak

Először elkészítettük a teljes időszak Fourier frekvencia spektrumát és spektrál ablak függvényét (31. ábra). Ennek alapján két periódus mutatható ki: $P_1 = 257,^d66$ és $P_2 = 137,^d2$ értékkel.

A hosszabb periódus kettős csúccsal jelentkezik, ennek oka feltehetően a periódus kismérték változása, amit a szegmensek spektruma alátámaszt. A rövidebb periódusnál is számos csúcs található, jelezve e ciklus instabilitását.

Fontos megjegyezni, hogy a korábban említett hosszú periódus nem mutatható ki. A 870 napnak megfelelő frekvenciánál lévő csúcs a fő komponens 1 1/év alias-a (ld. spektrál ablak).

A fénygörbén is jól látható, hogy a vizsgált időszakban csökken a változás amplitudója. A fénygörbét 4 részre osztottuk, és az egyes szakaszokat külön analizáltuk (2. táblázat).

JD	N	<m>	$P_1(d)$	$A_1(m)$	$P_2(d)$	$A_2(m)$
1. 28050-31420	245	8,84	257,7	1,11	138,6	0,33
2. 32590-37585	387	8,87	257,7	0,90	138,2	0,25
			133,1	0,23		
3. 39240-45500	479	8,54	259,3	0,55	136,8	0,16
4. 45500-48620	331	8,7	252,8	0,28	135,4	0,26

2. táblázat

Az első szakaszon aránylag szabályos a fényváltozás. A második részen a hosszabb periódus értéke nem változik csak az amplitudója csökkent bő 0,2 magnitudót, a rövidebb ciklus pedig kettős csúccsal jelentkezik. Eddig az átlagfényesség nem változik.

A harmadik szakaszon a P_1 kissé nő, amplitudója erősen lecsökken, már csak fele a kezdeti értéknek. Ezzel együtt a P_2 amplitudója is csökken, az átlagfényesség pedig kicsit nagyobb.

Végül a negyedik szegmensben a P_1 értéke jelentősen lecsökken, és egyre kisebb az amplitudója. A P_2 erőssége viszont nő, a két ciklus egyforma amplitudójú.

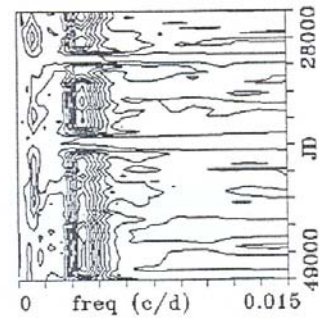
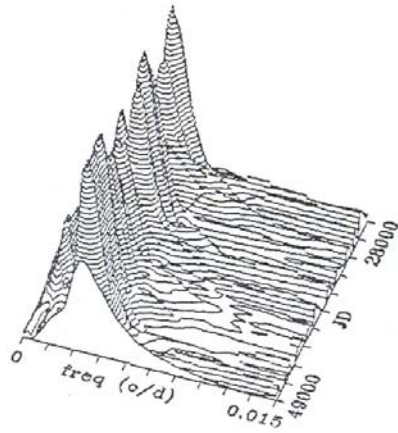
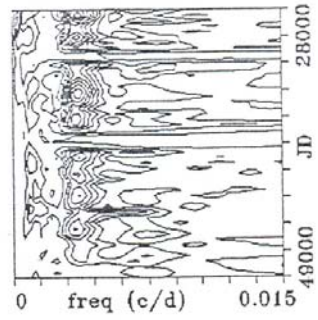
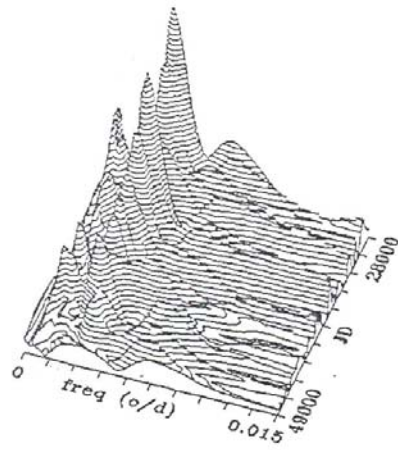
A szakaszokon belül a periódus meghatározásának pontossága mintegy 2 nap, így csak az ezt meghaladó eltérések esetén vehetjük valószínűnek a periódus megváltozását. A többszörös periodicitás miatt a V Boo esetében az O-C diagram használata nem segíthet e kérdésben.

Ezután elkészítettük a teljes adatsor wavelet térképét, valamint az előző részben leírt módon a "fit" térképet ($P_1 = 258^d$, $A_1 = 0,7^m$; $P_2 = 137^d$, $A_2 = 0,2^m$). Mindkét amplitudó felület a legmagasabb csúcsa szerint 1-re normált. A 32. ábrán láthatók a perspektivikus és a felülnézeti wavelet térképek (felül a "csillag", alatta a "fit"). Ezek kiszámításánál 50 frekvencia értéket és 50 időbeli eltolást alkalmaztunk.

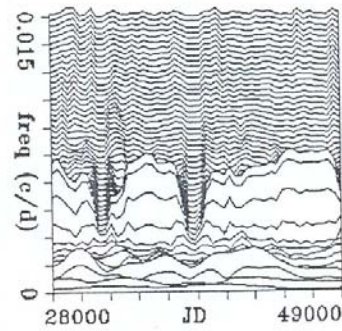
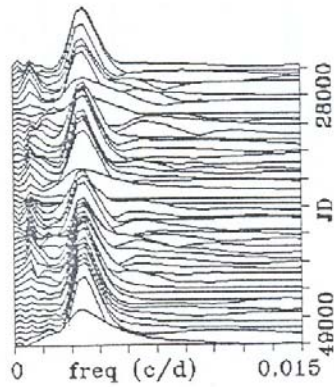
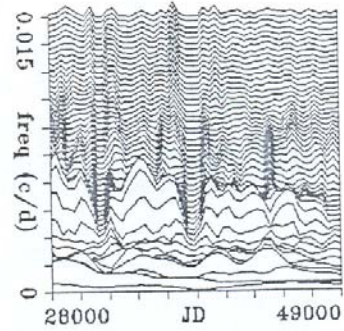
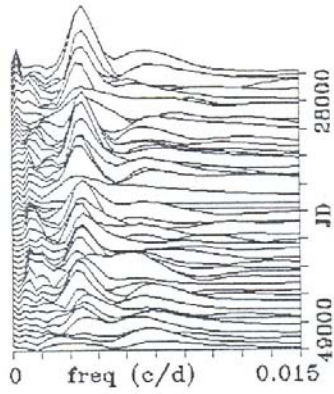
A 33. ábra a felületek oldalnézeteit tartalmazza, melyek segítségével egy-egy időablakon belüli amplitudó spektrum (balra), illetve egy-egy frekvencia időbeli változása figyelhető meg.

A finomabb részletek tanulmányozása céljából elkészítettük az 50 x 100 -as (frek. x idő) felülnézeti térképeket színes szintvonalazással. A 34. ábrán szerepel felülről lefelé a csillag, a fit, a fit-csillag és a csillag-fit wavelet térkép.

A második képen szépen látszanak az adatsor végességéből és az adateloszlásból származó hatások. A két nagy ürről kívüli kisebb adathiányok idején is jelentősen lecsökken a fit térképen az amplitudó.



32. ábra



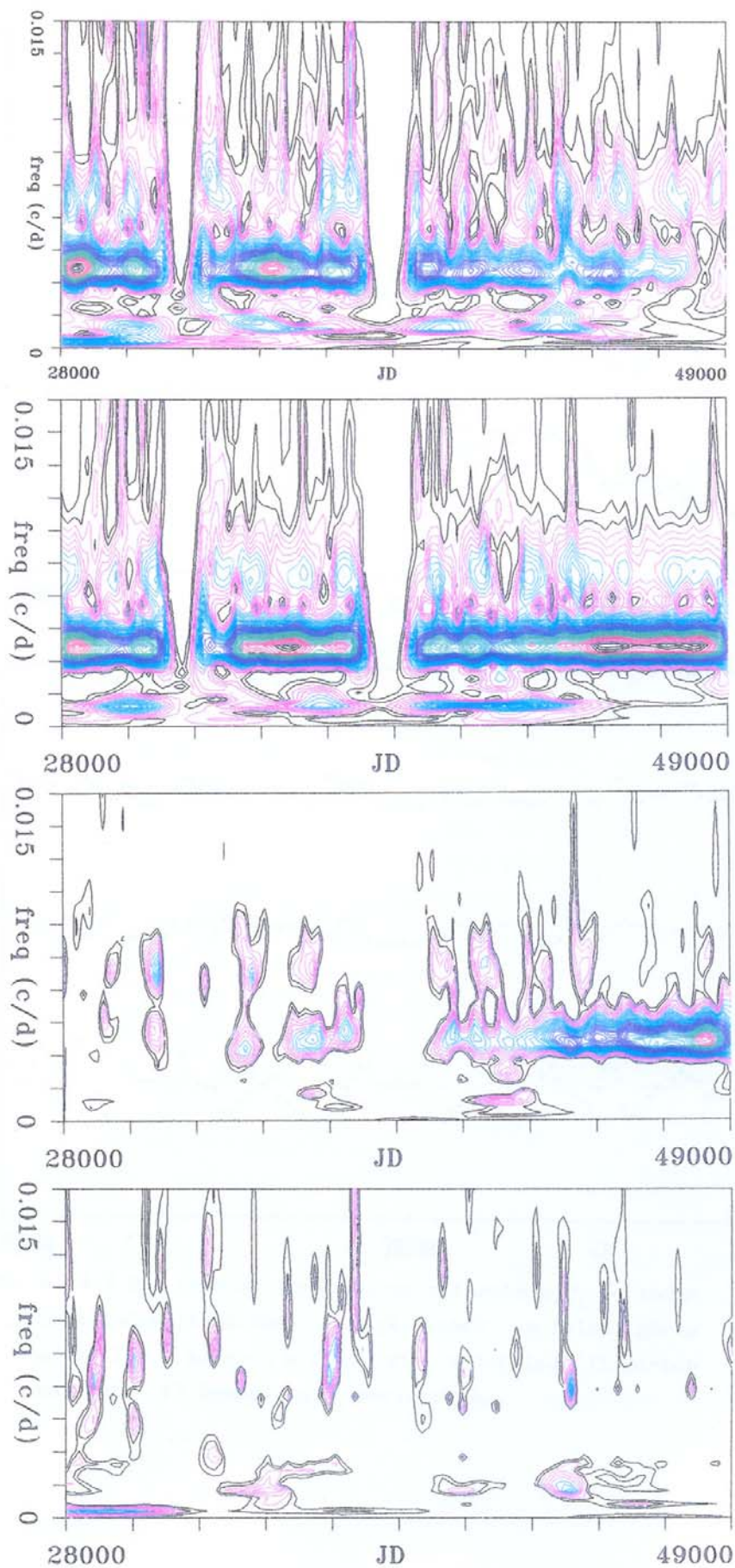
33. ábra

A harmadik, fit-csillag térkép mutatja a stabil módusokhoz képesti "teljesítményhiányt". Látható a hosszabb (P_1) periódus radikális amplitudó csökkenése, és a rövidebb (P_2) periódusnak főleg a 3. szakaszban - már a Fourier módszerrel kimutatott - kisebb amplitudója.

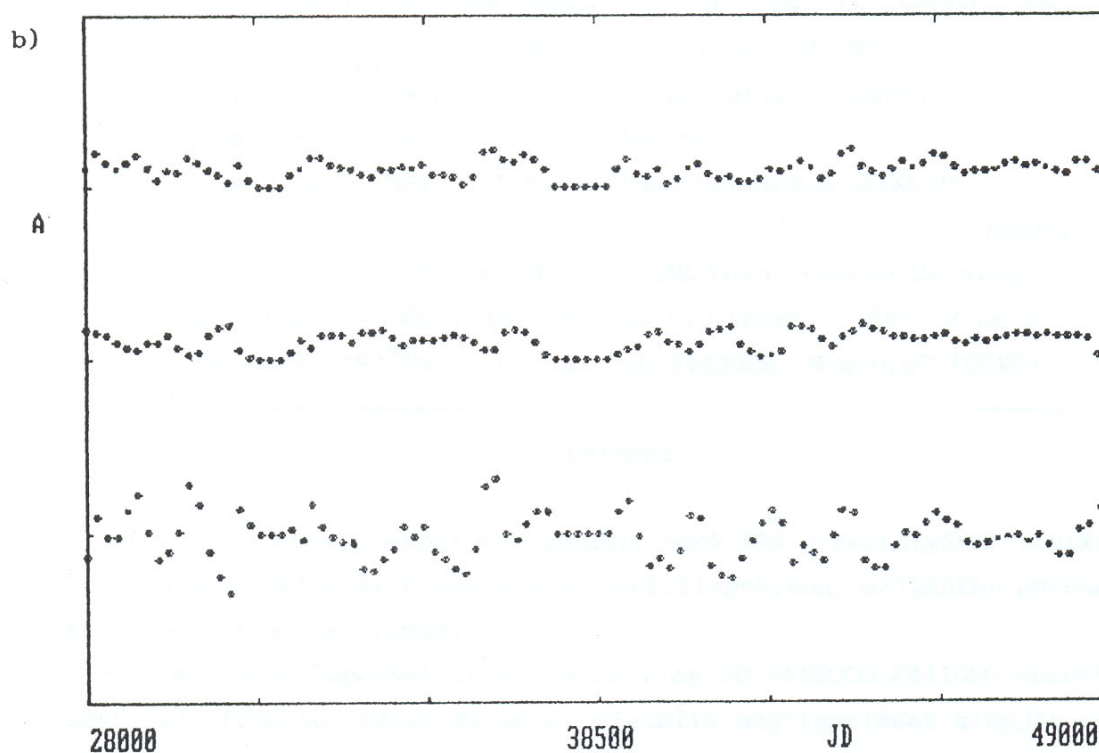
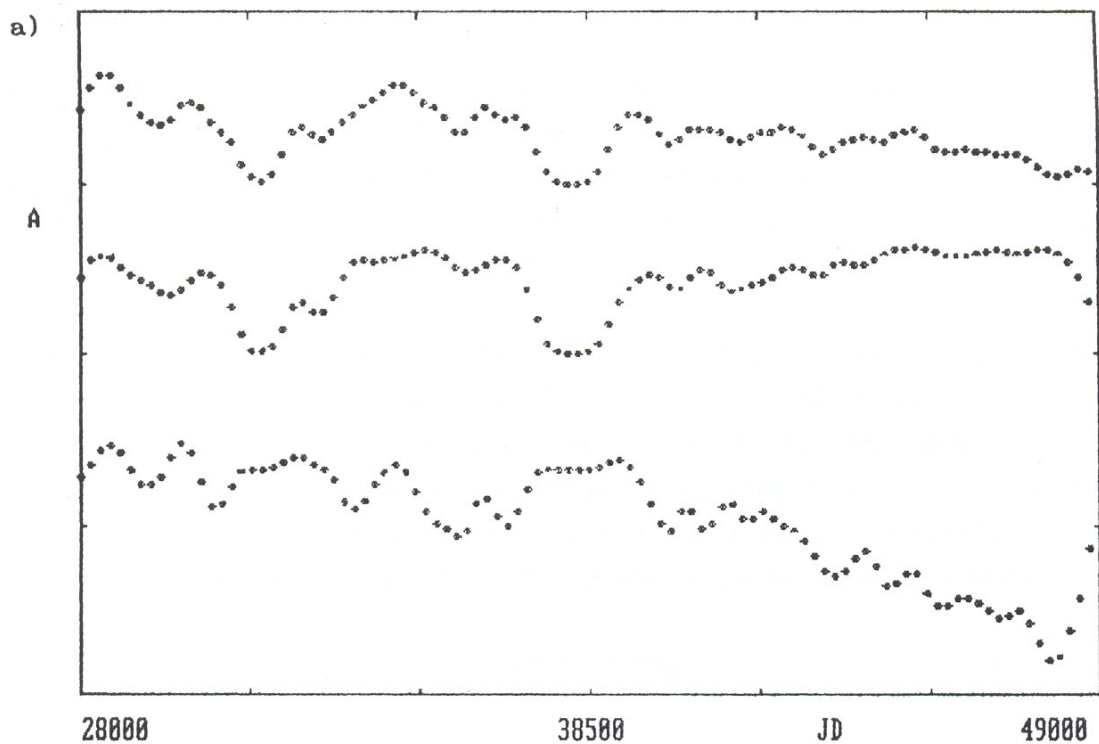
A negyedik, csillag-fit térképen megfigyelhető az adatsor elején jelentkező igen nagy ciklushosszú komponens, a nagyobb frekvenciáknál pedig a csillag fénygörbéjén lévő, a két periódussal le nem írható, és valószínűleg véletlenszerű változásoknak és/vagy megfigyelési hibáknak tulajdonítható domborzat.

A két periódus amplitudója időbeli változásának kimutatásához elkészítettük a már említett metszeteket (35. ábra). Az a) ábra a P_1 amplitudójának változását mutatja a 12-13. frekvenciasávra integrálva (ez a 256-277 nap periódus tartomány). A periódus értékének kis változása miatt elegendő volt két sávot összegezni.

A rövidebb P_2 periódusnál azonban a nagyobb csúcs-félszélesség (ld. tesztek eredménye) és az instabilabb periódushossz miatt három sávban integráltuk össze az amplitudót (a 23-25. frekvencia tartomány a 133-145 nap periódusokhoz tartozik).



34. ábra



35. ábra: a) A V Boo wavelet térképeinek metszete a P_1 periódus amplitudóváltozásának vizsgálatához. A felső görbe a csillag, középen a fit, alul a csillag-fit térkép metszete. b) Ugyanez a P_2 periódusra.

A csillag-fit térkép (kétszeresére széthúzott skálán ábrázolt) metszetén látható, hogy a fő periódus amplitudója erősen csökkenő tendenciát mutat, melyre hullámvázis rakódik (az űrök idején nincs információ!). Ennek az amplitudóváltozásnak a periodicitás vizsgálatához hosszabb adatsorra van szükség. A legutóbbi időben az amplitudó növekedett.

A rövidebb periódus amplitudója is mutat némi ciklikusságot, hol a másik módussal hasonló értelműen, hol azzal alternálva. Elméleti szempontból fontos volna megbízhatóan kimutatni, hogy több pulzációs módus gerjesztettsége esetén milyen összefüggés van az amplitudók változása között (módusváltás problémája). A wavelet analízis e téren jól alkalmazható, a jövőben nagy jelentőségű eredményeket hozhat.

IV.2. V CVn

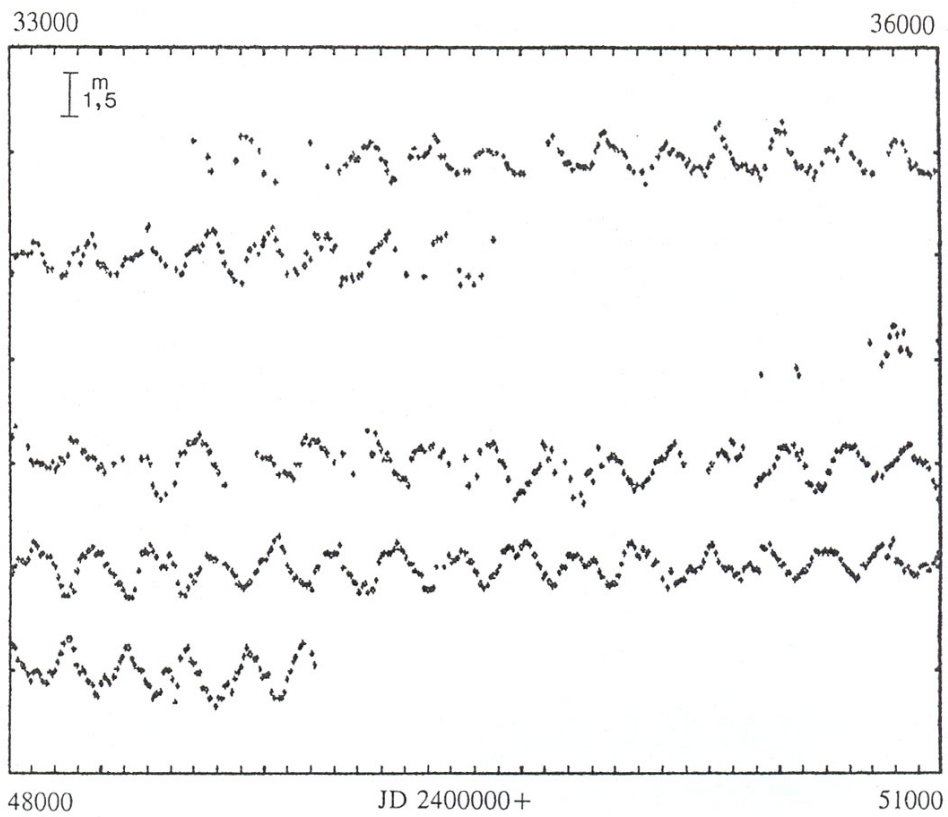
131546	HD 115898	SAO 44564	BD +46° 1862	HIC 65006	SRa
$\alpha_{2000} = 13^{\text{h}} 19^{\text{m}} 28^{\text{s}}$ $\delta_{2000} = +45^{\circ} 31' 38''$					
Max = 7,0 Min = 12,0 magn. (fotografikus, GCVS)					
Max = 6,5 Min = 8,6 magn. (vizuális)					
V = 7,54 B-V = +1,51 magn. (Sky Catalogue 2000.0)					
12 μm =132,16 25 μm =64,05 60 μm =5,52 100 μm =1,43 Jansky					
IRC +50226 (IRAS Point Source Catalog)					
Spektrum: M4-M6e IIIe, H ₂ O és SiO mézer RV= -2 km/s					
Periódus: 191, ^d 89 Epocha: JD 2443929 M-m=0,50 (GCVS)					

3. táblázat

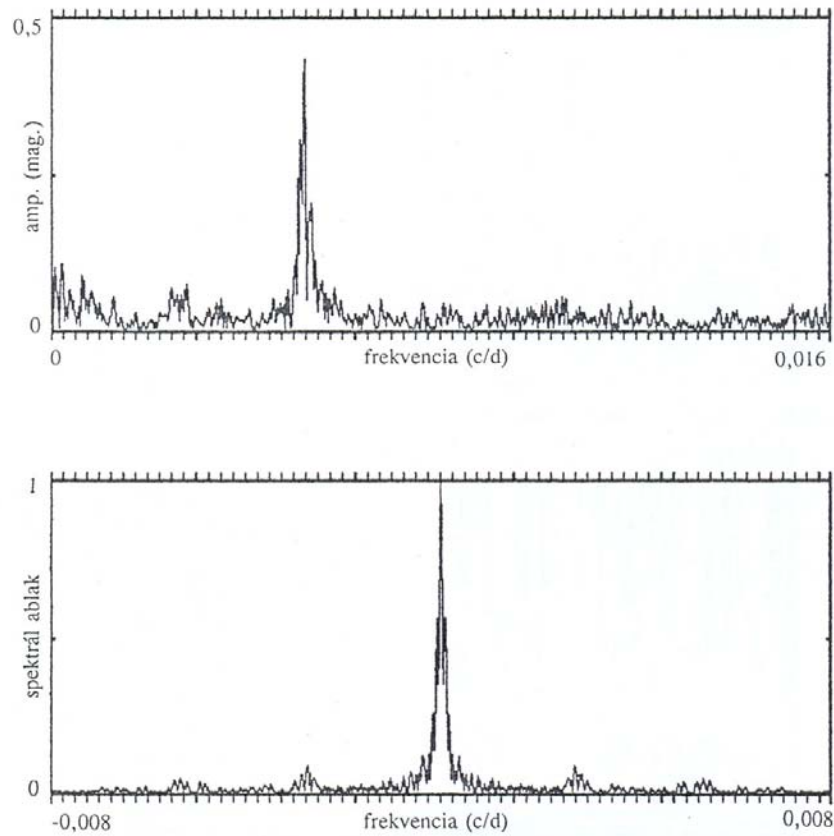
A V CVn a félszabályos változócsillagok SRa alosztályának tipikus képviselője. Színképe hasonló a mira csillagokéhoz, oxigénben gazdag, és mézer aktivitást mutat.

Vetésnik és Papousek (1987) a csillag JD 2415000-2441000 közötti amerikai, francia, német és orosz vizuális megfigyelések alapján azt találta, hogy néha kettős maximum jelentkezik, hasonlóan az UX Dra széncsillaghoz. Szerintük a periódus ciklusról ciklusra történő átlagos lineáris növekedése 0,9 nap, amely 2000-3000 naponként ismétlődik egy-egy hirtelen perióduscsökkenés után.

Az általunk vizsgált adatsor két nagyobb részből áll (36. ábra: 10 napos átlagok) Az első 1951 és 1961 közötti (JD 2433599-2437560) fénygörbe (AAVSO Quarterly Report No. 18-27.), a második 1972 és 1992 közötti (JD 2441416-2448987) magyar amatőr csillagászok 3537 egyedi észlelésén alapuló adatsor. Sajnos nem találtunk a közbülső, 3856 napos időszakra vonatkozó magnitudo értékeket.



36. ábra: A V CVn fénygörbéje (10 napos átlagok, N=922)



37. ábra:: A V CVn Fourier amplitúdó spektruma és a spektrál ablak

A két szakasz és a teljes fénygörbe Fourier analízisének eredménye a 4. táblázatban szerepel. Az egész adatsor frekvencia spektruma és a spektrál ablak a 37. ábrán látható.

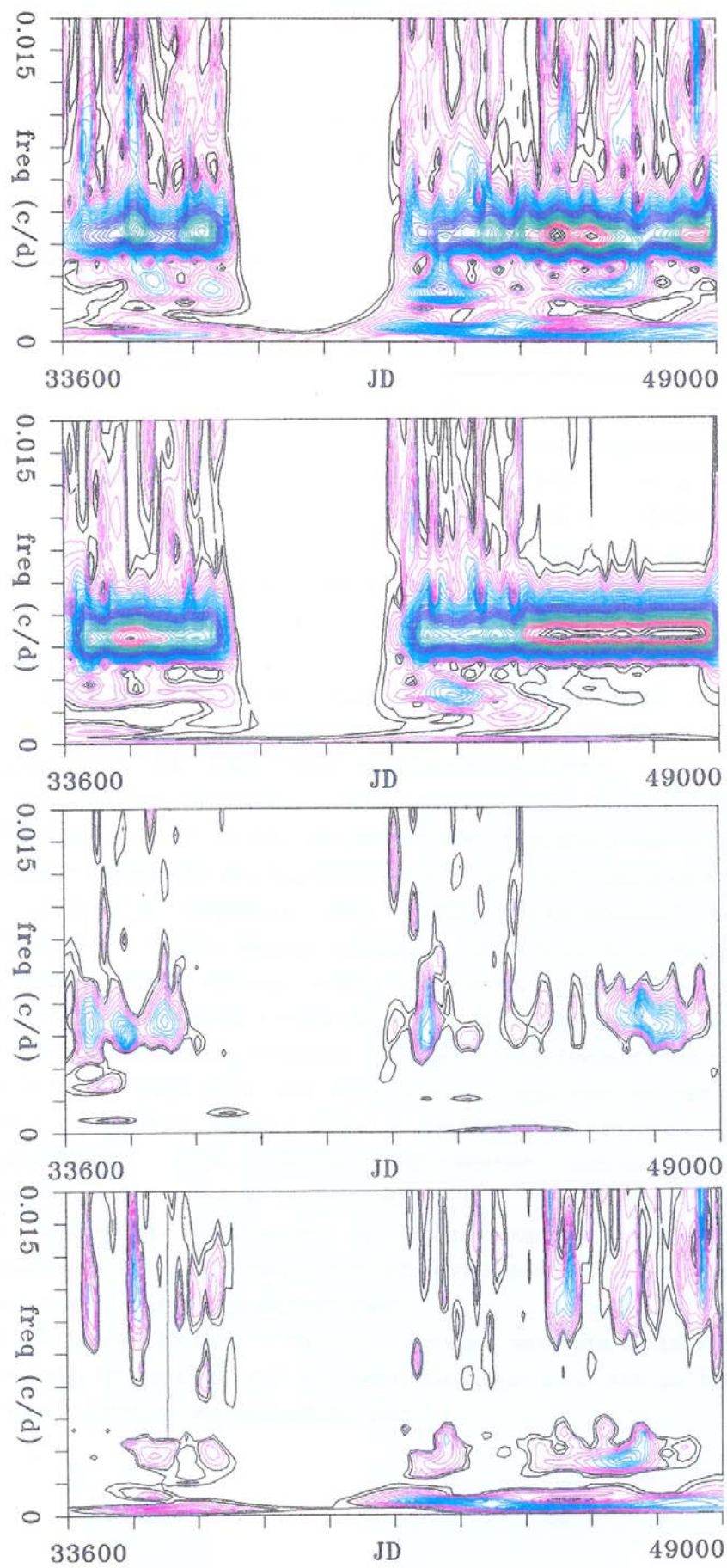
	JD	T (d)	N	<m>	P (d)	A (m)
1.	33600-37560	3961	290	7,68	190,2	0,48
2.	41420-48990	7571	632	7,52	192,9	0,46
	33600-48990	15388	922	7,58	192,0	0,44

4. táblázat

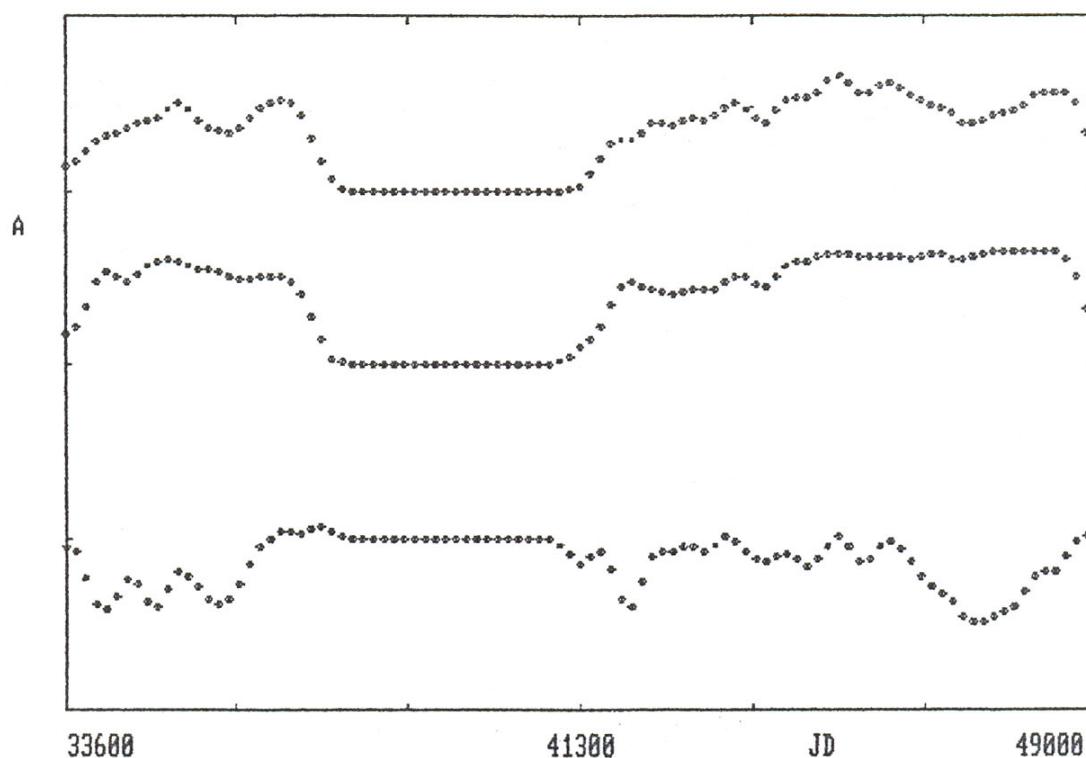
Az általunk feldolgozott adatsor azt mutatja, hogy a csillag fényváltozása hasonló a mirákéhoz, csupán az amplitudó kisebb. Az átlagfényesség is csak kis mértékben változik. A fénygörbe gyakorlatilag monoperiodikus, eltekintve egy kis hullám időnkénti megjelenésétől, ami a fénygörbén kettős maximumok és minimumok formájában figyelhető meg legjobban. A Fourier spektrumban ez a rövid, kis amplitudójú komponens csak enyhe "fűnövekedést" okozott (valószínűleg a fázisa nagyon ingadozó), míg a wavelet térképen (38. ábra) sokkal jobban látszik néhány időszakban. Különösen a legelső, csillag-fit szintvonalas térkép mutatja 0,11 ciklus/nap frekvenciánál a 80-100 nap periódusú változás időnkénti megjelenését. Ez viszont éppen a fő periódus fele, ami arra utalhat, hogy esetleg egy nagyon instabil pulzációs módus, vagy a csillag rezgésének kaotikus tulajdonságából ered. Ennek eldöntéséhez hosszabb, jobban mintavételezett adatsorra van szükség.

A frekvencia spektrumban a fő periódushoz tartozó csúcs meglehetősen "tarajos", amit a spektrál ablak szerkezete és a periódus időbeli kis fluktuációja magyarázhat.

A 39. ábrán látható a wavelet térképek metszete a 185-208 nap tartományra integrálva. A V Boo esetéhez hasonlóan, itt is időnként erős amplitudóváltozás figyelhető meg.



38. ábra



39. ábra: A V CVn wavelet térképeinek metszete a fő periódus amplitudóváltozásának vizsgálatához. A felső görbe a csillag, középen a fit, alul a csillag-fit térkép metszete (kétszeresen széthúzott skálán).

IV.3. Z UMa

115158 HD 103681 SAO 28194 BD+58° 1346 HIC 58225 SRb

$$\alpha_{2000} = 11^{\text{h}} 56^{\text{m}} 30^{\text{s}} \quad \delta_{2000} = +57^{\circ} 52' 17''$$

Max = 7,9 Min = 10,8 magn. (fotografikus, GCVS)

Max = 6,2 Min = 9,4 magn. (vizuális)

V = 6,6 B-V = +1,6 magn. (Sky Catalogue 2000.0)

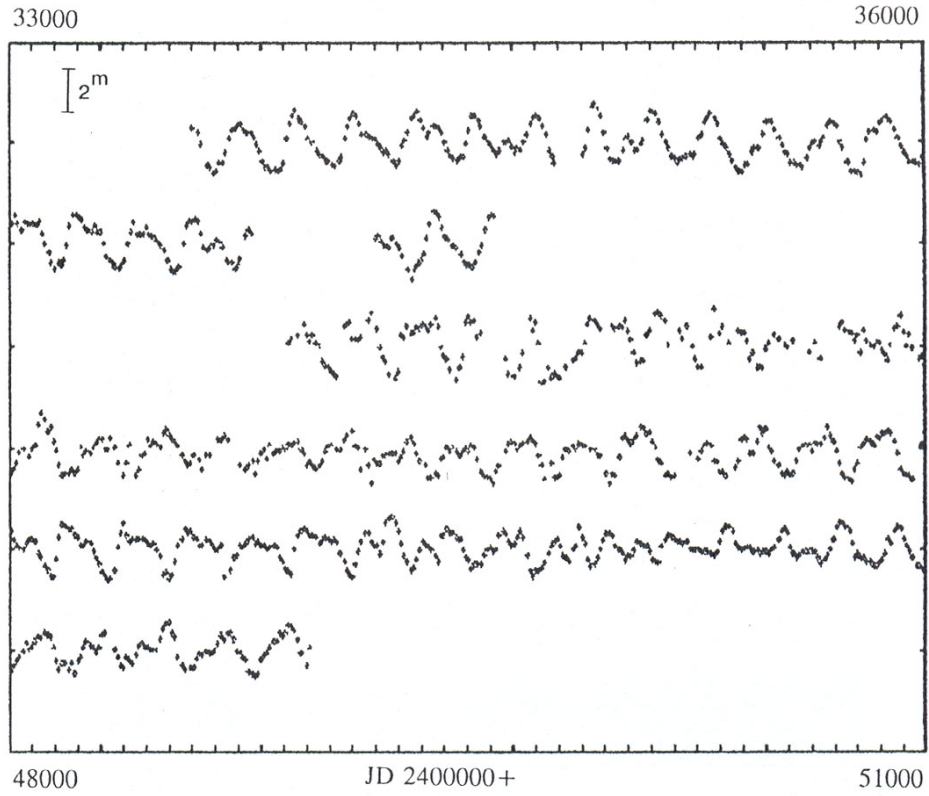
12 μm =64,53 25 μm =26,01 60 μm =4,24 100 μm =1,67 Jansky

IRC +60213 (IRAS Point Source Catalog)

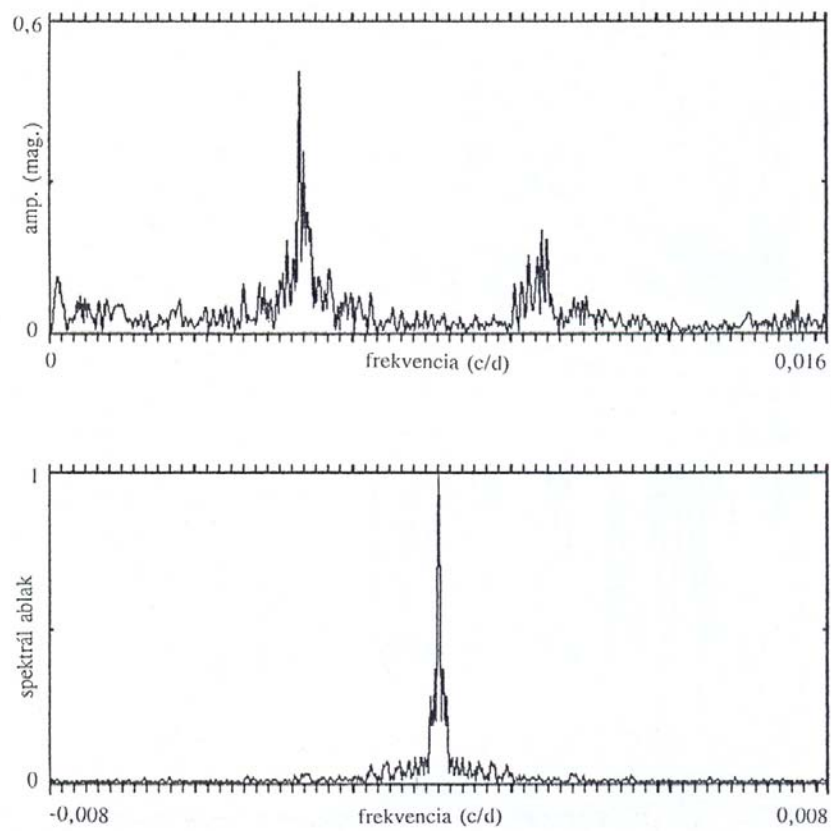
Spektrum: M5 IIIe var. d=300 pc RV= -53 km/s

Periódus: 195,^d5 (GCVS)

5. táblázat



40. ábra: A Z UMa fényváltozása (10 napos átlagok, N=1177)



41. ábra: A Z UMa Fourier amplitúdó spektruma és a spektrál ablak

A Z Ursae Majoris (SRb) fényváltozását King fedezte fel 1897 és 1904 között készült fotolemezeken. Enebo 1907-ben 102 napos, Pracka 1909-ben 205 napos periódust határozott meg. 1909-ben és 1944-ben a fénygörbén az amplitúdó minimálisra csökkent, de 35 év múlva, 1979-ben ez nem következett be. Loreta (1940) szerint a fő ciklushossz 198,3 nap és az átlagfényesség $A=0,2^m$ amplitudóval $P=1560$ napos periódussal változik. Ezt egyik későbbi vizsgálat sem erősítette meg.

Suchko (1980) az AAVSO 1928-1978 közötti adatsora alapján 195,5 nap periódust adott meg, és megjegyezte, hogy egy nagyon instabil, 205 nap körüli fényváltozás időnként beat (lebegés) jelenségét okozhatja, azaz 4000-5000 napos ciklushosszal változhat az átlagfényesség. Klus (1982) az AAVSO 1928-1957 közötti adatait elemezte, és a következő periódusokat találta: $P=190,59 \pm 4,6$, $P=98,89 \pm 1,2$, $P=65,69 \pm 0,6$ nap. A GCVS (1985) szerint ciklusonként két maximum és minimum figyelhető meg, a periódus $P=195,5$ nap.

A Z UMa fényváltozásának elemzésével már többször foglalkoztunk (Szatmáry, Kovács és Mizser 1986, Szatmáry és Gál 1992, Gál and Szatmáry 1993). Itt egy kibővített adatsor elemzését mutatjuk be.

Az átlagolással kapcsolatban érdekes egy eddig nem nagyon vizsgált "effektus". Nem mindegy, hogy a 10 napos átlagolást pl. nullára vagy ötre végződő időpontokra végezzük. Szemléltetésül bemutattuk az 5-re végződő és a 0-ra végződő Julián Dátumokhoz tartozó átlagértékeket, majd pedig a két átlag-fénygörbe különbségét (Szatmáry és Gál 1992). Különösen a korábbi, ritkábban észlelt szakaszon jelentős az eltérés. Ennek hatása a periódusmeghatározásnál nem számottevő, de mindenképpen figyelni kell az átlagolásra.

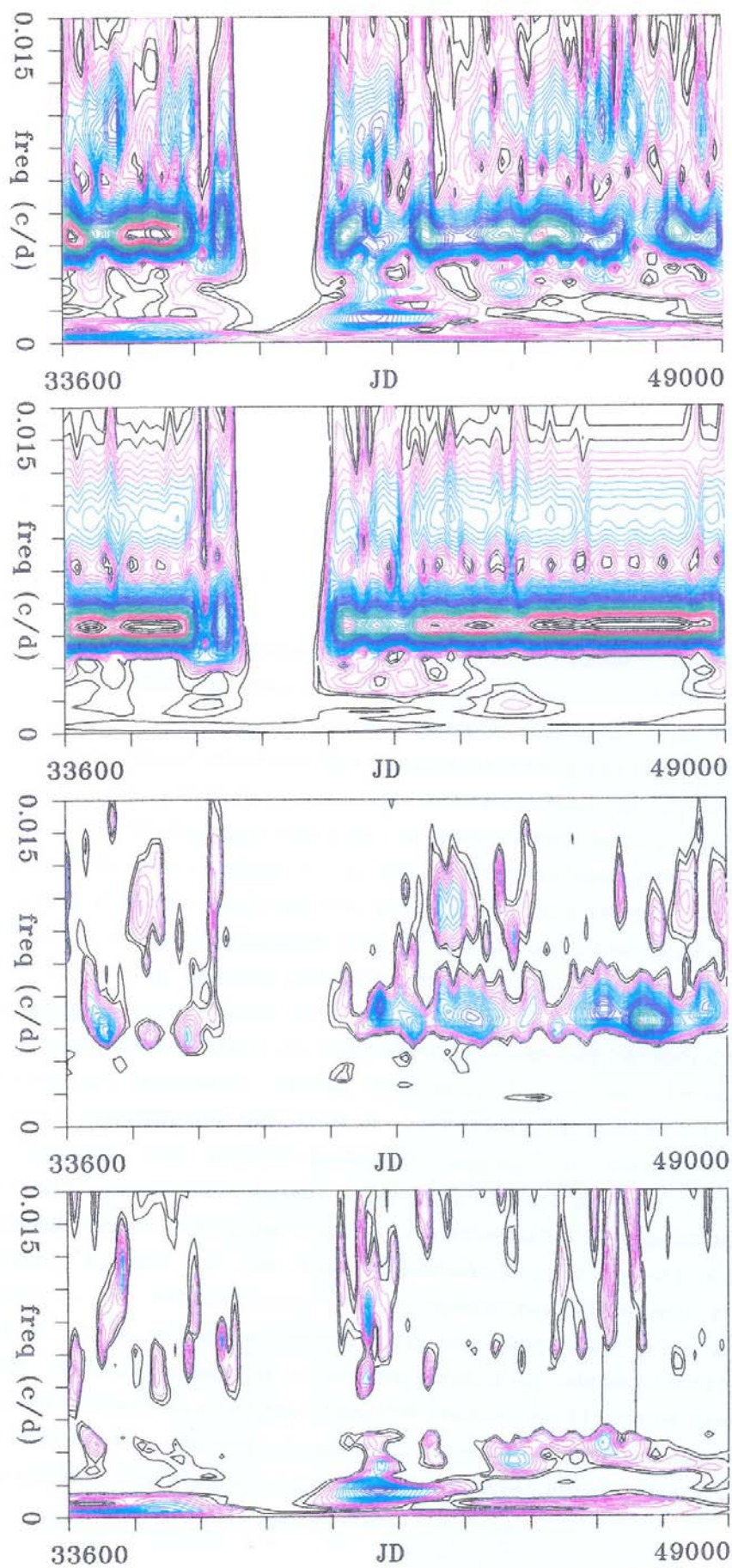
Az adatsor első, 1951 és 1961 közötti része (JD 2433601-2437589) táblázatokból származik (AAVSO Quarterly Report No. 18-25, 27), melynek a végefelé egy 411 napos r van, a második rész pedig 1968 és 1992 közötti (JD 2439914-2448985), magyar és francia (AFOEV) amatőr csillagászok 5664 egyedi észlelésén alapuló adatsor. Bár egyes éjszakákon akár 1 magnitúdó eltérés is előfordult a különböző észlelők becslései között, ez nem tnt szisztematikusan, ezért személyi korrekciót nem alkalmaztunk. Sajnos eddig nem jutottunk hozzá a közbülső, 2325 napos időszakra vonatkozó magnitúdó értékekhez. A teljes, 10 napos átlagolás utáni fénygörbe a 40. ábrán látható.

A két szakasz és a teljes fénygörbe Fourier analízisének eredménye a 6. táblázatban szerepel (csak a legmagasabb csúcs adataival). Az egész adatsor frekvencia spektruma és a spektrál ablak van a 41. ábrán.

	JD	T (d)	N	<m>	P_1 (d)	A_1 (m)
1.	33600-37590	3990	348	7,92	191,1	0,80
2.	39915-48985	9070	829	7,93	193,8	0,47
	33600-48985	15385	1177	7,92	194,5	0,52

6. táblázat

A 42. ábrán találhatók a wavelet térképek. Legfelül a megfigyelések (csillag), alatta az eredeti időpontokban két szinusz görbével ($P_1=194^d$, $A_1=0,5^m$, $\phi_1=0$ és $P_2=99^d$, $A_2=0,2^m$, $\phi_2=0$) történt modell (fit) amplitúdó felülete szerepel. A harmadik a fit-csillag, legalul pedig a csillag-fit különbségi térkép látható.



42. ábra

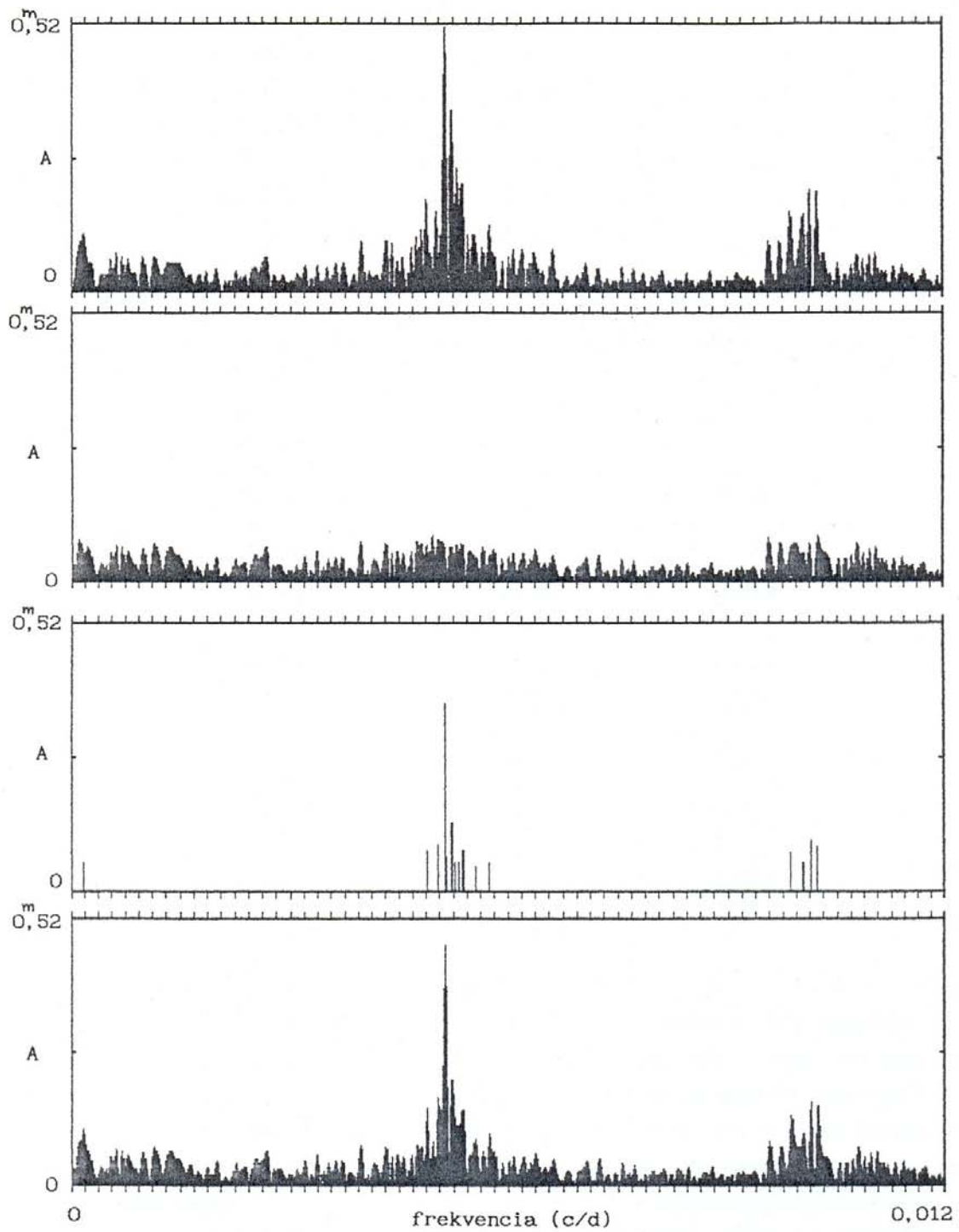
A hosszabb periódusoktól a rövidebbek felé haladva az alábbi megállapításokat tehetjük:

- Az átlagfényesség 5700 nap körüli ciklushosszal, közel 0,2 magnitúdóval ingadozik. Mint az a wavelet térképről leolvasható, ez nem folyamatosan, hanem időszakosan (változó amplitúdóval) történik. A jelenség valószínűleg rövidebb, közeli frekvenciák okozta lebegéssel is kapcsolatos.

- A $P=195$ nap periódusú rezgés az egész vizsgált időszakban meghatározó jelentőségű a fénygörbén. A térkép és az amplitúdóspektrum alapján azt mondhatjuk, hogy ez a periódus érték kicsit ingadozott. Az amplitúdó csökkenését időnként (de nem minden esetben) a rövid periódusú rezgések megerősödése kíséri.

- A rövid, 100 napos periódusnál lévő több csúcs arra utal, hogy ez a gyorsabb fényváltozás nagyon instabil. A térképről leolvasható, hogy a periódusa és az amplitúdója is erősen változó. Ennek okáról csak feltevéseink lehetnek. Elképzelhető, hogy módusváltások következnek be az alap és az első felharmonikus között (arról, hogy miért e módusokkal lehet azonosítani a periódusokat, a következő részben lesz szó), mint ahogyan ezt a jelenséget gyanítják az RV And, az S Aql és az U Boo félszabályos csillagoknál (Cadmus et al. 1991), valamint a TX Dra és az AF Cyg esetében (Gál and Szatmáry 1993c).

Abból a célból, hogy a bonyolult szerkezet frekvencia-csúcs csoportok megjelenését értelmezhesük, elvégeztük a frekvencia tartományban történő dekonvolúciós fehéritést a II.2. fejezetben részletezett CLEAN-algoritmussal. A korábban bemutatott spektruménál (41. ábra) finomabb frekvencia felbontást használtunk. A keresett CLEAN-komponensek száma 15 volt, az alkalmazott g erősítési tényező pedig 0,5. A 43. ábrán látható az eredeti amplitúdóspektrum, alatta a 15, spektrál ablakkal történt dekonvolúció után megmaradó ún. maradvány spektrum. Az ábra harmadik részén a 15 CLEAN-komponens szerepel, melyek jellemzőit a 7. ábrában adjuk meg. Legalul a komponensekhez illesztett, a spektrál ablak fő csúcsával megegyező félszélesség Gauss-görbék és a maradvány spektrum összegét, az ún. CLEAN spektrumot találjuk.



43. ábra: A Z UMa frekvencia spektrumának fehérítése CLEAN módszerrel. Felülről lefelé: az eredeti spektrum, a maradvány, a 15 CLEAN komponens és a CLEAN spektrum (komponenseknél Gauss-fit + maradvány).

frekvencia (10^{-3} c/d)	periódus (d)	amplitúdó (m)
0,169	5930	0,054
4,893	204,3	0,079
5,044	198,3	0,089
5,138	194,6	0,363
5,156	193,9	0,063
5,231	191,2	0,133
5,269	189,8	0,051
5,325	187,8	0,053
5,381	185,8	0,077
5,550	180,2	0,045
5,738	174,3	0,055
9,862	101,4	0,071
10,003	99,7	0,051
10,144	98,6	0,098
10,219	97,9	0,084

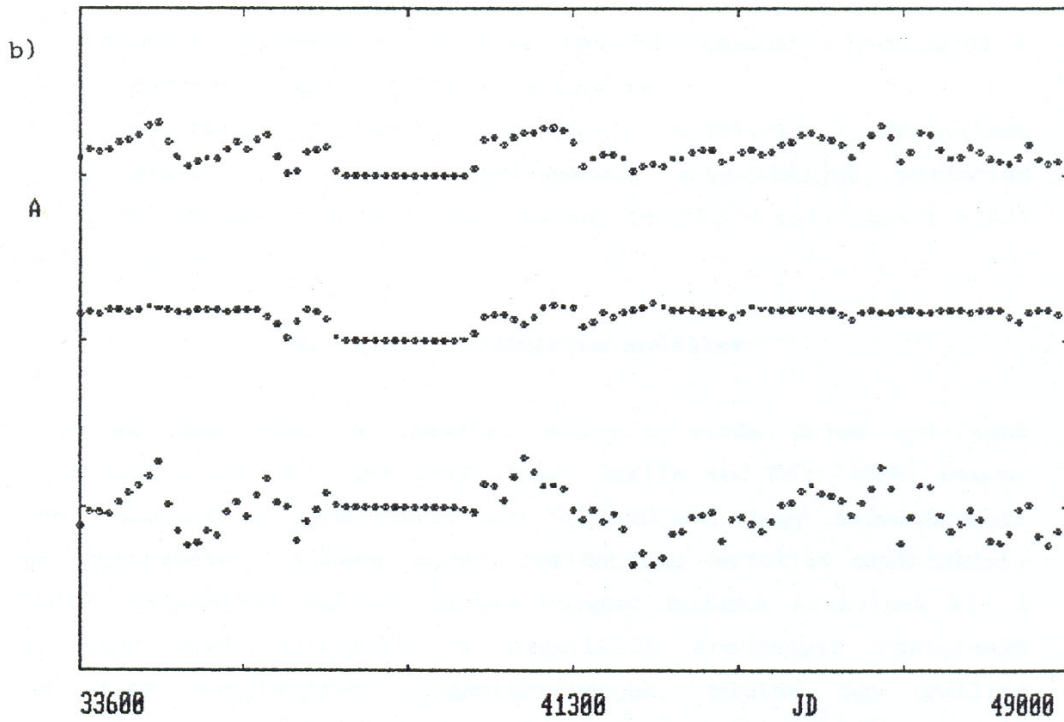
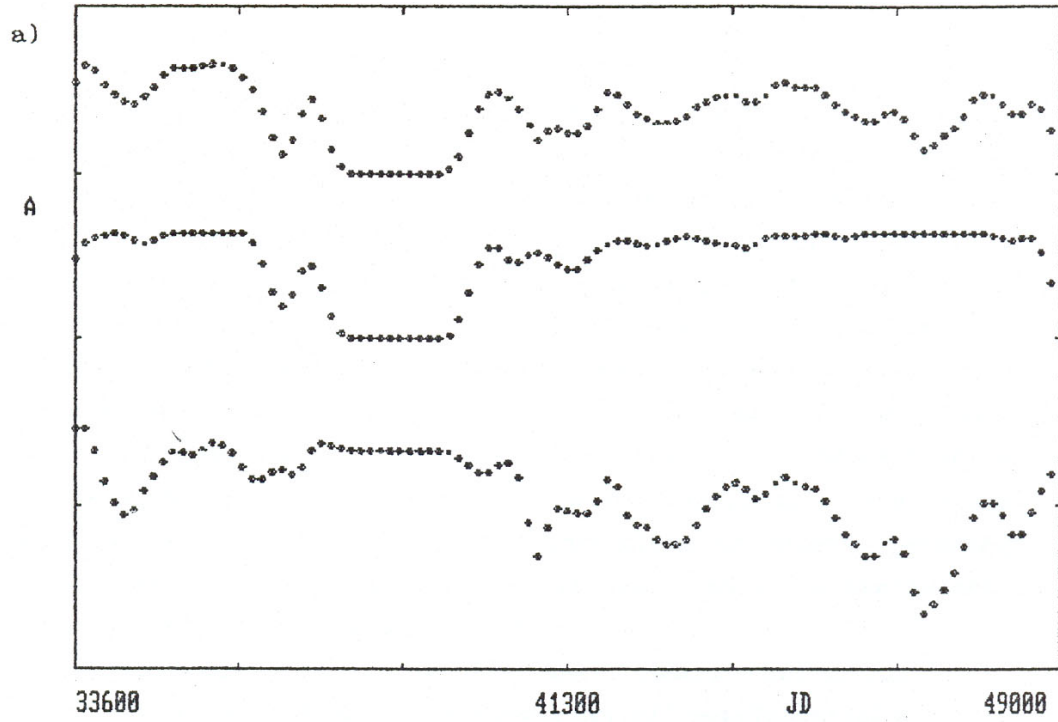
7. táblázat

A módszerrel 1 hosszú periódust találtunk, a 195 nap körül 10, a 99 nap körül pedig 4 komponens jelentkezett. Megjegyezzük, hogy a numerikus módszerből származó periódus meghatározási pontosságot a csúcsok félszélessége jellemzi (ami az adatsor hosszával fordítottan arányos). Esetünkben ez $6,5 \cdot 10^{-5}$ c/d, ami a csoportokon belüli szomszédos komponensek frekvenciabeli távolságával azonos nagyságrend. A CLEAN eredményéből arra következtethetünk, hogy az eredeti spektrum két csúcs-csoportja nem a spektrál ablak alakja, azaz nem az adatok időbeli eloszlása miatt olyan szerkezetű hanem inkább a periódusok értékének véletlenszerű fluktuációja okozza a frekvencia-felhasadást. Az utóbbi magyarázatot alátámasztja az a modellsorozat, amit a Z UMa esetére készítettünk. A megfigyelési időpontokban generáltunk egy kétmódusú fénygörbét úgy, hogy a periódusokat néhány napos értékkel ciklusról ciklusra véletlenszerűen változtattuk (ld. 15. modellt a wavelet módszer tesztelésénél az 47. oldalon). A modell-fénygörbék Fourier spektruma hasonló frekvencia-felhasadást mutatott az eredeti spektrumban tapasztaltakkal.

Végül vizsgáljuk meg a wavelet térképek metszetei alapján a két periódus időbeli amplitudóváltozását, hasonlóan a V Boo és a V CVn esetében bemutatott módszer szerint. A 44. ábrán látható, hogy mindkét módus amplitúdója erősen hullámzik. A csillag-fit különbségi görbék menete enyhén arra utal, hogy a két módus amplitúdója ellentétesen változik, kis fáziseltéréssel. E módusváltáshoz hasonló jelenség, illetve az amplitúdó ciklikus ingadozásának részletes analizéséhez hosszabb adatsort kell beszerezni.

Megjegyzendő, hogy a fit adatsor készítésekor a két szinusz fázisa nulla volt. Különböző fáziskülönbségek mellett megvizsgáltuk a wavelet térképeket, és csak igen kicsi eltéréseket találtunk az amplitúdóeloszlásban. Egymáshoz közelebbi frekvenciák esetén persze nagy jelentőséget kapnak a szintézis során a fázisok.

Mindhárom félszabályos csillag fényváltozásának elemzéséből a wavelet módszer hatékonyságára mutattunk rá.



44. ábra: a) A Z UMa wavelet térképeinek metszete a P_1 periódus amplitudóváltozásának vizsgálatához. A felső görbe a csillag, középen a fit, alul a csillag-fit térkép metszete. b) Ugyanez a P_2 periódusra.

A következő fejezetben elméleti modellek eredményeinek felhasználásával a kapott periódusokat megpróbáljuk pulzációs módusokkal azonosítani, majd becsléseket teszünk a csillagok fizikai paramétereire.

V. Elméleti pulzációs modellek

Kevés modellszámítás készült eddig a vörös óriás csillagok pulzációjára (pl. Fox and Wood 1982, Ostlie and Cox 1986, Bowen 1988). Ezekkel a modellekkel azt vizsgálják, hogy meghatározott csillagparaméterek (tömeg, sugár, luminozítás, effektív hőmérséklet, kémiai összetétel) mellett milyen rezgési módusok alakulnak ki. A csillagok ezen jellemzőit a számítások eredményét tartalmazó táblázatok segítségével meghatározhatjuk, miután egy csillag fényváltozásának periódusait sikerül módusokkal azonosítani. Ha több modell is jól illik, a paraméterek értékét pontosíthatjuk.

V.1. Módusazonosítás

Alapvető probléma a módus azonosítása. Ha a csillag csak egy periódussal pulzál, igen nehéz, sőt gyakorlatilag lehetetlen a pulzáció módusát pusztán a periódusból meghatározni. Ha több periódus is megfigyelhető, akkor a módus azonosításhoz a periódusok arányának az ismeretére van szükség. A gyakorlat során itt is egy komoly nehézséggel találjuk szembe magunkat. A tárgyalt csillagok esetében a rövidebb periódusú fényváltozásról ugyanis igen nehéz eldönteni, hogy valóban pulzációs eredetű vagy valamilyen más effektus miatt jött létre.

A Z UMa esetében a periódusarány 1,97. Bár a 2 körüli periódusarányt a hosszabb periódus nem szinuszos jellege is okozhatja (ha a felszálló és a leszálló ág eltérő meredekségű), a fénygörbe alapján ez kizárható. Elfogadva a reálisabb feltevést, hogy a rövid periódus is pulzációból származik, a modellekből valószínűsíthető, hogy a csillag melyik módusokban pulzál.

A másik probléma a modellek alkalmazhatósága. A legrészletesebb táblázatokat tartalmazó munkák (Fox and Wood 1982, Ostlie and Cox 1986) modellsorozatai olyan csillagokra készültek, melyek rezgési módusai időben stabilak. Ez a félszabályos csillagokra nem mondható el. Ezenkívül Ostlie és Cox számításai mira csillagokra készültek, nem pedig SR változókra. Ezért csak arra van lehetőségünk, hogy behatároljuk a csillag paramétereit.

A két elméleti munka táblázatai alapján nehéz kikeresni a csillagokra jól illő modelleket, és nem tartalmazzák a periódusarányokat. Ezért számítógépre vittük a nemadiabatikus adatokat, és grafikonokat készítettünk (45., 46. és 47. ábra). A modelleket pontot tartalmazó körök jelzik, melyek mérete a tömeggel egyenesen arányos. A 9 nagy üres kör a 8. táblázatban szereplő csillagokra vonatkozik.

Csillag	P_0 (d)	P_1 (d)
Z UMa	195	99
AF Cyg	166	93
W Cyg	230	133
TX Dra	138	76
AH Dra	190	105
V Boo	259	136
RS Cyg	425	209
WZ Cas	384	183
Y Lyn	205	133

8. táblázat

Mindegyik modell alapján arra következtethetünk, hogy 8 csillag az alaplómodusban és az első felharmónikusban pulzál. A legkisebb periódusarányal rendelkező, SRc típusú Y Lyn esetében az első és a második vagy magasabb felharmónikus gerjesztettsége valószínűsíthető, az 1200 napos, hosszú periódusa pedig az alaplómodus lehet (Sztarmár and Vinkó 1992).

A 9. táblázat olyan modelleket tartalmaz, amelyek többé-kevésbé összeegyeztethetők a Z UMa megfigyelt periódusaival és szinképével.

P_0	P_1	P_0 / P_1	$M/M_\odot$	$L/L_\odot$	T_{eff}	
196	90	2,18	2,0	5000	3300	Fox & Wood
197,0	93,1	2,12	0,8	1500	2800	Ostlie & Cox
196,5	94,1	2,09	0,8	2000	3000	Ostlie & Cox
185,3	93,6	1,98	1,0	1500	2700	Ostlie & Cox
196	103	1,90	2,0	4000	3000	Fox & Wood
204	108	1,89	2,0	6310	3300	Fox & Wood
179,7	95,1	1,89	1,0	3000	3200	Ostlie & Cox
179,1	98,5	1,82	1,4	3000	3000	Ostlie & Cox
185,1	102,0	1,81	2,0	3000	2800	Ostlie & Cox
175,4	98,9	1,77	1,4	5000	3400	Ostlie & Cox
175,0	99,5	1,76	2,0	5000	3200	Ostlie & Cox

9.táblázat: Csillagmodellek 2 körüli periódusarányra
(P_0 az alaprezgés, P_1 az első felharmonikus periódusa)

V.2. Fizikai paraméterek meghatározása

A csillagok paramétereire vonatkozó becsléseinket a kapott periódusok alapján végezzük el.

Ostlie and Cox (1986) modelljeire periódus-tömeg-sugár relációkat illesztett:

$$\begin{aligned}\log P_0 &= -1,92 - 0,73 \log M + 1,86 \log R \\ \log P_1 &= -1,60 - 0,51 \log M + 1,59 \log R.\end{aligned}$$

Ha mindkét módus periódusa ismert, az M tömeg és az R sugár meghatározható. A Z UMa esetére $P_0 = 195 \pm 2$ nap és $P_1 = 99 \pm 2$ nap, így $M = 0,95 \pm 0,24 M_\odot$ és $R = 184 \pm 17 R_\odot$. A színek alapján feltéve, hogy az effektív hőmérséklet $T = 3000 \pm 200$ K, a csillag luminozitására $L = 2500 \pm 600 L_\odot$ érték adódik.

Egy másik lehetőség a paraméterek becslésére Whitelock et al. (1991) pulzáló vörös változókra vonatkozó periódus-fényesség relációja:

$$M_{\text{bol}} = 1,85 - 2,55 \log P, \\ \pm 0,24 \pm 0,10$$

ahol P az alaprezgés periódusa.

Példaként ismét a Z UMa esetét vizsgáljuk. A relációból $P = 195$ nap esetén a bolometrikus abszolút fényesség $M_{\text{bol}} = -4,0^m \pm 0,3^m$.

Felhasználva az

$$M_{\text{bol}} = 4,7^m - 2,5 \log L/L_\odot$$

összefüggést, a luminozitás $L = 2400-4000 L_\odot$. Ezután a sugarat az

$$L/L_\odot = (R/R_\odot)^2 (T/T_\odot)^4$$

kifejezésből $T/T_\odot = 0,5$ feltétel mellett $R = 200-250 R_\odot$ értékre becsülhetjük.

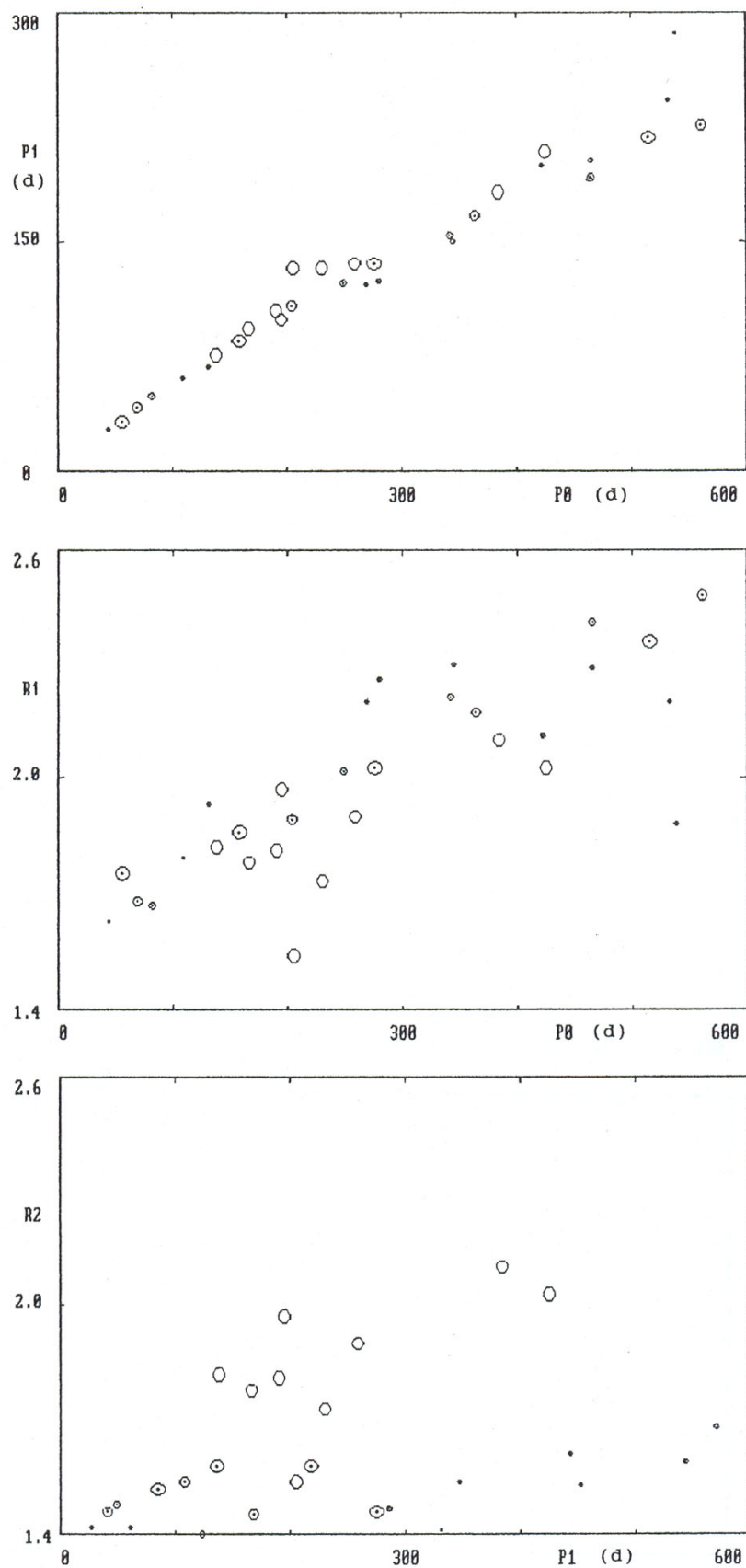
Az M5 III színektípusú csillagoknál a bolometikus korrekció -4^m , így az abszolút vizuális fényesség $M_V = 0,9^m \pm 0,3^m$. A távolságot is meghatározhatjuk az

$$m_V - M_V = -5 + 5 \log r$$

képletből, $m_V = 6,6^m$ látszólagos fényesség esetén $r = 180-240$ pc.

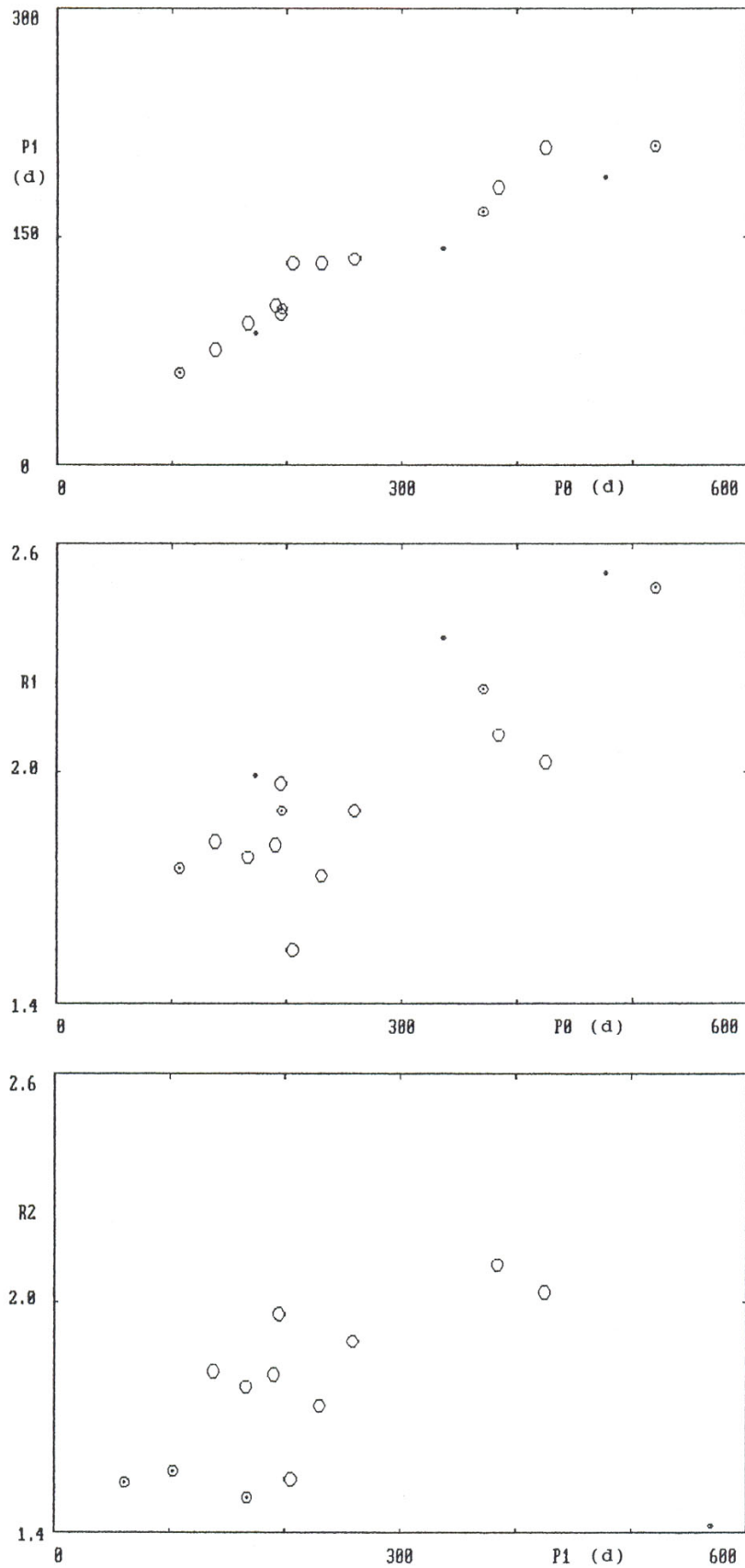
Végül a Z UMa félszabályos pulzáló változó csillag valószínű paraméterei:

$M = 1,0-1,5 M_\odot$, $L = 2500-3500 L_\odot$, $R = 180-220 R_\odot$, $T_{\text{eff}} = 3000-3200$ K.



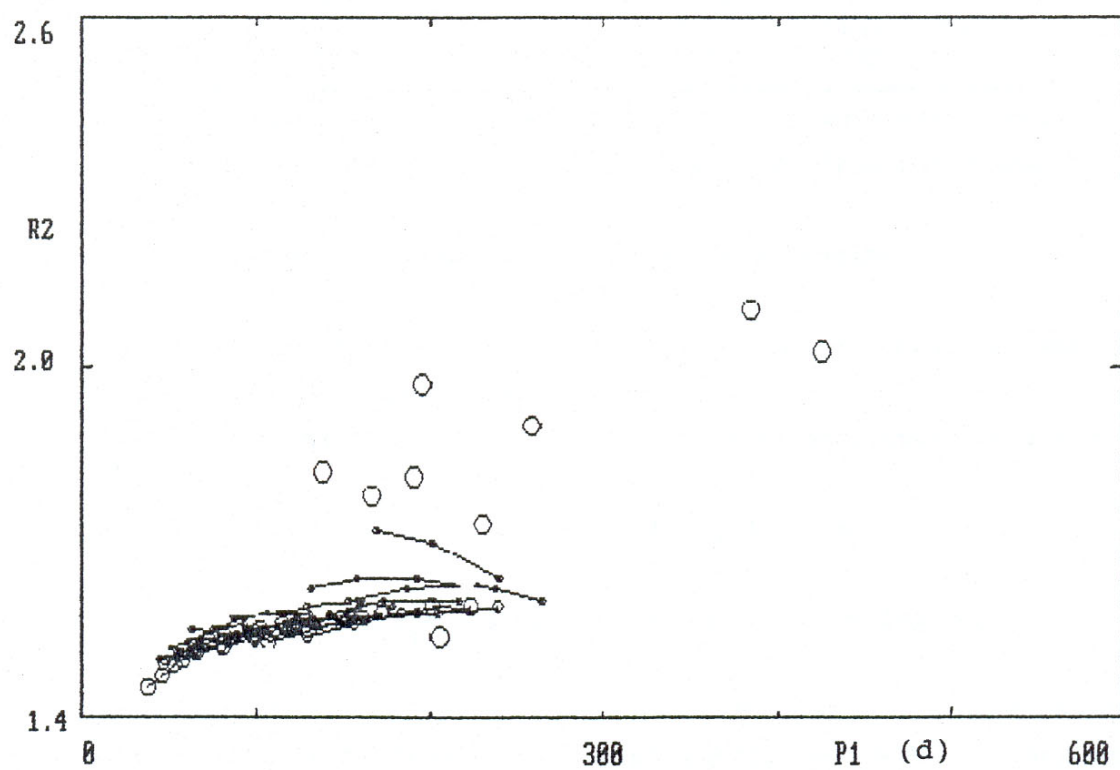
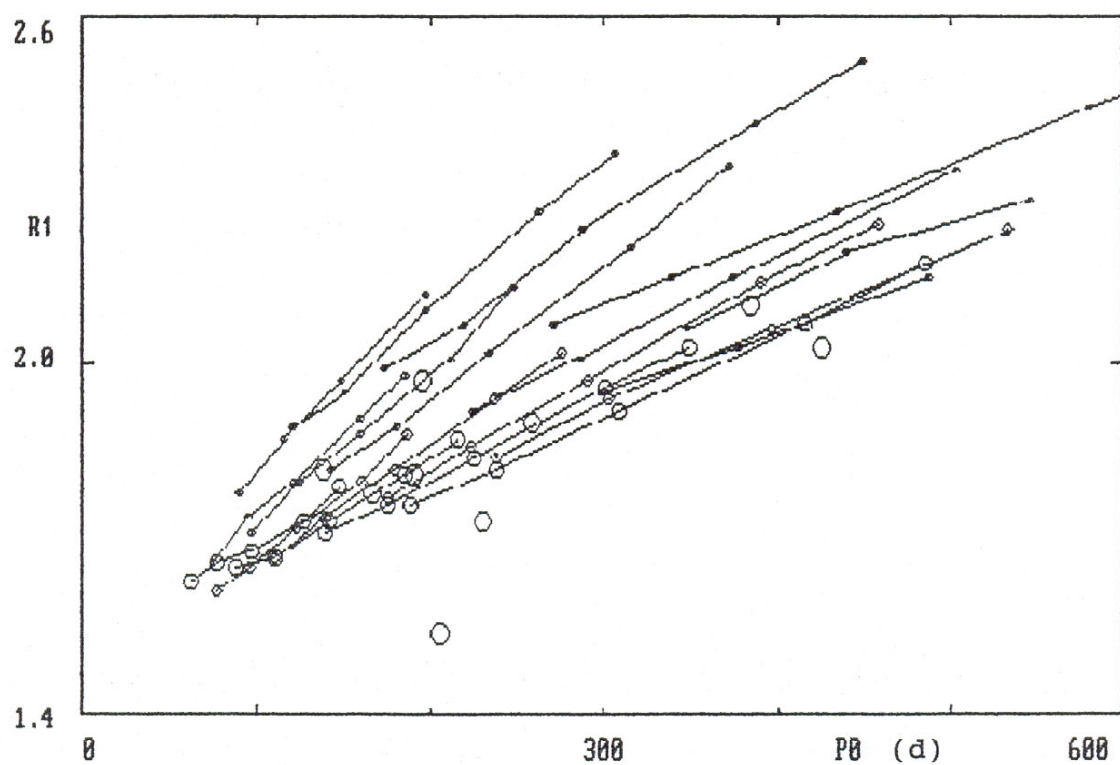
45. ábra: Fox & Wood (1982) modellje (standard disk stars).

P_0 az alaprezgés, P_1 az első-, P_2 a második felharmonikus periódusa; $R_1 = P_0/P_1$ és $R_2 = P_1/P_2$ periódusarányok.



46. ábra: Fox & Wood (1982) modellje (cool disk stars).

P_0 az alaprezgés, P_1 az első-, P_2 a második felharmonikus periódusa; $R_1 = P_0/P_1$ és $R_2 = P_1/P_2$ periódusarányok.



47. ábra: Ostlie & Cox (1986) lineáris modellje.

P_0 az alaprezgés, P_1 az első-, P_2 a második felharmonikus periódusa; $R_1 = P_0/P_1$ és $R_2 = P_1/P_2$ periódusarányok.

Záró gondolatok

A változócsillagok vizsgálatának jelentősége abban nyilvánul meg, hogy váltoásaik elemzésével olyan következtetésekre juthatunk, amelyek minden csillagra érvényesek. A csillagokban zajló folyamatokról jórészt éppen a változócsillagok jóvoltából értesülünk.

A csillagfejlődés törvényszerűségeinek felismerése szempontjából igen fontos, hogy sok változócsillagot ismerjünk, és váltoásaikban kimutassuk a közös, ill. speciális szabályszerűségeket. Mindehhez azonban nemcsak fejlett detektorok szükségesek, hanem hatékony matematikai módszerek és esetenként nagy kapacitású számítógépek is.

Az ismertetett módszerek, matematikai eljárások nemcsak a csillagászatban alkalmazhatók. A változó mennyiségek analízise éppúgy fontos más tudományterületeken, így például a geofizikában, meteorológiában, orvostudományban és még a társadalomtudományokban is.

A természetben tapasztalható periodicitások, ill. a valamilyen szempontból szabályos változások mögött rendszerint fizikai törvények rejlenek, amelyek megismerésének egyre nagyobb igénye a fejlődés természetszerű velejárója. Következésképpen a periodicitások feltárásának és azok elemzésének rendkívül nagy szerepe van.

A periódusok meghatározása céljából az összes eddig ismeretes numerikus módszerre számítógép programokat írtam, amiket mások is használnak.

Az új tudományos eredményeimet a tézisekben fogalmaztam meg.

Az értekezés gerincét alkotó wavelet analízis vizsgálatának fontosabb megállapításait az alábbiakban összegezhetjük:

A wavelet eljárás tesztelése során igyekeztünk felderíteni a módszer előnyeit a korábbi eljárásokkal szemben, és megpróbáltuk korlátait is meghatározni. A közölt tesztek alapján elmondható, hogy a wavelet analízis jelen formájában is komoly minőségi előrelépést jelent a korábbi eljárásokhoz képest, szükséges azonban továbbfejlesztése, hogy jobban alkalmazkodjon a csillagászati problémák megoldásához.

A módszer tovább alkalmazására elsősorban félszabályos változócsillagok periódusmeghatározásánál lesz lehetőség, felhasználva az adatbankokban található hosszú és szinte folytonos fénygörbéket. A módszer alkalmazása egyben lehetőséget nyújt az amatőr és a szakcsillagászok közötti együttműködés elmélyítésére. Az amatőr csillagászok megfigyelései olyan csillagok vizsgálatát is lehetővé teszik, amelyek - főleg a hosszú periódusuk miatt - nem szerepelnek az obszervatóriumok fotoelektromos fotometriai programjában.

A rendelkezésre álló megfigyelési anyag alapján véleményünk szerint időszerű lenne a félszabályos csillagok új szempontok szerinti csoportosítása is, hiszen a jelenleg alkalmazott kategóriák elsősorban a fénygörbék morfológiáján alapulnak. A wavelet analízis segítségével olyan besorolási rendszer kialakítására lehet mód, ami jobban szemlélteti az egyes típusok fényváltozásában levő különbségeket és jobban alkalmazkodik a csillagok fizikai jellemzőihez.

A félszabályos pulzáló változócsillagok feldolgozása jól illusztrálja a módszerben rejlő lehetőségeket, az általunk végzett analízisek minden tekintetben részletesebbek a vizsgált csillagokról eddig megjelent elemzéseknél.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a JATE Kísérleti Fizikai Tanszék, illetve a Fizikus Tanszékcsoport munkatársainak, elsősorban Hevesi Imre és Bor Zsolt professzoroknak, hogy munkámat támogatták és ösztönöztek, és nagyban hozzájárultak ahhoz, hogy Szegeden a csillagászati kutatás és oktatás folyamatosan fejlődjön.

Külön köszönet illeti volt tanítványaimat, majd munkatársaimat, Hegedüs Tibort, Vinkó Józsefet és Gál Jánost, akikkel valódi csoportos munka alakult ki. Kiss László és Kaszás Gábor fizikus hallgatók is tevékenyen bekapcsolódtak vizsgálatainkba.

Hálás vagyok az MTA Csillagászati Kutatóintézete sok munkatársának, akik segítettek szakmai fejlődésemet. Sokat köszönhetek többek között Szabados Lászlónak, Szeidl Bélának, Kovács Gézának, Kolláth Zoltánnak, Balázs Lajosnak a konzultációkért, hasznos tanácsaikért.

A hosszú adatsorok analízisét az tette lehetővé, hogy több mint száz amatőr csillagász sok-sok ezer megfigyelést végzett, néhány igen lelkes társuk pedig ezeket begyűjtve, adatbankokat hozott létre. Köszönöm elsősorban Mizser Attilának és Tepliczky Istvánnak, hogy a magyar észleléseket rendelkezésemre bocsátotta, és az AFOEV vezetőinek, hogy adataikat a Strasbourg-i számítógépen elérhetővé és letölthetővé tették.

A szegedi távcső munkába állásában nagy szerepe volt Yu.A. Medvedyevnek és V.G.Karetnyikovnak (Odessza), valamint a Szegedi Csillagvizsgáló Alapítvány elnökének, Csákány Béla professzornak.

A delta Scuti katalógussal kapcsolatban J.R. Garcia (Buenos Aires) és T. Kreidl (Lowell Obs.) aktívan együttműködött.

Végül köszönöm feleségem, Ibolya megértését, gyermekeim, Dani és Julcsi türelmét.

Irodalomjegyzék

- Ádám O. 1987, Szeizmikus kutatás II., 7-8. fejezet, Tankönyvkiadó
- Bai T. 1992, Methods of periodicity analysis: Relationship between the Rayleigh analysis and a maximum likelihood method, *Astrophysical Journal* 397, 584
- Bakondi G. 1987, Hosszúperiódusú pulzáló változócsillagok analízise, Diplomamunka, JATE, Szeged, témavezető: Szatmáry K.
- Balona L.A. 1983, Fast Fourier transform for unequally spaced data, *South African Astron. Obs. Circ. No.7*, p.1
- Barning F.J.M. 1963, The numerical analysis of the light curve of 12 Lacertae, *Bull. Astron. Inst. Netherlands* 17, 22
- Barone F., Di Fiore L., Milano L., Russo G. 1992, A new method of Fourier spectral analysis from unevenly sampled astrophysical data, *Proc. Astronomy from Large Databases II*, Eds. A.Heck, F.Murtagh, ESO Conf. Work. Proc. No.43, p.195
- Belsenere E.P. 1986, Fourier techniques for cloudy nights, "The Study of Variable Stars Using Small Telescopes" Ed. J.Percy, Cambridge Univ. Press, p.229
- Bijaoui A. 1991, The wavelet transform, *Proc. 3rd ESO/ST-ECF Data Analysis Workshop*, Ed. P.J. Grosbøl and R.H. Warmels, ESO Conf. Work. Proc. No.38, p.17
- Blacher S., Perdang J. 1988, Testing for chaos in long period variables, *Proc. Multimode Stellar Pulsations*, Budapest, 1987, Eds. G.Kovács, L.Szabados, B. Szeidl, Konkoly-Kultura, p.283
- Bowen G.H. 1988, Dynamical modelling of long period variable star atmospheres, *Astrophysical Journal* 329, 299
- Bradstreet D.H. 1993, Binary Maker 2.0 User Manual, Contact Software
- Breger M. 1990, Period program, *Commun. in Astroseismology*, No.20
- Cadmus R.R. Jr., Willson L.A., Sneden C., Mattei J.A. 1991, Observation of possible mode switching in three semiregular variable stars, *Astronomical Journal* 101, 1043
- Carbonell M., Oliver R., Ballester J.L. 1992, Power spectra of gapped time series: a comparison of several methods, *Astronomy and Astrophysics* 264, 350
- Charvátová I., Streátík J. 1991, Long-term variations in duration of solar cycles, *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 42, 90
- Chui C.K. 1992a, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Boston
- Chui C.K. 1992b, *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, Boston
- Cuypers J. 1986, A new method of detecting frequency variations in variable stars applied to the β Cephei star δ Ceti, *Astronomy and Astrophysics* 167, 282
- Cuypers J. 1987, The period analysis of variable stars, *Mededelingen van de Koninklijke Academie voor Wetenschappen, Letteren en Schone Kunsten van België, Academiae Analecta* 449, Nr.3
- Cuypers J. 1992, Period analysis of variable stars, *Proc. First European Meeting of the AAVSO, Brussels, Belgium 1990, Variable Star Research: An International Perspective*, Eds. J.R.Percy, J.A.Mattei, C.Sterken, Cambridge Univ. Press, p.148
- Cuypers J. 1993, Period analysis of variable stars, *Proc. Conference on "Applications of Time Series Analysis in Astronomy and Meteorology"*, Ed. O.Lessi, p.139 Padova, Italy, 1993
- Dani T. 1988, Pulzáló változócsillagok periódusmeghatározási módszerei, Diplomamunka, JATE, Szeged, témavezető: Szatmáry K.
- Daubechies I. 1992, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia
- Deeming T.J. 1975, Fourier analysis with unequally-spaced data, *Astrophysics and Space*

Science 36, 137

- Donoho D.L. 1993, Interpolating wavelet transforms, preprint
- Dworetsky M.M. 1983, A period-finding method for sparse randomly spaced observations os "How long is a piece of string?", Monthly Notices Royal Astron. Soc. 4203, 917
- Fahlman G.G., Ulrych T.J. 1982, A new method for estimating the power spectrum of gapped data, Monthly Notices Royal Astron. Soc. 199, 53
- Ferraz-Mello S. 1981, Estimation of periods from unequally spaced observations, Astronomical Journal 86, 619
- Fritzová L., Pekny Z., Svestka Z. 1954, Secondary periods of long-periodic variables, Bull. Astron. Inst. Czech. 5, 49
- Fox M.W., Wood P.R. 1982, Theoretical growth rates, periods, and pulsation constants for long-period variables, Astrophysical Journal 259, 198
- Fullerton A.W. 1986, Searching for periodicity in astronomical data, "The Study of Variable Stars Using Small Telescopes" Ed. J.Percy, Cambridge Univ. Press, p.201
- Garbusov G.A., Andrievskiy S.M., Paramonova O.P., Szatmáry K., Yu.T.Fedotov 1988, Search for high-frequency radial pulsation in delta Scuti stars, (in Russian) Variable Stars (USSR) 22, No.6 p.911
- Garcia J.R. et al. 1993a, A catalogue of variable stars in the lower instability strip, Delta Scuti Star Newsletter No.6, p.14
- Garcia J.R. et al. 1993b, A catalogue of variable stars in the lower instability strip, preprint
- Gál J. 1992, Változósillagok fénygörbe analízise az idő és a frekvencia tartományban, Diplomamunka, JATE, Szeged, témavezető: Szatmáry K.
- Gál J., Szatmáry K. 1993a, W Cygni 1971-1992, Meteor 23, No.4, 26.
- Gál J., Szatmáry K. 1993b, AF Cygni 1967-1992, Meteor 23, No.9, 39.
- Gál J., Szatmáry K. 1993c, Search for period changes of semiregular variable stars with wavelet analysis, Proc. Conference on "Applications of Time Series Analysis in Astronomy and Meteorology", Ed. O.Lessi, p.191 Padova, Italy, 1993
- Goupil M.J., Auvergne M., Baglin A. 1990, The wavelet looking of pulsating stars, Confrontation between Stellar Pulsation and Evolution, eds. C.Cacciari and G. Clementini, Astron. Soc. Pac. Conf. Ser. Vol.11, p.578
- Goupil M.J., Auvergne M., Baglin A. 1991, Wavelet analysis of pulsating white dwarfs, Astronomy and Astrophysics 250, 89
- Gray D.F., Desikachary K. 1973, A new approach to periodogram analyses, Astrophysical Journal 181, 523
- Gregory P.C., Loredó T.J. 1992, A new method for the detection of a periodic signal of unknown shape and period, Astrophysical Journal 398, 146
- Grossmann A., Kronland-Martinet R., Morlet J. 1989, in Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space, eds. J.M. Combes, A. Grossmann, Ph.Tchamitchian, Springer-Verlag, p.2
- Hajdú J. 1988, Fény-idő effektus pulzáló változósillagok O-C diagramján, Diplomamunka, ELTE, Bp., témavezető: Szabados L.
- Heck A., Manfroid J., Mersch G. 1985, On period determination methods, Astronomy and Astrophysics Suppl. Ser. 59, 63
- Hegedüs T., Szatmáry K., Vinkó J. 1992, Light curve and O-C diagram analysis of RZ Cassiopeiae, Astrophysics and Space Science 187, 57
- Heintz W.D. 1993, The orbit of VW Cephei AB = Hei 7, Publ. Astron. Soc. Pacific 105, 586
- Hershey J.L. 1975, Astrometric orbit, eclipsing period changes, and parallax of VW Cephei, Astronomical Journal 80, 662
- Hesselmann N. 1985, Digitális jelfeldolgozás, Műszaki, Bp.

- Holschneider M. 1993, Localization properties of wavelet transforms, *J. Math. Phys.* 34, 3227
- Howarth J.J. 1991, The multi-periodicity of W Cygni, *J. Br. Astron. Assoc.* 101, 101
- Jones A., Kjedsen H., Frandsen S., Christensen-Dalsgaard J., Hjorth J., Sodemann M., Thomsen B., Viskum M. 1992, Observations of delta Scuti stars from Århus, Aarhus Astro No.22
- Jurkevich I. 1971, A method of computing periods of cyclic phenomena, *Astrophysics and Space Science* 13, 154
- Karttunen H., Muinonen K. 1991, Error analysis of lightcurve periods, *Astronomy and Astrophysics* 242, 513
- Kaszás G., Kiss L. 1992, Hosszúperiódusú pulzáló változócsillagok fénygörbe- és periódusanálízise, TDK dolgozat, JATE, Szeged, témavezető: Szatmáry K.
- Kaszás G., Kiss L., Szatmáry K. 1993, Három Mira típusú csillag fényváltozása, *Meteor* 23, No.7-8, 46.
- Kennelly E.J., Walker G.A.H., Hubeny I. 1991, A nonradial pulsation model for the rapidly rotating delta Scuti star kappa2 Bootis, *Publ. Astron. Soc. Pacific* 103, 1250
- Kholopov P.N., Samus N.N., Frolov M.S. et al. 1985, General Catalogue of Variable Stars, Moscow, Nauka
- Klus I.A. 1982, A statistical analysis of the light curves of variable stars R Pictoris and Z Ursae Majoris, *Variable Stars (USSR)* 21, 766
- Koen C., Lombard F. 1993, The analysis of indexed astronomical time series. I. Basic methods, *3Monthly Notices Royal Astron.Soc.* 263, 287
- Kolláth Z. 1989, A kaotikus csillagpulzáció vizsgálata a változócsillagok fénygörbéje alapján, Egyetemi doktori dolgozat, MTA CSKI
- Kolláth Z. 1990, Chaotic behaviour in the light variation of the RV Tauri star R Scuti, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 247, 377
- Kolláth Z., Nuspl J. 1991, Resonance between pulsation modes due to tidal perturbation, *Proc. IAU Symp. No.151, Cordoba, Spain*
- Kolláth Z., Szeidl B. 1993, On the irregular light variation of RU Camelopardalis, *Astronomy and Astrophysics* 277, 62
- Kovács G. 1980, Period analysis at high noise level, *Astrophysics and Space Science* 69, 485
- Kovács G. 1981, Frequency shift in Fourier analysis, *Astrophysics and Space Science* 78, 175
- Kovács G. 1983, On the accuracy of frequency determination by an autoregressive spectral estimator, *Solar Physics* 82, 123
- Kovács G., Buchler J.R., Davis C.G. 1987, Application of time-dependent Fourier analysis to nonlinear pulsational stellar models, *Astrophysical Journal* 319, 247
- Kurtz D.W. 1983, The high frequency limit to Fourier analysis. A reminder of the Nyquist frequency, *Information Bulletin on Variable Stars No.2285*
- Kurtz D.W. 1985, An algorithm for significantly reducing the time necessary to compute a Discrete Fourier Transform periodogram of unequally spaced data, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 213, 773
- Lacy C.H. 1973, Changes of period in semiregular variables, *Astronomical Journal* 78, 90
- Lafler J., Kinman T.D. 1965, An RR Lyrae survey with the Lick 20-inch astrograph. II. The calculation of RR Lyrae periods by electronic computer, *Astrophysical Journal Suppl.* 11, 216
- Lomb N.R. 1976, Least squares frequency analysis of unequally spaced data, *Astrophysics and Space Science* 39, 447
- Lombard F., Koen C. 1993, The analysis of indexed astronomical time series. II. The O-C

- (observed-calculated) technique reconsidered, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 263, 309
- Lombard F. 1993, Change analysis of astronomical and meteorological data, *Proc. Conference on "Applications of Time Series Analysis in Astronomy and Meteorology"*, Ed. O.Lessi, p.47 Padova, Italy, 1993
- Loumos G.L., Deeming T.J. 1978, Spurious results from Fourier analysis of data with closely spaced frequencies, *Astrophysics and Space Science* 56, 285
- Marik M. (szerk.) 1989, *Csillagászat*, Akadémiai Kiadó, Budapest
- Martínez V.J., Paredes S., Saar E. 1993, Wavelet analysis of the multifractal character of the galaxy distribution, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 260, 365
- Meyer Y. 1993, *Wavelets, Algorithms and Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia
- Mizser A., Szatmáry K., Tepliczky I. 1990, Some results of Hungarian variable star observers, "First European Meeting of the AAVSO" Brussels, *Journal of AAVSO* 19, No.1. p.47
- Murtagh F., Zeilinger W.W., Starck J.-L., Böhnhardt H. 1993, Detection of faint extended structures by multiresolution wavelet analysis, *ESO Messenger* No.73 p.37
- Ochadlick A.R.Jr., Kritikos H.N., Giegengack R. 1993, Variations in the period of the sunspot cycle, *Geophys. Res. Lett.* 20, 1471
- Ostlie D.A., Cox A.N. 1986, A linear survey of the Mira variable star instability region of the Hertzsprung-Russell diagram, *Astrophysical Journal* 311, 864
- Paparó M., Szeidl B., Mahdy H.A. 1988, The high amplitude delta Scuti star SZ Lyncis revisited, *Astrophysics and Space Science* 149, 73
- Paparó M. 1993, *Delta Scuti szeizmológia*, Kandidátusi értekezés, MTA Csillagászati Kutatóintézet, Budapest
- Pelt J. 1980, Frequency analysis of astronomical time sequences, *Valgus Publ. Tallin* (in Russian)
- Pelt J. 1983, Phase dispersion minimization methods for estimation of periods from unequally spaced sequences of data, *Proc. Statistical Methods in Astronomy Symp.*, ESA SP-201 p.37
- Pelt J. 1993, Nonparametric methods for shift and periodicity detection in irregularly measured data, *Proc. Conference on "Applications of Time Series Analysis in Astronomy and Meteorology"*, Ed. O.Lessi, p.149 Padova, Italy, 1993
- Percy J.R. 1977, The application of maximum entropy spectral analysis to the study of short-period variable stars, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 181, 647
- Percy J.R., Jakate S.M., Matthews J.M. 1981, Short-period light variations in Be stars, *Astronomical Journal* 86, 53
- Percy J.R., Colivas T., Sloan W.B., Mattei J.A. 1990, Long-term changes in Mira variables, in: "Confrontation between Stellar Pulsation and Evolution", Eds. C.Cacciari and G.Clementini, *Astron.Soc.Pac.Conf.Ser.* Vol.11, p.446
- Pérez de la Blanca N., Garrido R. 1981, Period determination techniques, *Workshop on Pulsating B Stars*, Eds. GEVON and C.Sterken, Nice Obs. p.285
- Renson P. 1978, Méthode de recherche des périodes des Étoiles variables, *Astronomy and Astrophysics* 463, 125
- Roberts D.H., Lehár J., Dreher J.W. 1987, Time series analysis with CLEAN. I. Derivation of a spectrum, *Astronomical Journal* 93, 968
- Scargle J.D. 1981, Studies in astronomical time series analysis. I. Modeling random processes in the time domain, *Astrophysical Journal Suppl.* 45, 1
- Scargle J.D. 1982, Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data, *Astrophysical Journal* 263, 835

- Scargle J.D. 1989, Studies in astronomical time series analysis. III. Fourier transforms, autocorrelation functions, and cross-correlation functions of unevenly spaced data, *Astrophysical Journal* 343, 874
- Scargle J.D. 1990, Studies in astronomical time series analysis. IV. Modeling chaotic and random processes with linear filters, *Astrophysical Journal* 359, 469
- Scargle J.D. 1993, Wavelet methods in astronomical time series analysis, Proc. Conference on "Applications of Time Series Analysis in Astronomy and Meteorology", Ed. O.Lessi, Padova, Italy
- Schwarzenberg-Czerny A. 1989, On the advantage of using analysis of variance for period search, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 241, 153
- Schwarzenberg-Czerny A. 1991, Accuracy of period determination, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 253, 198
- Sørensen J.M. 1988, Measurements of oscillation parameters from synthetic time series, Proc. Symp. Seismology of the Sun and Sun-like Stars, Tenerife, Spain, ESA SP-286 p.41
- Starck J-L., Bijaoui A. 1991, Filtering and restoration with wavelet transform, Proc. 3rd ESO/ST-ECF Data Analysis Workshop, Ed. P.J. Grosbøl and R.H. Warmels, ESO Conf. Work. Proc. No.38, p.17
- Stellingwerf R.F. 1978, Period determination using phase dispersion minimization, *Astrophysical Journal* 224, 953
- Sterne T.E. 1934, The errors of period of variable stars. I. The general theory illustrated by RR Scorpii, *Harvard College Observatory Circular* 386, p.1
- Subba Rao T. (ed.) 1993, *Developments in Time Series Analysis*, Chapman & Hall, London
- Suchko M.K. 1980, The periodicities of Z Ursae Majoris, *Journal of AAVSO* 9, No.2. 74
- Swan P.R. 1982, Discrete Fourier transforms of nonuniformly spaced data, *Astronomical Journal* 87, 1608
- Swingler D.N. 1985, A relationship between the Jurkevich periodogram and the Fourier transform spectral estimator, *Astronomical Journal* 90, 675
- Swingler D.N. 1989, A comparison of the Fourier, Jurkevich, and Stellingwerf methods of period estimation, *Astronomical Journal* 97, 280
- Szabados L. 1989, Period changes of bright southern cepheids, *Commun. Konkoly Obs. Hung. Acad. Sci., Budapest*, No.94
- Szabados L. 1991, Northern cepheids: Period update and duplicity effects, *Commun. Konkoly Obs. Hung. Acad. Sci., Budapest*, No.96
- Szatmáry K., Mizser A., Dömény G. 1985, Multiple-period red variables: Y Lyncis and W Cygni, *BAA Variable Star Section Circular* No.62, p.2
- Szatmáry K., Dömény G. 1985, Y Lyncis 1976-1984, *Meteor* 15, No.2, 5.
- Szatmáry K., Mizser A. 1985, W Cygni 1973-1984, *Meteor* 15, No.6, 34.
- Szatmáry K. 1986a, Semiregular red variable stars - a field of cooperation between amateurs and professionals, Proc. GIREP '86 Conference, Copenhagen, Denmark, ESA SP-253 p.407
- Szatmáry K. 1986b, Pulzáló változócsillagok periódusmeghatározása, *Csillagászati Évkönyv az 1987. évre, Gondolat Kiadó, Bp.*, 149.
- Szatmáry K., Mizser A. 1986a, T Cephei 1970-1985, *Meteor* 16, No.2, 26.
- Szatmáry K., Kovács I., Fidrich R. 1986, Három félszabályos változó, a V CVn, a V Boo és a WZ Cas periódusairól, *Meteor* 16, No.7-8, 34.
- Szatmáry K., Mizser A. 1986b, AF Cygni 1967-1985, *Meteor* 16, No.9, 14.
- Szatmáry K., Kovács I., Mizser A. 1986, Z UMa 1968-1986, *Meteor* 16, No.11, 15.
- Szatmáry K., Mizser A. 1986c, R Cas 1973-1986, *Meteor* 16, No.12, 19.

- Szatmáry K., Kovács I., Mizser A. 1987, R Cyg 1973-1986, *Meteor* 17, No.2, 37.
- Szatmáry K., Mizser A. 1987, X Ophiuchi 1977-1986, *Meteor* 17, No.2, 41.
- Szatmáry K., Bakondi G., Kovács I. 1987a, TX Dra, AH Dra 1974-1986, *Meteor* 17, No.3, 33.
- Szatmáry K., Bakondi G., Kovács I. 1987b, R UMa 1973-1986, *Meteor* 17, No.4, 42.
- Szatmáry K. 1987a, A pulzáló vörösóriások periódusairól, *Meteor* 17, No.7-8, 9.
- Szatmáry K. 1987b, Delta Scuti típusú változócsillagok kettős rendszerekben, Egyetemi doktori értekezés, JATE, Szeged
- Szatmáry K., Mizser A. 1988, U Del, EU Del 1969-1986, *Meteor* 18, No.2, 40.
- Szatmáry K. 1988, BV photometry of iota Bootis, *Information Bulletin on Variable Stars* No.3262
- Szatmáry K., Dömény G. 1989, RS Cygni 1980-1987, *Meteor* 19, No.1, 45.
- Szatmáry K. 1990a, UX Draconis 1976-1989, *Meteor* 20, No.7-8, 32.
- Szatmáry K. 1990b, Pulsating variable stars in binary systems, "First European Meeting of the AAVSO" Brussels, *Journal of AAVSO* 419, No.1, 52
- Szatmáry K. 1991, Y Lyncis 1973-1990, *Meteor* 21, No. 11, 32.
- Szatmáry K., Gál J. 1992, Z UMa 1968-1991, *Meteor* 22, No. 5, 31.
- Szatmáry K., Vinkó J. 1992, Periodicities of the light curve of the semiregular variable star Y Lyncis, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 256, 321
- Szatmáry K., Gál J. 1992, Wavelet-analysis of some pulsating stars, In: *Inside the Stars*, IAU Colloquium No. 137, Vienna, *Communications in Astroseismology* No.43, 8th 19. *Astron.Soc.Pac.Conf.Ser. Vol.40*, p.761, 1993 Eds.W.W.Weiss, A.Baglin
- Szatmáry K., Gál J., Vinkó J. 1993, Tests of wavelet analysis for periodic signals in astronomy, *Proc. Conference on "Applications of Time Series Analysis in Astronomy and Meteorology"*, Ed. O.Lessi, p.251 Padova, Italy, 1993
- Szatmáry K. 1993, A catalogue of short period pulsating variable stars of A and F spectral classes, *Information Bulletin on Variable Stars* No.3943
- Szatmáry K., García J.R. 1994, Access software for "A catalogue of short period pulsating variable stars of A and F spectral classes", *Astronomy and Astrophysics* (submitted)
- Szatmáry K., Vinkó J., Gál J. 1994a, Applications of wavelet analysis in variable star research, I. Properties of the wavelet map of simulated variable star light curves, *Astronomy and Astrophysics Suppl. Ser.* (submitted)
- Szatmáry K., Vinkó J., Gál J. 1994b, Short period variation of iota Bootis, *Information Bulletin on Variable Stars* (in preparation)
- Szatmáry K., Hegeds T., Borkovits T., Vinkó J., Gál J. 1994, An O-C diagram analysis of VW Cephei (in preparation)
- Szegő K.(ed.) 1992, *Space Research Activities in Hungary*, p.19
- Szeidl B. 1983, Period changes in dwarf cepheids, III SZ Lyncis, *Commun. Konkoly Obs. Hung. Acad. Sci., Budapest*, No.84
- Tápai Cs. 1991, Változócsillagok fénygörbéjének numerikus vizsgálati módszerei, Diplomamunka, JATE, Szeged, témavezető: Szatmáry K.
- Tusnádý G., Ziermann M. (szerk.) 1986, *Idősorok analízise*, Műszaki, Budapest
- Ulrych T.J., Clayton R.W. 1976, Time series modelling and maximum entropy, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 12, 188
- Vetesnik M., Papousek J. 1987, *Studies on light changes of semiregular red variable stars*, University of Brno
- Vinkó J. 1989, Változócsillagok periódusváltozása kettős vagy többes rendszerben történő mozgás során, Diplomamunka, JATE, Szeged, témavezető: Szatmáry K.
- Vinkó J., Szabados L., Szatmáry K. 1993, Study of the population II Cepheid AU Pegasi, *Astronomy and Astrophysics* 279, 410

- Vinkó J., Gál J., Szatmáry K., Kiss L. 1993, A seasonal light curve and new ephemeris of VW Cephei, Information Bulletin on Variable Stars (in press)
- Vio R., Cristiani S., Lessi O., Provenzale A. 1992, Time series analysis in astronomy: An application to quasar variability studies, *Astrophysical Journal* 391, 518
- Wehlau W., Leung K. 1964, The multiple periodicity of δ Delphini, *Astrophysical Journal* 139, 834
- Whitelock P.A., Feast M., Catchpole R. 1991, IRAS sources and the nature of the Galactic Bulge, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* 248, 276
- Whitney Ch.A. 1984, Semiregular variables: Are they chaotic or ringing?, *Journal of AAVSO* 13, No.1, p.31
- Willson L.A. 1986, The O-C diagram: a useful tool, "The Study of Variable Stars Using Small Telescopes" Ed. J.Percy, Cambridge Univ. Press, p.219
- Wood P.R. 1976, Red variables, in: Proc. of "Multiple Periodic Variable Stars", IAU Coll. No.29, Ed. W.S.Fitch, Budapest, p.69