1. fejezet

Csillagok szerkezete

A csillagok nagy tömegű ($\sim 10^{30}$ kg), magas hőmérsékletű ($T_{\mathrm{eff}} \sim 3000 - 30\ 000$ K), közel gömb alakú égitestek, melyek belsejében atommagfúzió során energia szabadul fel és sugárzódik ki. A csillagok anyaga gázhalmazállapotú, legnagyobbrészt teljesen ionizált plazma.

A csillag felszínének azt a gázréteget tekintjük, ahonnét kezdve kifelé az anyag átlátszó az elektromágneses sugárzás számára az optikai tartományban. Ez a réteg a *fotoszféra.* A fotoszféra alatti területeket tekintjük a csillag belsejének, a fotoszféra feletti rétegeket pedig a csillag légkörének.

Mivel a fotoszféra alá nem láthatunk be közvetlenül, ezért a fizika alapegyenleteit kell segítségül hívnunk, ha a csillagok belső szerkezetét meg akarjuk ismerni. Ebben a fejezetben ezzel foglalkozunk.

Szükséges előismeretek, kompetenciák: differenciál- és integrálszámítás, differenciálegyenletek, klasszikus mechanika, termodinamika, atomfizika, kvantummechanika alapfogalmai és -egyenletei.

Kulcsszavak: viriáltétel, hidrosztatikai egyensúly, állapotegyenlet, Chandrasekhar-tömeg, energiatranszport, alagúteffektus, atommagfúzió, Gamow-csúcs, proton-proton ciklus, CNO-ciklus, 3α-folyamat.

1.1. Csillagok egyensúlya és stabilitása

A csillagok dinamikus egyensúlyban vannak, azaz két egymással ellentétes erő következtében anyaguk hosszú ideig stabil állapotban maradhat. Az egyensúlyért felelős két erő a *nyomás*ból és a *gravitáció*ból származik.

1.1.1. A viriáltétel

Egy saját gravitációs terében egyensúlyban lévő gázgömbre érvényes a pontrendszerek mechanikájából is ismert *viriáltétel* egyensúlyi alakja:

$$3\int P dV + \Omega \;=\; 0, \tag{1.1}$$

ahol $\int P dV$ a csillag *termikus (belső) energiá*jával arányos mennyiség, Ω pedig a csillag teljes gravitációs helyzeti energiája (*potenciális energiája*). A gravitációs potenciális energia a csillag M tömegétől és R sugarától így függ:

$$\Omega \;=\; -k\frac{GM^2}{R}, \tag{1.2}$$

ahol G a gravitációs állandó, k pedig egy egységnyi nagyságrendű numerikus faktor, amely a csillag tömegeloszlásától függ (homogén sűrűségű gömb esetén $k = 3/5$).

A csillag forró plazmaanyaga jó közelítéssel ideális gáznak tekinthető (részletesen lásd lentebb). Ebben az esetben kimutatható, hogy

$$\int PdV \;=\; (\gamma - 1)U, \tag{1.3}$$

ahol $\gamma = c_P/c_V$ a fajhőhányados (*adiabatikus kitevő*), U pedig a csillag teljes belső energiája.

Tehát a csillag teljes mechanikai és termikus energiájának összege (1.1) és (1.3) alapján:

$$E \;=\; U + \Omega \;=\; \frac{\gamma - 4/3}{\gamma - 1}\Omega \tag{1.4}$$

A stabil egyensúly feltétele: $E \leq 0$. Mivel definíció szerint $\Omega < 0$, ezért a stabilitás feltételeként az adiabatikus kitevőre érvényes a $\gamma \geq 4/3$ összefüggés.

A csillagok anyagát jó közelítéssel ideális gáznak tekinthetjük. Pontszerű részecskékből álló ideális gázra $\gamma = 5/3$. Ekkor a viriáltétel egyensúlyi egyenlete az alábbi egyszerű formát ölti:

$$E \;=\; \frac{\Omega}{2} \;=\; -\frac{k}{2}\frac{GM^2}{R}. \tag{1.5}$$

Ebben az esetben a csillag összenergiája negatív, tehát stabil egyensúlyi állapotban van.

1.1.2. A hidrosztatikai egyensúly egyenlete

A csillagok belső szerkezetét a folyadékok mechanikájából jól ismert hidrosztatikai egyensúly egyenletével tárhatjuk fel. Ehhez tekintsünk egy stabil egyensúlyban lévő gázgömböt! A gömbszimmetria miatt a fizikai mennyiségek (nyomás, sűrűség, hőmérséklet) csak a centrumtól mért r távolság függvényei lesznek. Szemeljünk ki egy tetszőleges r távolságnál egy infinitezimálisan vékony (dr vastagságú) gömbhéjat (1.1. ábra)! A gömbhéjon belül a ρ sűrűség konstansnak tekinthető. E gömbhéj tömegét a következő összefüggés adja:

$$dm(r) \;=\; 4\pi\rho(r)r^2dr \tag{1.6}$$

Erre a gömbhéjra felírva a hidrosztatikai egyensúly egyenletét, a következőt kapjuk:

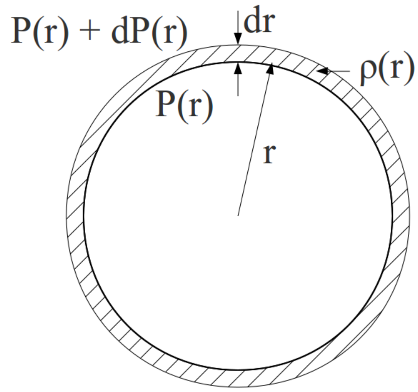
$$\frac{dP(r)}{dr} \;=\; -\rho(r)g(r) \;=\; -\rho(r)\frac{GM(r)}{r^2}, \tag{1.7}$$

ahol *P(r)* a nyomás, *g(r)* pedig a lokális gravitációs gyorsulás.

Az *M(r)* függvény az r sugáron belüli tömeget jelöli:

$$M(r) \;=\; 4\pi\int_0^r \rho(r)r^2dr, \tag{1.8}$$

ez utóbbi képlet a *tömeg-kontinuitási*, azaz a tömeg megmaradását kifejező egyenlet.



1.1. ábra. *Gömbhéjas szerkezetű csillagot feltételezve a hidrosztatikai egyensúly egyenlete könnyen felírható*

A hidrosztatikai egyensúly alapegyenlete az (1.6) képlet felhasználásával átírható egy másik alakba, ahol nem a távolságot (r), hanem az *M(r)* tömeget tekintjük független változónak. Rövid számolás után kapjuk:

$$\frac{dP(r)}{dm} = -\frac{1}{4\pi}\frac{GM(r)}{r^4}. \tag{1.9}$$

Ez a leírásmód az ún. *Lagrange-formalizmus*.

1.2. Állapotegyenlet a csillagokban

A csillagok anyagának fizikai jellemzői közti összefüggést *állapotegyenlet*nek nevezzük. Egyszerűbb esetekben az állapotegyenlet kifejezhető egy zárt, analitikus formulával. Az alábbiakban ezeket az eseteket tekintjük át.

1.2.1. A nyomásintegrál

A csillagok anyaga nagyrészt teljesen ionizált plazma, amit *ideális gáz*nak tekinthetünk. Ideális gázban a részecskék szabadon mozognak, és közöttük az ütközésen kívül más kölcsönhatás nem történik. Ekkor a klasszikus statisztikus fizikában tanult gondolatmenet szerint a nyomás a következő integrállal fejezhető ki:

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p \cdot v \cdot n_p dp, \tag{1.10}$$

ahol p a részecskék impulzusa, v a sebessége, n_p a p impulzusú részecskék koncentrációja (azaz az ilyen részecskék száma egységnyi térfogatban). Ha ebbe az összefüggésbe behelyettesítjük a T hőmérsékletű közegben p impulzusú részecskék számát megadó *Maxwell–Boltzmann-eloszlásfüggvényt*, elemi integrálok kiszámítása után adódik:

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu}\mathcal{R}T, \tag{1.11}$$

ahol n a teljes részecskekoncentráció, k a Boltzmann-állandó, μ a közeg átlagos molekulasúlya (1 részecskére eső átlagos tömeg atomi tömegegységekben), $\mathcal{R}$ az egyetemes gázállandó. (1.11) nem más, mint az *ideális gáz* jól ismert állapotegyenlete.

1.2.2. A sugárzási tér szerepe

A csillagok belsejében a magas hőmérséklet miatt igen jelentős a fotonok nyomása, ami sokkal nagyobb is lehet, mint a gáznyomás. Mivel a csillagok belseje átlátszatlan, a fotonok nem szabadon terjednek, hanem nagyon kis távolságok megtétele után kölcsönhatnak a gázrészecskékkel, majd újra kisugárzódnak. Eközben mind hullámhosszuk, mind terjedési irányuk megváltozhat. Sok ilyen folyamat után a kialakul a *sugárzási egyensúly* a csillagban, a sugárzás *termalizálódik*, azaz a fotonok és a gázrészecskék energiaeloszlása ugyanazzal a T hőmérséklettel lesz jellemezhető. Az ilyen sugárzást nevezzük *feketetest-sugárzás*nak.

Egy T hőmérsékletű feketetest-sugárzás ν frekvenciájú fotonjainak térbeli energiasűrűsége a *Planck-formula* alapján

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \tag{1.12}$$

ahol h a Planck-állandó, k a Boltzmann-állandó, c a fénysebesség. Ezt az összes frekvenciára integrálva kaphatjuk meg a feketetest-sugárzás jól ismert energiasűrűségét megadó képletet:

$$u = aT^4, \tag{1.13}$$

ahol a az ún. sugárzási konstans, értéke SI-egységekben $7,566 \cdot 10^{-16}$.

A nyomásintegrál (1.10) képletét a fotongázra alkalmazva (kihasználva, hogy fotonokra v=c) adódik a *sugárzási tér állapotegyenlete*:

$$P = \frac{a}{3}T^4. \tag{1.14}$$

Mivel egy γ fajhőhányadosú ideális gázra (1.3) értelmében $P = (\gamma - 1)u$, (1.13) és (1.14) behelyettesítéséből látható, hogy a fotongáz úgy viselkedik, mint egy $\gamma = 4/3$ fajhőhányadosú ideális gáz.

(1.11) és (1.14) összeadásával kaphatjuk meg a sugárnyomás (P_r) és a gáznyomás (P_g) együttes hatását leíró kombinált állapotegyenletet:

$$P = P_g + P_r = nkT + \frac{a}{3}T^4. \tag{1.15}$$

Ha bevezetjük a gáznyomás és a teljes nyomás arányát megadó $\beta < 1$ paramétert ($\beta = P_g/P$), egyszerű átrendezéssel adódik

$$P = \frac{nkT}{\beta} = \frac{\rho}{\beta\mu}\mathcal{R}T. \tag{1.16}$$

Látható, hogy a sugárzási tér (fotonok) hatására az ideális gáz állapotegyenlete formálisan úgy módosul, hogy az átlagos molekulasúly helyett annak β-szorosa szerepel.

Ha feltesszük, hogy β a csillag belsejében konstans, (1.16) szemléletesebb alakra hozható. Kihasználva, hogy $P = P_g + P_r = \beta P + (1-\beta)P$, T-t P_g fenti képletéből kifejezve és visszahelyettesítve P_r képletébe, a sugárzás és a plazma együttes állapotegyenletének egyszerűsített alakját kaphatjuk:

$$P \;=\; \left[\frac{3(1-\beta)\mathcal{R}^4}{a(\mu\beta)^4}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \rho^{\frac{4}{3}}. \tag{1.17}$$

Ebből látható, hogy a fenti egyszerűsítő feltevés következtében a nyomás csak a sűrűségtől függ, a hőmérséklettől nem. Az ilyen állapotegyenletet nevezzük *politrop állapotegyenletnek*.

1.3. Egyszerű csillagmodellek

A csillagok néhány alapvető fizikai paraméterére nagyságrendi becslést lehet tenni pusztán a hidrosztatikai egyensúly egyenlete és néhány közelítő feltevés segítségével. Ezek a modellek nem igazán valószerűek, de egyszerűen kiszámolhatóak, és segítségükkel közelítő képet kaphatunk a reális csillagok belsejében uralkodó viszonyokról is.

1.3.1. Állandó sűrűségű modell

Első példaként tegyük fel, hogy a csillag sűrűsége állandó, azaz $\rho(r) = \rho_0$ konstans. Ekkor az r sugáron belüli tömeg egyszerűen $M(r) = (4\pi/3)r^3\rho_0$, tehát az (1.7) egyenlet így írható:

$$\frac{dP}{dr} \;=\; -\frac{4\pi G\rho_0^2}{3}r \;=\; -kr. \tag{1.18}$$

ahol k konstans. Ez az egyenlet azonnal integrálható, megoldása:

$$P \;=\; P_c\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right), \tag{1.19}$$

amennyiben feltesszük, hogy a centrumban (r=*0*) a nyomás P_c, a felszínen (r=R) pedig 0.

1.3.2. Fizikai viszonyok a centrumban

A centrális nyomás nagyságrendjét próbáljuk úgy becsülni, hogy az (1.7) egyenlet bal oldalán szereplő deriváltat konstansnak tekintjük: $dP/dr \approx -P_c/R$. Ez annak a közelítésnek felel meg, amikor a nyomás helyfüggését a csillag belsejében lineárisnak vesszük (a negatív előjel mutatja, hogy a nyomás bentről kifelé csökken). Az (1.7) egyenlet jobb oldalán szereplő g nehézségi gyorsulást közelítsük annak a csillag felszínén felvett értékével: $g \approx GM/R^2$, ahol M a csillag tömege, R a sugara. Mivel a sűrűség a fenti feltevés értelmében konstans, ezt szintén egyszerűen kifejezhetjük a csillag teljes tömegével és sugarával: $\rho_0 = 3M/(4\pi R^3)$. Mindezeket beírva a hidrosztatikai egyensúly (1.7) egyenletébe, egyszerű átrendezés után adódik a következő kifejezés:

$$P_c \approx \frac{3}{4\pi}\frac{GM^2}{R^4}. \tag{1.20}$$

A fenti képletbe a Nap adatait beírva $P_c(\odot) \approx 3 \cdot 10^{14}$ Pa adódik, ez egészen hasonló a pontosabb számításokkal kapható értékekhez.

A centrális hőmérséklet becsléséhez kihasználhatjuk, hogy a konstans sűrűségű modellben az (1.11) állapotegyenlet értelmében a nyomás csak a hőmérséklettől függ. A nyomás helyére ezt behelyettesítve, a fenti közelítéseket megismételve kaphatjuk:

$$T_c \approx \frac{\mu}{\mathcal{R}} \frac{GM}{R} \tag{1.21}$$

A Nap adataira ez alapján $T_c(\odot) \approx 1,4 \cdot 10^7$ K adódik, ami szintén elég jó közelítésnek számít.

1.3.3. A csillaglégkör szerkezete

A fenti egyszerű modellekben a csillagok felszínén a nyomást 0-nak tételeztük fel. Mivel a csillagoknak nincs szilárd felszínük, így ez csak durva közelítés. Valójában a csillagok fotoszférája felett is található anyag, ez a csillag *légköre*. Mivel a csillaglégkör igen kis tömegű a csillag többi részéhez képest, a csillaglégkörben a gravitációs gyorsulás ugyanúgy a csillag össztömegétől és sugarától függ, mint fentebb (sugárnak most a fotoszféra sugarát tekintjük). Ha a fotoszférától mérhető távolságot h-val jelöljük, a hidrosztatikai egyensúly egyenlete a következő formát ölti:

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g = -\rho \frac{GM}{R^2}. \tag{1.22}$$

Ha a hőmérsékletet állandónak vesszük (*izotermikus csillaglégkör*), akkor az (1.11) állapotegyenleten keresztül a nyomás deriváltja átírható a sűrűség deriváltjává:

$$\frac{dP}{dh} = \frac{(R)T}{\mu} \frac{d\rho}{dh} = -\rho g. \tag{1.23}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$\rho = \rho_f \exp\left[-\frac{\mu g}{\mathcal{R}T} h\right] = \rho_f \exp\left[-\frac{h}{H_p}\right], \tag{1.24}$$

ahol ρ_f a fotoszféra sűrűsége. Teljesen hasonló kifejezés kapható a nyomásra is, csak ott ρ_f helyén P_f áll. $H_p = \mathcal{R}T/\mu g$ a *nyomási skálamagasság*, az a távolság, ahol a fotoszféra sűrűsége, ill. nyomása a kezdeti érték e-ed részére csökken. A Nap légkörében ez a távolság kb. 200 km. Az (1.24) egyenlet a földi atmoszférában is érvényes, ezért *barometrikus magasságformulá*nak is nevezik.

1.4. A fehér törpecsillagok belső szerkezete

A fehér törpecsillagok különleges, ún. *kompakt* égitestek: tömegük kb. naptömegnyi, méretük azonban 1%-a a Napénak. Sűrűségük ezért igen nagy. Az ilyen nagy sűrűségű anyag a klasszikus plazmákhoz képest eltérő módon viselkedik, a kvantumos effektusok hangsúlyos szerepet kapnak benne.

1.4.1. A nagyon nagy sűrűségű anyag állapotegyenlete

A kvantummechanika értelmében a részecskék helye és impulzusa egyszerre nem lehet meghatározott értékű (*Heisenberg-elv*). Ha a koordináta bizonytalansága Δx, az x irányú impulzusé Δp_x, akkor közöttük érvényes a *Heisenberg-féle határozatlansági reláció*:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \;\approx\; \hbar, \tag{1.25}$$

ahol $\hbar$ a Planck-állandó osztva 2π-vel.

A kvantummechanika másik fontos tapasztalati alapelve a *Pauli-elv*: eszerint egy fizikai rendszerhez tartozó fermionok (feles spinű részecskék) nem lehetnek azonos kvantumállapotban, tehát valamelyik kvantumszámukban különbözniük kell.

A nagyon nagy sűrűségű plazmában a fenti két kvantummechanikai elv együttes hatása a sűrűséget csökkenteni igyekszik. Ha ugyanis a részecskék átlagos távolsága Δx alá csökken, akkor ennek hatására ezek Δp_x impulzusbizonytalansága megnő. A kvantumstatisztika értelmében a koordináták és impulzusok alkotta 6-dimenziós *fázistér* felosztható h^3 nagyságú kvantumcellákra. A Heisenberg- és Pauli-elvek értelmében minden egyes kvantumcellában legfeljebb két fermion tartózkodhat (ellentétes spinnel). Ha minden kvantumcella betöltődött, és a részecskéket még jobban össze akarnánk nyomni, a rendszerben megjelenik egy kvantumos eredetű nyomás (*kvantumnyomás*), amely nem függ a hőmérséklettől, pusztán a részecskék sűrűségétől. Az ilyen állapotú anyagot *elfajult* (*degenerált*) állapotúnak nevezzük.

Kimutatható, hogy egy teljesen ionizált plazmában először az elektronok válnak elfajulttá, ezért a továbbiakban ezekkel foglalkozunk. Ha az elektronok koncentrációja n_e, 1 elektronra jutó átlagos térfogat $V_e \approx 1/n_e \approx l^3$, ahol l az elektronok közti átlagos távolság. Ha a sűrűség nagyon nagy, l nagyon kicsi lesz, tehát a Heisenberg-elv értelmében

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{l} \;=\; \hbar n_e^{1/3} = p_F, \tag{1.26}$$

ez a *Fermi-impulzus*. Az ennek megfelelő energia a *Fermi-energia*:

$$E_F = p_F^2/2m_e \;=\; \hbar^2/(2m_e)n_e^{2/3}. \tag{1.27}$$

A gáz akkor válik elfajulttá, amikor a Fermi-energia meghaladja a kT termikus energiát. (1.27)-ből látható, hogy ez annál hamarább következik be, minél kisebb a részecskék tömege. Ez az oka annak, hogy először az elektronok kerülnek elfajult állapotba.

A Fermi-energia kifejezését behelyettesítve a nyomásintegrál (1.10) képletébe, elemi integrálás után adódik a nemrelativisztikus elfajult elektrongáz állapotegyenlete:

$$P_e \;=\; \frac{8\pi h^2}{15\mu_e m_e m_p^{5/3}}\rho^{5/3} \;=\; K\rho^{5/3}, \tag{1.28}$$

ahol μ_e az egy elektronra eső relatív atomtömeg, m_p a proton tömege, m_e az elektron tömege, K pedig ezen elemi állandókat tartalmazó konstans. Ha az elektronok relativisztikus energiájúak, ehhez teljesen hasonló kifejezés adódik, csak a konstans és a kitevő értéke lesz más: $P_e(\mathrm{rel}) \;=\; K_r \cdot \rho^{4/3}$.

1.4.2. A Chandrasekhar-tömeg

A fehér törpékben a P_e kvantumnyomás sokkal nagyobb, mint a közönséges P_g gáznyomás. Emiatt a fehér törpék belső szerkezetének leírása is egyszerűsödik a normál csillagokéhoz képest. Mivel a nyomásért az elektronok, a gravitációért viszont az atommagok (ionok) felelősek, egyensúlyi állapot csak egy meghatározott tömegértékig lehetséges, amíg az elfajult elektrongáz nyomása képes ellensúlyozni a gravitációt.

Tegyük fel, hogy az M tömegű, R sugarú fehér törpe összesen N_e elektront tartalmaz. Mivel (1.26) értelmében egy elektron átlagos impulzusa $p \approx p_F \approx \hbar(N_e/R^3)^{1/3} = \hbar N_e^{1/3}/R$, a fehér törpe összes elektronjának energiája:

$$E_e \;=\; N_e p_F c \approx \hbar c \frac{N_e^{4/3}}{R}, \tag{1.29}$$

ahol feltettük, hogy az elektronok már relativisztikusak. A fehér törpe teljes energiáját az elektronok Fermi-energiájának és az ionok gravitációs energiájának összege adja:

$$E \;\approx\; \hbar c \frac{N_e^{4/3}}{R} - \frac{GM^2}{R}. \tag{1.30}$$

A stabilitás határán $E = 0$, tehát

$$\hbar c \frac{N_e^{4/3}}{R} \;=\; \frac{GM^2}{R}. \tag{1.31}$$

Mivel a plazma elektromosan semleges, $N_e = ZN_i$, ahol N_i az ionok száma, Z az átlagos magtöltés. Az össztömeg szintén kifejezhető az ionok számával: $M = Am_pN_i$, ahol A az átlagos tömegszám, m_p a proton tömege. Ezeket beírva az (1.31) egyenletbe, a tömeg kifejezésére adódik:

$$M \;\approx\; \left(\frac{Z}{A}\right)^2 \left(\frac{\hbar c}{G m_p^{4/3}}\right)^{3/2}. \tag{1.32}$$

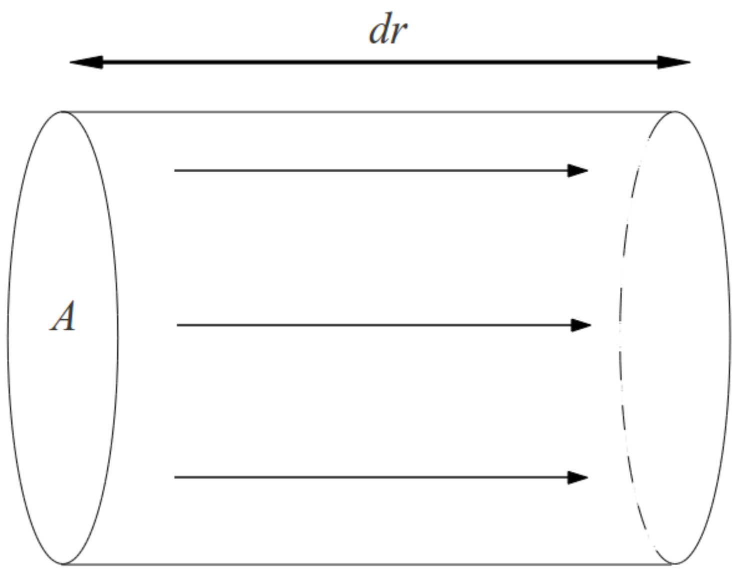
Látható, hogy az egyensúly csak egy véges tömegértékig tartható fent. A fenti képlet nagyságrendi becslésként kb. 1 naptömeget ad. A pontosabb számítások szerint ez a tömegérték kb. 1,4 - 1,5 $M_\odot$ (*Chandrasekhar-féle határtömeg*).

1.5. Az energia terjedése a csillagokban

A csillagok belsejében energiatranszport zajlik a centrumból a felszín felé. Ez a folyamat különbözőképpen mehet végbe annak függvényében, hogy a csillag anyaga milyen fizikai állapotban van. Ebben a fejezetben ezen folyamatok alapjait tekintjük át.

1.5.1. Sugárzási energiatranszport

A csillagok belsejében keletkező fotonok hatékony energiatovábbításra képesek. Egy ν frekvenciájú foton által továbbított energia $E_\nu = h\nu$, ahol h a Planck-állandó. A fotonoknak emellett impulzusuk is van, amelynek nagysága $p_\nu = E_\nu/c = h\nu/c$, ahol c a fénysebesség.



1.2. ábra. *A fotonok impulzust adnak át a csillaganyagot alkotó részecskéknek, melynek kiszámításához a közeget egy egységnyi felületű (A=1) hengernek tekintjük (részletek a szövegben).*

A fotonok azonban a csillagban nem zavartalanul terjednek, ugyanis állandóan kölcsönhatásba lépnek a csillag anyagát alkotó plazma részecskéivel. Ennek során szóródhatnak, vagy elnyelődhetnek és újra kisugárzódhatnak, aminek során frekvenciájuk és terjedési irányuk is megváltozhat. Két szóródás között megtett *közepes szabad úthossz* $l = 1/(n\sigma)$, ahol n a plazmarészecskék koncentrációja, σ a szórási hatáskeresztmetszet. Megmutatható, hogy N szóródás után a kiinduló helyzethez képest átlagosan $d \approx l \cdot \sqrt{N}$ távolságra kerülnek. A fotonok által történő energiatovábbítás tehát lassú, diffúziós folyamat, ezért *sugárzási diffúzió*nak is nevezik.

A fotonok szóródása, vagy elnyelődése a közegnek impulzust ad át. Ennek kiszámítására tegyük fel, hogy egy dr magasságú, egységnyi felületű hengerben (1.2. ábra), időegység alatt F_ν energia áramlik át fotonok formájában. A henger belsejében a ν frekvenciájú fotonok által átadott impulzus $dp_\nu = -k_\nu(F_\nu/c)dr$, ahol k_ν a plazma anyagára jellemző *extinkciós tényező*. Az extinkciós tényezőt a csillagászatban $\kappa_\nu\rho$ alakban szokás felírni, ahol ρ a sűrűség. Az átadott fotonimpulzus a henger falára nyomást fejt ki, ennek nagysága $P_r(\nu) = (1/A)dp_\nu/dt$, ahol A=*1* a henger felülete. Az előbbi képletet az összes frekvenciára integrálva kaphatjuk a sugárnyomásra felírható differenciálegyenletet:

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c}F. \tag{1.33}$$

Kihasználva, hogy a csillagok belsejében a sugárzás feketetest-sugárzás, (1.14) felhasználásával a felületegységenként átáramló energia

$$F = \frac{ac}{3\kappa\rho}\left(\frac{dT^4}{dr}\right). \tag{1.34}$$

Ez a sugárzási diffúzió egyenlete, hasonló alakú, mint a hővezetés egyenlete. Az $ac/(3\kappa\rho)$ tényezőt szokás a sugárzás diffúziós együtthatójának is nevezni.

1.5.2. Az Eddington-féle kritikus fényesség

Ha a fotonsűrűség nagyon nagy, a sugárnyomás hatására a gravitáció lokális hatása csökken. Az (1.33) egyenlet és a hidrosztatikai egyensúly (1.7) egyenletének összevetéséből látszik, hogy egy tetszőleges r sugárnál az *effektív gravitációs gyorsulás*

$$g_{\mathrm{eff}} = \frac{GM(r)}{r^2} - \frac{\kappa}{c}\frac{L(r)}{4\pi r^2}, \tag{1.35}$$

ahol kihasználtuk, hogy gömbszimmetrikus csillagban a fluxus $F(r) = L(r)/(4\pi r^2)$ (*L(r)* a *luminozitás*).

Ha a csillag felszínén ($r = R$) $g_{\mathrm{eff}} = 0$, akkor a csillag a stabilitás határán van. Ekkor (1.35) átrendezéséből adódik az ehhez szükséges *Eddington-luminozitás*:

$$L_E = \frac{4\pi GMc}{\kappa}. \tag{1.36}$$

Ez a csillag maximális luminozitása. Ennél nagyobb luminozitásnál a sugárnyomás szétfújja a csillagot.

1.5.3. Konvekció

Az energia továbbítása nemcsak a fotonok terjedése, hanem a plazma részecskéinek hidrodinamikai áramlása során is végbemehet. Ez a folyamat a *konvekció*. A plazmában ilyenkor buborékok (konvekciós cellák) alakulnak ki, Ezek a mélyebben fekvő, melegebb környezetből a magasabban lévő, hidegebb rétegekbe áramolva lehűlnek, azaz hőenergiát adnak át, majd visszasüllyedve újra felmelegszenek, és újra felfelé áramlanak. Bizonyos körülmények között ez a folyamat önfenntartóvá válhat.

Tekintsünk egy környezetétől adiabatikusan elzárt konvekciós cellát! Ez a környezetével egyensúlyban van, tehát nyomása egyenlő a környezet nyomásával. Ha egy véletlen fluktuáció révén a sűrűsége a környezetéhez képest kicsit csökken, akkor az állapotegyenlet értelmében a hőmérséklete kicsit nagyobb lesz, mint a környezet hőmérséklete. Erre a cellára ekkor felhajtóerő hat:

$$F_{\mathrm{f}} = V \cdot \Delta\rho \cdot g, \tag{1.37}$$

ahol V a cella térfogata, $\Delta\rho$ a sűrűségfluktuáció, g a lokális gravitációs gyorsulás. A felhajtóerő hatására a cella emelkedni kezd. Δr út megtétele után a hőmérséklete

$$T_c(\Delta r) \approx T(0) - \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\mathrm{ad}} \Delta r, \tag{1.38}$$

ahol $T(0)$ a hőmérséklet a kiinduló helyen, $|dT/dr|_{\mathrm{ad}}$ a hőmérséklet dr út során történő megváltozása adiabatikus folyamat esetén (*adiabatikus hőmérséklet-gradiens* abszolút értéke). Ugyanekkor a környezet T_{k} hőmérséklete az (1.38) képlettel analóg módon írható le, de a hőmérséklet-gradiens nem az adiabatikus, hanem a csillagban ténylegesen megvalósuló hőmérséklet változásnak megfelelő lesz.

A konvekció fennmaradásának feltétele egyszerűen az, hogy Δr út megtétele után a cella továbbra is melegebb legyen, mint a környezete, azaz $T_c > T_k$. Látható, hogy ez akkor teljesül, ha az adiabatikus hőmérséklet gradiens abszolút értéke kisebb, mint a környezetben érvényes hőmérsékletgradiens:

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_k . \tag{1.39}$$

Ez a konvekció fennmaradásának *Schwarzschild-kritériuma*.

A sugárzási energiatranszport adott (dT/dr) hőmérséklet-gradiensnél az (1.34) képlet értelmében adott $L(r)$ luminozitást tud továbbítani. A konvekció ennél nagyobb energiatranszportra is képes. Megmutatható, hogy ha a luminozitás az

$$L^*(r) \;=\; \frac{(\gamma-1)\mu g}{\gamma \mathcal{R}} \left(\frac{16\pi ac}{3\kappa\rho}\right) r^2 T^3 \tag{1.40}$$

kritikus luminozitást meghaladja, azaz $L(r) > L^*(r)$, akkor az energiaterjedés csakis konvekcióval mehet végbe. Ez például akkor következhet be, ha $L(r)$ kis r-eknél viszonylag nagy értéket vesz fel, ami a nagy tömegű csillagok magjában gyakran teljesül. A másik tipikus eset az, amikor az abszorpció erőssé válik, mint pl. a kis tömegű, hidegebb csillagok belsejében.

1.5.4. Energiatranszport a magban

A csillagok magjában energiatermelés zajlik. Jelöljük az egységnyi tömeg által időegységenként termelt energiát ϵ-nal. Ekkor egy magot övező vékony, r sugarú, dr vastagságú gömbhéjban időegységenként keletkező energia $dL = \epsilon \cdot 4\pi r^2 \rho dr$. Ebből egyszerűen megkapható a luminozitás helyfüggését megadó differenciálegyenlet a csillag magjára vonatkozóan:

$$\frac{dL(r)}{dr} \;=\; 4\pi r^2 \rho \cdot \epsilon. \tag{1.41}$$

A lokális hőmérséklettől és sűrűségtől való erős függése miatt ϵ csak a csillag magjában különbözik 0-tól. Az energiatermelés lehetséges fizikai mechanizmusaival a következő fejezet foglalkozik.

1.6. A csillagok energiatermelése

A csillagok folyamatosan nagy mennyiségű energiát sugároznak ki, tehát létezniük kell olyan mechanizmusoknak, amelyek a belsejükben energiát termelnek. Ebben a fejezetben ezekkel a fizikai folyamatokkal foglalkozunk.

1.6.1. Lehetséges mechanizmusok

A Nap sugárzására már az ókori görögök igyekeztek magyarázatot találni. Egy akkoriban népszerű elképzelés a pitagoreusoktól származik, akik azt hirdették, hogy a világ középpontjában egy ősi *központi tűz* található, e körül kering a Nap, a Föld és az összes többi akkor ismert égitest. A Nap izzó fénye szerintük a központi tűztől származik. Azt, hogy a Föld miért nem izzik a központi tűz hatására, azzal magyarázták, hogy azt egy másik égitest, az Ellenföld takarja el. Arra a kérdésre pedig, hogy akkor vajon az Ellenföldet miért nem látjuk, az volt a válaszuk, hogy azért, mert a gömb alakú Föld túlsó oldalán helyezkedik el. E mitológiai eredetű világkép egyben azt is illusztrálja, hogy milyen változatos, logikusnak tűnő érvek láncával lehet látszólag megmagyarázni azt, amire nincs semmiféle bizonyítékunk!

Az újkor hajnalán már világos volt, hogy a Nap valamilyen fizikai folyamat révén termel energiát. Kezdetben jó ötletnek tűnt, hogy a Nap szénből van, és ennek izzása hozza létre a fényt és a meleget, amit érzékelünk. Ezt látszólag alátámasztotta, hogy a kőszén sűrűsége véletlenül kb. megegyezik a Nap átlagsűrűségével, tehát egy Nap méretű kőszén-gömb tömege kb. 1 $M_\odot$. Hamar kiderült azonban, hogy ez a folyamat, a kémiai égés, nem lehet jó megoldás. A szén égéshője ugyanis kb. $\epsilon_C = 3 \cdot 10^7$ J/kg, tehát a Nap luminozitását egy Nap-tömegű széngömb csak $\tau = M_\odot \epsilon_C / L_\odot \approx 5000$ évig képes fenntartani. Ez az életkor pedig még az írott történelemhez képest is túl rövid.

A 19. században vetődött fel újabb ötletként a gravitációs összehúzódás. A viriáltétel értelmében a Nap teljes energiája $E \approx -(1/2)GM_\odot^2/R_\odot \; < 0$. Tehát ha a Nap sugara csökken, energiája negatívabb lesz, vagyis csökken. Az így felszabaduló gravitációs energia felfűti a Napot, és ezt sugározza ki. Ebben a modellben a Nap luminozitása:

$$L_\odot = \frac{\Delta E}{\Delta t} \approx \frac{GM_\odot^2}{R^2}\frac{\Delta R}{\Delta t}. \tag{1.42}$$

Ha tehát állandó luminozitást tételezünk fel, az időtartam, amely alatt a Nap sugara a kezdeti 1 $R_\odot$-ról 0-ra csökken:

$$\Delta t = t_{KH} = \frac{GM_\odot^2}{R_\odot L_\odot}, \tag{1.43}$$

ez a *Kelvin–Helmholtz-időskála*. A Napra ez $t_{KH}(\odot) \approx 3 \cdot 10^7$ év időtartamot ad. Ez már kellően hosszúnak tűnik, viszont a földi kőzetek geológiai vizsgálataiból kiderült, hogy ezek több milliárd évesek. A Nap sugárzását tehát ez a mechanizmus sem képes megmagyarázni, viszont más égitestekét igen. Ez a folyamat termel energiát a még kialakulóban lévő *proto-csillagokban*, és a nagyobb tömegű óriásbolygókban, pl. a Jupiterben.

A 20. században az atomi folyamatok és a fúzió felfedezésével világossá vált, hogy az atommag-átalakulások képesek annyi energiát termelni, amely milliárd évekre biztosítja egy Nap-tömegű égitest sugárzását. A fúzió során a könnyebb atommagok nehezebbekké egyesülnek, eközben a nyugalmi tömeg egy része energiává alakul át, az Einstein által felismert $E = \Delta mc^2$ képletnek megfelelően. Ha feltesszük, hogy a Nap tömegének 10%-a alakul át energiává, és sugárzódik ki az élete során, akkor a folyamat időtartama

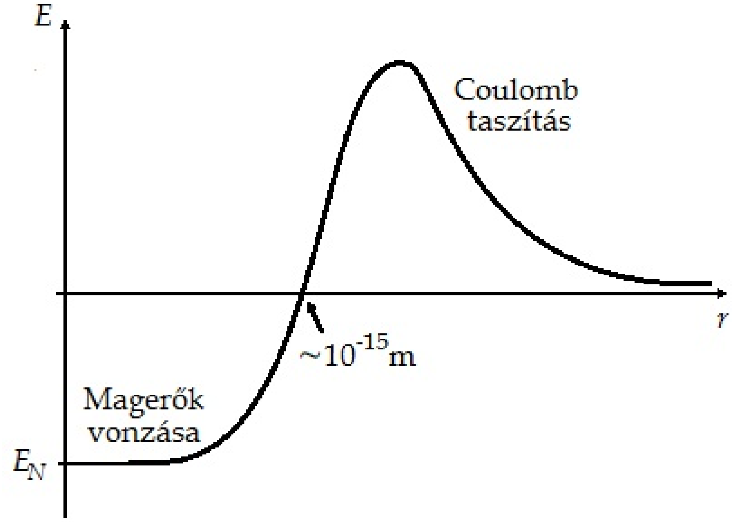
$$\tau = 0,1 M_\odot c^2 / L_\odot, \tag{1.44}$$

kb. 10 milliárd év. Ez a *nukleáris időskála*.

A csillagok energiatermelésének megértéséhez tehát az atommagfúzió fizikai folyamatait kell tanulmányoznunk.

1.6.2. Atommagok ütközése

Az atommagok *proton*okból és *neutron*okból (*nukleon*okból) épülnek fel. A nukleonok számát adja meg az *A tömegszám*. Az atommag tömege $m = Am_a$, ahol m_a az *atomi tömegegység*



1.3. ábra. *A nukleonok kölcsönhatásai közül az atommag sugarán belül a magerők hatása érvényesül, azon kívül viszont a protonok közötti elektromos v. Coulomb-taszítás dominál.*

(1,6605·10^{-27} kg). A protonok számát a *Z rendszám* jellemzi. Az atommag elektromos töltése $Q = Z \cdot e$, ahol e az *elemi töltés* (1,6022·10^{-19} C).

A tapasztalat szerint az atommagok sugara és a tömegszám között az alábbi összefüggés érvényes:

$$r \;=\; r_0 \cdot A^{-1/3}, \tag{1.45}$$

ahol r_0 egy konstans (kb. 1,5·10^{-15} m). Ennek egy érdekes következménye az, hogy a nukleonok számsűrűsége (koncentrációja) állandó, mivel mind a mag tömege, mind a térfogata egyenesen arányos az A tömegszámmal. A nukleonkoncentrációra így kb. 10^{38} cm^{-3} adódik. A mag tehát egy nagyon nagy, de állandó sűrűségű folyadékcseppre emlékeztet.

A nukleonok kötését a *magerők* biztosítják, amelyek rövid hatótávolságúak, csak az atommagon belül hatnak, de sokkal erősebbek a protonok közti elektromos (Coulomb-) taszításnál (1.3. ábra). A magerők egyformán hatnak proton-proton, proton-neutron és neutron-neutron részecskék között (*magerők töltésfüggetlensége*).

Az atommag m tömege mindig kisebb, mint a magot alkotó nukleonok tömegének összege: $m < Zm_p + (A-Z)m_n$, ahol m_p a proton, m_n a neutron tömege. A Δm *tömegdefektus* a mag kötési energiájának felel meg: $\Delta E = \Delta mc^2$, ennek értéke általában 10 – 100 MeV között van.

Két atommag egyesítésével nehezebb atommagok jöhetnek létre, ez a folyamat a *magfúzió*. Az 56-os tömegszámú vasnál könnyebb atommagok fúziójánál energia szabadul fel (*exoterm reakció*), ez amiatt van, mert a keletkező mag kötési energiája alacsonyabb, mint az ütköző magok kötési energiái együttvéve. A felszabaduló energia $Q = (m_1 + m_2 - m)c^2$, ahol m_1 és m_2 az ütköző magok, m a keletkező mag tömege. Az energiamegmaradáson túl a magfúziós folyamat során teljesülnie kell még az elektromos töltés és a barionszám megmaradási törvényének is.

Mivel az atommagok pozitív elektromos töltésűek, két mag közelítésekor először a Coulomb-taszítás érvényesül, ezért energiát kell befektetni ahhoz, hogy a két magot egymáshoz közelítsük. A Coulomb-taszítás miatti potenciális energia helyfüggését az 1.3. ábra mutatja. Az atommagok sugarának (kb. 10^{-13} cm) nagyságrendjébe eső kritikus távolság elérésekor a potenciálgát hirtelen megszűnik, és a magerők vonzó hatása kezd el érvényesülni. Atommagok ütközéséhez tehát elsősorban az elektromos töltések miatti Coulomb-taszítás okozta potenciálgáton kell átjutni.

A Coulomb-gát magassága a klasszikus elektrosztatika értelmében $E_C = Z_1 Z_2 e^2/r^2$, ahol r a két ütköző nukleon távolsága (nagyságrendileg 10^{-13} cm). Az ütközést vizsgáljuk olyan koordináta-rendszerben, amely az egyik részecskéhez van rögzítve. Ez a célpont (target) atommag, a mozgó részecskét pedig szokás bombázó részecskének is nevezni.

A bombázó részecske kinetikus energiája $E_k = (1/2)mv^2 = (3/2)kT$, ahol v a részecske átlagsebessége, T a közeg hőmérséklete. A klasszikus fizika értelmében a potenciálgáton történő átjutás feltétele $E_k \geq E_C$. Ebből adódik a nukleonok klasszikus ütközéséhez szükséges hőmérséklet:

$$T \;=\; \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{3kr,} \tag{1.46}$$

ami protonok ütközésére 10^{10} K-t ad. Mivel a Nap centrumában a hőmérséklet nagyságrendje csak 10^7 K, a klasszikus fizika értelmében proton-proton ütközés nem mehetne végbe a Nap belsejében. Ezen még az sem segítene, ha figyelembe vennénk, hogy az átlagsebességhez képest gyorsabban mozgó részecskék is vannak, mert egyszerűen nincs elegendő számú atommag a Napban ahhoz, hogy akár egy ilyen reakció is megtörténhessen.

1.6.3. Az alagúteffektus szerepe

Az atommagok nem klasszikus, hanem kvantumos részecskék, ezért ütközésükkor a kvantummechanika törvényeit is figyelembe kell venni! A kvantummechanika egyik jól ismert jelensége az alagúteffektus. Ekkor a részecske véges valószínűséggel átjuthat egy potenciálgáton, még akkor is, ha klasszikus értelemben nincs meg az ehhez szükséges energiája. Ez a kvantumos jelenség a magyarázata annak, miért lehetséges a fúzió a Nap (és a többi csillag) belsejében.

A kvantumos effektusok akkor jelennek meg, amikor két részecske távolsága összemérhető a de Broglie-hullámhosszal:

$$r \;\approx\; \lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \tag{1.47}$$

ahol h a Planck-állandó, p a bombázó részecske impulzusa, m a részecske tömege abban a koordináta-rendszerben, amelyben az egyik részecske nyugalomban van. A tömegközépponthoz rögzített koordináta-rendszerben v a részecskék relatív sebességét jelenti, $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ a redukált tömeg.

Az alagúteffektus annál valószínűbb, minél közelebb van a bombázó részecske kinetikus energiája a Coulomb-gát magasságához. Képlettel kifejezve

$$w \;\sim\; \exp\left[-\frac{E_c}{E_k}\right] \;=\; \exp\left[-\frac{Z_1 Z_2 e^2}{h}\sqrt{\frac{2m}{E_k}}\right]. \tag{1.48}$$

Ha a kitevőben szereplő mennyiség 1-hez közeli, az alagúteffektus érzékelhetővé válik. Ebből a feltételből megkaphatjuk az alagutazáshoz szükséges hőmérsékletet, ha a kinetikus energiát a hőmérséklettel fejezzük ki:

$$T \approx \frac{2mZ_1^2 Z_2^2 e^4}{kh^2}, \tag{1.49}$$

ami protonok ütközésére kb. 10^7 K-t ad. Ez hasonló a Nap belsejében mérhető hőmérséklethez, tehát az alagúteffektus sikeresen magyarázza a Napban végbemenő fúziós folyamatokat.

1.6.4. A reakcióráta

Szemeljünk ki egy egységnyi térfogatot, és vizsgáljuk meg az ebben végbemenő magreakciók számát! Ebben a térfogatban az egységnyi idő alatt lejátszódó magreakciók száma (*reakcióráta*)

$$r = n_a n_x \cdot v \cdot \sigma(v), \tag{1.50}$$

ahol n_a a bombázó-, n_x a target részecskék koncentrációja, v a bombázó részecskék sebessége, $\sigma(v)$ pedig az *ütközési hatáskeresztmetszet.*

Ha a bombázó részecskék sebessége nem azonos, akkor a fenti képlet helyett az alábbi, pontosabb összefüggést kell használnunk:

$$r = n_a n_x \int f(v) \cdot v \cdot \sigma(v) dv = n_a n_x \langle \sigma v \rangle, \tag{1.51}$$

ahol $f(v)$ a sebességeloszlás-függvény, a $\langle \sigma v \rangle$ szimbólum pedig a sebességekre átlagolt hatáskeresztmetszetet jelöli.

A reakcióráta fenti kifejezése alapján kaphatjuk meg az egységnyi tömeg által 1 s alatt termelt energiát (ϵ). Kihasználva, hogy egységnyi térfogat tömege ρ, adódik

$$\epsilon = \frac{Qr}{\rho} = \frac{n_a n_x Q}{\rho} \langle \sigma v \rangle, \tag{1.52}$$

ahol Q az egy reakció során felszabaduló energia. Ha a bombázó és a target részecskék ugyanolyanok (pl. proton-proton ütközésnél), akkor (1.51)-ben és (1.52)-ben $n_a n_x$ helyett $n_x^2/2$ írandó.

A target atomok koncentrációjának időbeli változása szintén kifejezhető a reakciórátával:

$$\frac{dn_x}{dt} = -r = -n_a n_x \langle \sigma v \rangle. \tag{1.53}$$

Ha feltesszük, hogy n_a időben állandó, (1.53) megoldása exponenciális időbeli csökkenést ad:

$$n_x = n_x(0) \exp\left[-n_a \langle \sigma v \rangle t\right]. \tag{1.54}$$

Látható, hogy $\tau = 1/(n_a \langle \sigma v \rangle)$ karakterisztikus időskála alatt a kezdeti magkoncentráció e-ad részére csökken.

1.6.5. A hatáskeresztmetszet becslése

A magreakció hatáskeresztmetszete a reakciók valószínűségével arányos mennyiség. Értéke főként két mennyiségtől függ: a magok klasszikus ütközési valószínűségét megadó *ütközési* *hatáskeresztmetszet*től és a Coulomb-gáton történő átjutáshoz szükséges *alagúteffektus* valószínűségétől.

A klasszikus ütközési hatáskeresztmetszet (σ_u) a gömb alakú magok körnek látszó területével arányos. Mivel a reakcióhoz szükséges ütközési távolság a de Broglie-hullámhosszhoz közeli, (1.47) értelmében $\sigma_u \sim \pi \lambda_B^2 = \pi (h/p)^2 \sim 1/E$, ahol E a bombázó részecske kinetikus energiája.

Az alagutazás valószínűsége (1.48) alapján $\sigma_a \sim \exp(-b/\sqrt{E})$, ahol $b = Z_1 Z_2 e^2 \sqrt{2m}/h$.

A fenti két formula szorzata adja a magreakció teljes hatáskeresztmetszetét:

$$\sigma(E) \;=\; S(E) \cdot \frac{1}{E} \exp[-bE^{-1/2}], \tag{1.55}$$

ahol *S(E)* jelöli a fenti képletekben nem szereplő további effektusok energiafüggését. A sebességre átlagolt hatáskeresztmetszetet ezek alapján az alábbi kifejezésből kaphatjuk:

$$\langle \sigma v \rangle \;=\; \int_0^\infty \sigma(E) \cdot v(e) \cdot f(E) dE. \tag{1.56}$$

Ha a magok sebességeloszlására a Maxwell–Boltzmann-eloszlásfüggvényt használjuk,

$$f(E) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E^{1/2}}{kT^{3/2}} \exp[-E/(kT)] \tag{1.57}$$

és figyelembe vesszük, hogy nemrelativisztikus részecskékre $v(E) = \sqrt{2E/m}$, kaphatjuk:

$$\langle \sigma v \rangle \;=\; \sqrt{\frac{8}{m\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^\infty S(E) \exp\left[-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right] dE \tag{1.58}$$

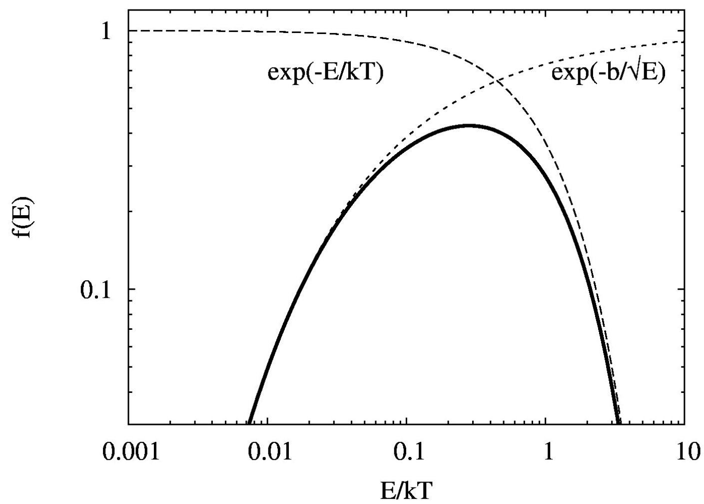
Az *exp*[...] függvény grafikonját az 1.4. ábra mutatja. Látható, hogy növekvő E-re az első tag csökkenő, míg a második növekvő hozzájárulást ad. A kettő szorzata egy haranggörbét ad, ez a *Gamow-csúcs*. A Gamow-csúcs maximumhelye az $E_0 = (bkT/2)^{2/3}$ energiánál van, ezen a helyen a maximum értéke $g(E_0) = \exp[-3E_0/(kT)]$.

1.6.6. Nemrezonáns hatáskeresztmetszet

(1.58) kiszámításához az $S(E)$ függvényt kell ismernünk. Ennek pontos megadása analitikusan tetszőleges energiára gyakran nem lehetséges. A Gamow-csúcs jelenléte miatt azonban erre általában nincs is szükség, mert bizonyos közelítésekkel az integrál kiszámítása sokkal egyszerűbbé válik.

Gyakori eset az, amikor a Gamow-csúcs által lefedett energiatartományban $S(E)$ csak kicsit változik. Ekkor feltehetjük, hogy $S(E) \approx S(E_0)$=konstans, ahol E_0 a Gamow-csúcs maximumhelye. Így $S(E)$ kiemelhető az integrálból. A fennmaradó Gamow-csúcsot egy Gauss-függvénnyel közelíthetjük, amely analitikusan integrálható. Végeredményként a következő kifejezést kapjuk:

$$\langle \sigma v \rangle_{nr} \;=\; \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \frac{S(E_0)}{(kT)^{3/2}} \cdot \Delta \cdot \exp[-(3E_0)/(kT)], \tag{1.59}$$



1.4. ábra. *A magreakció hatáskeresztmetszetét (vastag vonal) a Maxwell-Boltzmann eloszlás (szaggatott vonal) és az alagúteffektus (pontozott vonal) valószínűségének szorzata adja (részletes magyarázat a szövegben).*

ahol $\Delta = 4\sqrt{E_0 kT/3}$ a Gamow-csúcs félértékszélessége. Ezt nevezzünk *nemrezonáns hatáskeresztmetszet*nek.

(1.59) hőmérsékletfüggése a következő alakba írható:

$$\langle\sigma v\rangle_{nr} \;=\; \langle\sigma v\rangle_{nr}(0)\cdot T^{-2/3}\cdot \exp[-a_1 T^{-1/3}], \tag{1.60}$$

ahol $\langle\sigma v\rangle_{nr}(0)$ egy tetszőleges referencia-hőmérsékleten felvett érték, a_1 pedig egy konstans. A csillagokban végbemenő legtöbb magreakció hatáskeresztmetszete ilyen nemrezonáns jellegű.

1.6.7. Rezonáns hatáskeresztmetszet

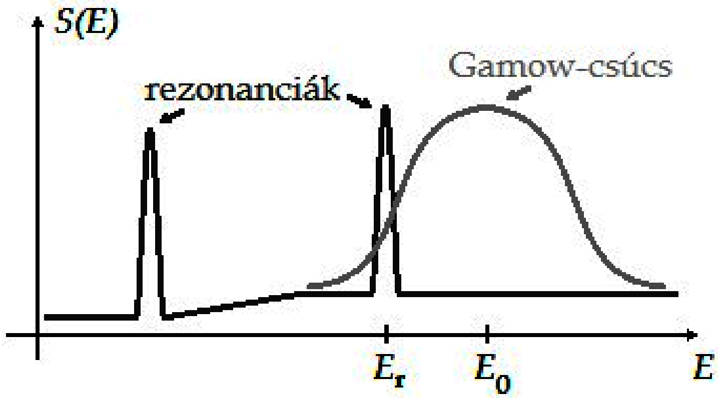
Az előzőtől lényegesen különböző esetben a Gamow-csúcs körül $S(E)$ nagyon éles, keskeny és magas csúcsokat mutat (1.5. ábra). Az ilyen jellegű reakciónak *rezonáns hatáskeresztmetszet*e lesz. A rezonancia energiája legyen E_r. Ekkor $S(E) \approx S(E_r)$, ha $E_r - \Gamma/2 < E < E_r + \Gamma/2$, ahol Γ a rezonanciacsúcs szélessége, ezen kívül $S(E) \approx 0$.

Mivel a rezonancia Γ szélessége általában sokkal kisebb, mint a Gamow-csúcs félértékszélessége, ebben az esetben (1.58) integrandusa egy lépcsős függvénnyel közelíthető, amely Γ szélességű, magassága pedig az integrandus E_r helyen felvett értéke. Ez azonnal integrálható, így a rezonáns hatáskeresztmetszetre a következő kifejezést kapjuk:

$$<\sigma v>_r \;=\; \sqrt{\frac{8}{m\pi}}(kT)^{-3/2}\cdot S(E_r)\cdot\Gamma\cdot\exp\left[-\frac{E_r}{kT}-\frac{b}{\sqrt{E_r}}\right]. \tag{1.61}$$

A hőmérsékletfüggést explicite kifejezve az alábbi összefüggés adódik:

$$\langle\sigma v\rangle_r \;=\; \langle\sigma v\rangle_r(0)\cdot T^{-3/2}\cdot \exp[-a_2 E_r/T]. \tag{1.62}$$



1.5. ábra. *A teljes hatáskeresztmetszet a rezonáns és nemrezonáns hatáskeresztmetszetek szuperpozíciójaként állítható elő.*

Az (1.60) képlettel összevetve látható, hogy a rezonáns hatáskeresztmetszet sokkal erősebben függ a hőmérséklettől, mint a nemrezonáns.

A magreakciók különféle energiákon különbözőek lehetnek. Így gyakran előfordul, hogy két mag ütközése bizonyos energiákon nemrezonáns, más energiákon rezonáns kölcsönhatást eredményez. A teljes hatáskeresztmetszet általában (1.59) és (1.61) alakú függvények szuperpozíciójával adható meg (lásd 1.5. ábra).

1.6.8. Az energiatermelés hőmérsékletfüggése

A hatáskeresztmetszet hőmérsékletfüggésének kifejezéséből megadható a teljes energiakeltési ráta hőmérséklettől való függése. Írjuk az (1.52) egyenletet formálisan hatványfüggvény alakba:

$$\epsilon = \frac{n_a n_x Q}{\rho}\langle\sigma v\rangle \ = \ \epsilon_0 \rho^\lambda T^\nu, \tag{1.63}$$

ahol λ és ν egyelőre ismeretlen hatványkitevők. Ezek meghatározása egyszerű, ha figyelembe vesszük, hogy a többi paraméter melyik mennyiségtől hogyan függ.

Mivel $n_a n_x \sim \rho^2$, ebből azonnal következik, hogy $\epsilon \sim \rho$, azaz $\lambda = 1$. A hőmérséklet kitevőjének kiszámítására használjuk az alábbi logaritmikus deriváltat:

$$\nu \ = \ \left(\frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln T}\right). \tag{1.64}$$

Mivel a hőmérsékletfüggést a hatáskeresztmetszet határozza meg, az (1.60) és (1.62) összefüggésekből adódik, hogy $\nu = a_1/(3T^{1/3}) - 2/3$ a nemrezonáns, $\nu = a_2 E_r/T - 3/2$ a rezonáns esetben. A hőmérséklet hatványkitevője tehát maga is hőmérsékletfüggő (azaz a függvény nem tisztán hatványfüggvény).

1.6.9. A gyenge kölcsönhatás szerepe

A termonukleáris reakciókban az erős és elektromágneses kölcsönhatás mellett fontos szerepet játszik egy harmadik fajta kölcsönhatás is. Ez a *gyenge kölcsönhatás*. Nevét onnan kapta, hogy az ennek hatására végbemenő reakciók sebessége sokkal kisebb, mint a másik két kölcsönhatás okozta folyamatoké.

A gyenge kölcsönhatás alapvető folyamata a *béta-bomlás*:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e \tag{1.65}$$

ahol n a neutron, p a proton, e^- az elektron, $\tilde{\nu}_e$ pedig az antineutrínó (pontosabban anti-elektron-neutrínó). A gyenge kölcsönhatás során is teljesülnek az alapvető megmaradási törvények: az elektromos töltés, a barionszám, a leptonszám és az energia megmaradása.

A fenti β-bomlás karakterisztikus ideje szabad neutronon kb. 10 perc. Összehasonlításképpen, az erős kölcsönhatással lejátszódó magreakciók átlagos ideje 10^{-22} s, míg az elektromágneses kölcsönhatás vezérelte folyamatok (foton-kisugárzás) ideje kb. 10^{-16} s. Látható, hogy a gyenge kölcsönhatás okozta reakciók sebessége sok nagyságrenddel kisebb.

Más, szintén a gyenge kölcsönhatás által vezérelt lehetséges reakciókat kaphatunk az (1.65) β-bomlás átrendezésével, oly módon, hogy ha egy részecskét a másik oldalra viszünk, akkor az antirészecskéjével helyettesítjük. Ugyanígy elvileg lehetséges a reakció irányának megfordítása is. Az így kapott folyamatok azonban csakis akkor valósulnak meg, ha teljesülnek rájuk a fenti megmaradási törvények. Például a $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ (e^+ a pozitron) protonbomlás az energiamegmaradás miatt szabad protonokon nem mehet végbe, hiszen a proton nyugalmi tömege kisebb, mint a neutroné. Viszont ha a proton kötött állapotban van az atommagon belül, akkor ez a reakció is végbemehet a kötési energia rovására.

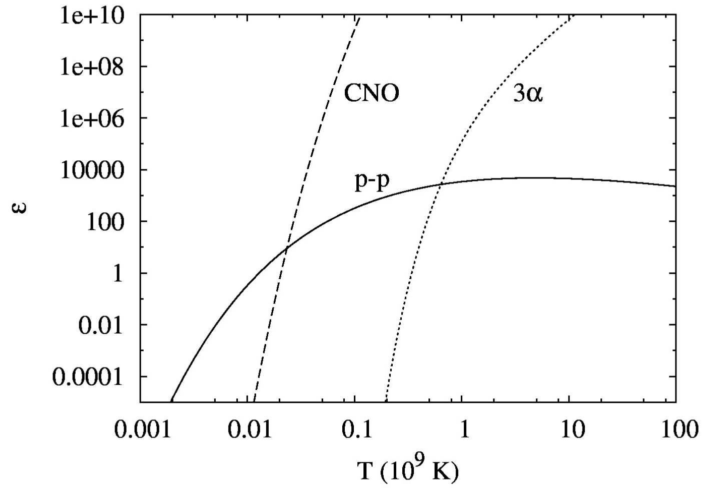
A $p + e^- \rightarrow n + \nu$ neutronkeltés (*neutronizáció*) szintén problémás, ugyanis a proton és az elektron nyugalmi tömege együttesen sem éri el a neutron nyugalmi tömegét. Ez a reakció is megvalósulhat azonban olyan extrém körülmények között, amikor az elektron igen nagy kinetikus energiája fedezi a reakció energiaszükségletét. Ez történik pl. nagyon nagy tömegű csillagok magjában, a vas-mag gravitációs összeomlásakor.

A gyenge kölcsönhatás okozta reakciók során általában neutrínó keletkezik. Ezek nagyon gyengén hatnak kölcsön a többi részecskével, gyakorlatilag akadálytalanul távoznak a csillag magjából. Az általuk elvitt energia csökkenti a reakció energiahozamát, ennek mértéke pl. fősorozati csillagokban elérheti az 5-10%-ot is.

A gyenge kölcsönhatás játszik vezető szerepet a *neutronbefogásos reakciók*nál is. Ezeknél a reakcióknál egy nagy tömegszámú (általában vasnál nehezebb) atommag fog be egy neutront, amely aztán kötött állapotban átalakul protonná, ezzel növelve a rendszámot. Ily módon lehetséges pl. a vasnál nehezebb elemek keletkezése. Mivel a vasnál nehezebb elemek fúziója energiabefektetést igényel (*endoterm*), a neutron kinetikus energiája fedezi az ehhez szükséges energiát. A reakciót lefolyását segíti, hogy a neutron elektromosan semleges, tehát az ütközésnél nincs Coulomb-gát, nem kell alagúteffektus.

A neutronbefogás egyszerűbb formája az *s-folyamat* (slow = lassú neutronbefogás). Ekkor a mag egy neutront fog be, és ez alakul át protonná: $(A, Z) + n \rightarrow (A + 1, Z) \rightarrow (A + 1, Z + 1) + e^- + \tilde{\nu}_e$. Ez a reakció a 83-as rendszámú bizmutig képes nehéz magokat kelteni, ezután a magok α-radioaktívak lesznek.

Az *r-folyamat*ban (rapid = gyors neutronbefogás) egyszerre több neutron is befogódhat: $(A, Z) + N \cdot n \rightarrow (A + N, Z) \rightarrow (A + N, Z + N) + N \cdot e^- + N \cdot \tilde{\nu}_e$. Ezen a módon egészen $A = 260$ tömegszámig keletkezhetnek nehéz elemek (e fölött a neutronbefogás maghasadást okoz). Az s-folyamat akár a hideg óriáscsillagok ritka légkörében is lejátszódhat, az r-folyamathoz szükséges nagy neutronsűrűség inkább csak szupernóva-robbanások során valósul meg.



1.6. ábra. *Az egyes magreakciós folyamatok energiatermelési rátáinak hőmérsékletfüggése*

1.6.10. Magreakciók a csillagokban

H-He fúzió

A csillagokban lejátszódó legfontosabb termonukleáris reakció a hidrogén átalakulása héliummá. Mai tudásunk szerint ez a folyamat ment végbe az ősrobbanást követő percekben is (*primordiális nukleoszintézis*), ennek hatására jött létre az Univerzum héliumtartalmának nagy része.

A H-He fúzió egyszerűbb formája a *proton-proton ciklus*. Ez három fő lépésből áll: Egy

$$\begin{array}{lcl} {}^{1}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{2}\mathrm{H} + e^{+} + \nu \\ {}^{2}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{3}\mathrm{He} + \gamma \\ {}^{3}\mathrm{He} + {}^{3}\mathrm{He} & \rightarrow & {}^{4}\mathrm{He} + {}^{1}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} \end{array}$$

teljes ciklus által termelt energia kb. *26,2* MeV. A reakció kulcsmomentuma az első lépés: két proton ütközése egy deuteront kelt. Az ehhez szükséges β-bomlás lassúsága miatt ez a folyamat rendkívül valószínűtlen, csakis azért játszódik le a csillagokban, mert a magban a H-sűrűség igen nagy. A *p-p* ütközés nemrezonáns folyamat, hatáskeresztmetszetét az (1.60)-hez hasonló képlet írja le. (1.54) felhasználásával a protonok pusztulásának karakterisztikus idejére $\tau \approx 10^9$ év adódik, ez összemérhető a csillag teljes nukleáris időskálájával. A *p-p* reakció lassúsága tehát a H-He fúzió teljes energiahozamát meghatározza.

A *p-p* ciklus hőmérsékletfüggésének kitevője $\nu_{\mathrm{pp}} = 11,27/T_6^{1/3} - 2/3$, ahol T_6 a hőmérséklet 10^6 K egységekben. 10^6 K-re ν =10,6, $3 \cdot 10^7$ K-re ν = 3,0 adódik. Látható, hogy a hőmérséklet emelkedésével a reakció energiahozama a hőmérséklet egyre csökkenő hatványával írható le, az energiakeltési ráta ellaposodik (1.6. ábra).

A H-He fúzió más módon is végbemehet. Szén-, nitrogén- és oxigénmagok katalizálhatják a reakciót az alábbi módon (*CNO-ciklus*):

$$\begin{array}{lcll}
{}^{12}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{13}\mathrm{N} + \gamma & \rightarrow \quad {}^{13}\mathrm{C} + e^{+} + \nu \\
{}^{13}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{14}\mathrm{N} + \gamma & \\
{}^{14}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{15}\mathrm{O} + \gamma & \rightarrow \quad {}^{15}\mathrm{N} + e^{+} + \nu \\
{}^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} &
\end{array}$$

A folyamat során felszabaduló energia kb. 25,0 MeV, kicsivel kevesebb, mint a *p-p* ciklusé. A kétszer akkora neutrínóemisszió miatt az energiaveszteség is nagyobb. A *CNO*-ciklus szintén nemrezonáns jellegű folyamat, azonban hőmérsékletfüggése erősebb, mint a *p-p* ciklusé: $\nu_{\mathrm{CNO}} = 50,8/T_6^{1/3} - 2/3$. Ebből 10^6 K-re $\nu = 50,1$, $3 \cdot 10^7$ K-re $\nu = 15,7$ adódik. Az 1.6. ábrán látható, hogy emelkedő hőmérsékletnél a *CNO*-ciklus energiakeltési rátája kevésbé laposodik el, meredekebben emelkedik, mint a *p-p* ciklusé. A Napban keletkező teljes energia kb. 10%-át termeli a *CNO*-ciklus, azonban egy 3 $M_\odot$-nél nagyobb tömegű csillagban az energia szinte kizárólag *CNO*-ciklussal keletkezik.

He-égés

A H-He fúziónál sokkal bonyolultabb folyamat a He-égés. Ezt szokás *3α-folyamat*nak is nevezni, mivel három db. He-mag (α-részecske) kell hozzá. A reakció lépései a következőek:

$$\begin{array}{rcl}
{}^{4}\mathrm{He} + {}^{4}\mathrm{He} & \rightarrow & {}^{8}\mathrm{Be} \\
{}^{8}\mathrm{Be} + {}^{4}\mathrm{He} & \rightarrow & {}^{12}C^{*} \\
{}^{12}C^{*} & \rightarrow & {}^{12}\mathrm{C} + \gamma
\end{array}$$

A reakció bonyolultságát egyrészt az okozza, hogy az első lépésben keletkező ^{8}Be radioaktív, rendkívül gyorsan, 10^{-16} s felezési idővel visszabomlik két ^{4}He maggá. Ezért a második lépés bekövetkezéséhez az kell, hogy az újabb ^{4}He maggal történő ütközés ezen rövid időtartamon belül történjen meg. A másik nehezség az, hogy a második lépésben keletkező ${}^{12}C^{*}$ a ^{12}C egy speciális gerjesztett állapota, amelyből γ-foton kibocsátásával a ^{12}C-mag képes stabil alapállapotba kerülni. A gerjesztett állapotú ${}^{12}C^{*}$ keltése egy rezonáns magreakció, ennélfogva az egész folyamat nagyon érzékenyen függ a hőmérséklettől. (1.64) alapján a hőmérsékletfüggés exponense $\nu_{3\alpha} = 4,4/T_9 - 3$, ahol T_9 a hőmérséklet 10^9 K egységekben. A három He-mag együttes ütközésének feltétele miatt a sűrűségtől való függés is erősebb, mint azoké a folyamatoké, amelyekben két mag ütközik, a sűrűségfüggés kitevője $\lambda = 2$. A 3α-folyamat beindulásához kb. $\rho \sim 10^6$ g/cm^3 és $T \sim 10^8$ K hőmérséklet szükséges. A hőmérsékletfüggés kitevőjének értéke ekkor $\nu \approx 40$. A 3α-folyamat tehát sokkal erősebben függ a hőmérséklettől, mint akármelyik H-He fúziós folyamat.

A He-C fúzió egy ciklusa 7,27 MeV energiát termel, ez kb. negyede a H-He fúzió energiahozamának. A tömegegységre jutó energiakeltési ráta összevetésekor ez az arány még rosszabb, kb. 0,1 (mivel a 3α-folyamathoz több tömeg kell). A He-C fúzió tehát tizedakkora hatásfokú, mint a H-He fúzió. Ahhoz tehát, hogy a csillagok egyensúlya fennmaradjon, a He-égésnek sokkal gyorsabban kell végbemennie, mint a H-He fúziónak.

Nehezebb elemek fúziója

Ha a magban a hőmérséklet eléri a 600 millió K-t, lehetővé válik a szén- és az oxigén-fúzió. Két ^{12}C mag ütközése Na, Ne és Mg keletkezéséhez vezethet, míg két ^{16}O-mag fúziójából Mg, P, S és Si jöhet létre. Ezek a folyamatok hasonlóan nemrezonáns jellegűek, mint a H-He fúzió, de a reakciórátájuk a hőmérsékletre jóval érzékenyebb, és sokkal kevesebb energiát képesek termelni.

Az oxigénégésen túli magreakciók a fentiektől eltérő módon mennek végbe. Ha a hőmérséklet eléri a $2 \cdot 10^9$ K-t, a ^{20}Ne-nál nehezebb magok a nagy energiájú ($E > 10$ MeV) γ-fotonok hatására könnyebb magokká esnek szét (*fotodezintegráció*). Az így emittálódó ^{4}He-magokat (α-részecskéket) más magok befoghatják, mivel ekkor kedvezőbb energiaállapotba kerülnek. Így tehát egyre nehezebb magok jöhetnek létre. Ez a folyamat fokozatosan, kváziegyensúlyi szakaszokon keresztül végül a vas-csoport (^{56}Ni, ^{56}Co, ^{56}Fe) elemeinek kialakulásához vezet. Mivel a folyamatban kulcsszerepet játszó elem a ^{28}Si (ez a leginkább ellenálló a fotodezintegrációra, tehát ennek reakciórátája és időskálája vezérli a teljes folyamatot), ezért a nehezebb elemek fúzióját összefoglaló néven *Si-égés*nek nevezik.

A Si-égés igen magas hőmérsékletet igényel, így csak nagy tömegű ($M > 5\ M_\odot$) csillagok magjában mehet végbe. Mivel a Si-égés viszonylag kis energiahozamú a többi fúziós folyamathoz képest, ezért a csillag teljes Si-tartalma nagyon gyorsan átalakul vassá. Egy 5 $M_\odot$ tömegű csillagban a Si-égés időtartama kb. 1 nap. $M > 8\ M_\odot$ tömegű csillagok magja a Si-égés után nem képes újra egyensúlyi állapotba kerülni, és gravitációs kollapszussal neutroncsillaggá, vagy fekete lyukká alakul (*szupernóva-robbanás*).

1.7. Összefoglalás

Az alábbiakban összefoglaljuk a csillagszerkezet vizsgálatához szükséges legfontosabb alapegyenleteket és összefüggéseket.

A csillagszerkezetet leíró differenciálegyenlet-rendszer:

$$
\begin{array}{rcll}
dM_r/dr & = & 4\pi r^2 \rho & \text{tömeg-kontinuitási egyenlet} \\
dP/dr & = & -G\rho M_r/r^2 & \text{hidrosztatikai egyensúly egyenlete} \\
dT/dr & = & -(3\kappa\rho/16\pi ac)L_r/(4\pi r^2) & \text{radiatív energiaterjedés egyenlete} \\
dT/dr & = & [(\gamma-1)/\gamma] \cdot (T/P) \cdot (dP/dr) & \text{konvektív energiatranszport egyenlete} \\
dL_r/dr & = & 4\pi r^2 \rho \cdot \epsilon & \text{energia-kontinuitási egyenlet}
\end{array}
$$

A fenti alapegyenletekhez kapcsolódó kiegészítő összefüggések:

$$
\begin{array}{rcll}
P & = & (\rho/\mu)\mathcal{R} \cdot T \ + \ (a/3)T^4 & \text{állapotegyenlet} \\
\epsilon & = & \epsilon_0 \rho^\lambda T^\nu & \text{energiakeltés} \\
\kappa & = & \kappa_0 \rho T^{-7/2} & \text{opacitás (Kramers-törvény)}
\end{array}
$$

A fenti összefüggésekben szereplő konstansok, ill. kitevők a csillagok anyagának összetételétől, illetve a figyelembe vett fizikai folyamatok részleteitől függenek. A legfontosabb szerepet a kémiai összetétel játssza. Ha a csillagban a hidrogén, a hélium és a nehezebb elemek tömegszázalékát rendre X, Y, Z -vel jelöljük, az átlagos molekulasúly ezekkel kifejezhető: $1/\mu \approx 2X + (3/4)Y + Z/2$. Hasonlóan, az energiakeltési rátában szereplő ϵ_0 a *p-p* ciklusnál X^2-től, a *CNO*-ciklusnál $X \cdot Z$-től függ.

A fenti egyenletek 7 különböző fizikai mennyiségre összesen 7 összefüggést adnak meg, tehát az egyenletrendszer elvileg megoldható, amennyiben a kémiai összetételt adottnak tesszük fel. A differenciálegyenletek konkrét (partikuláris) megoldásához határfeltételeket is meg kell adnunk. Ezek praktikusan meghatározható mennyiségek, pl. a csillag tömege, sugara, vagy luminozitása lehetnek. Mivel kellő számú egyenletünk van, az ismeretlenek kifejezhetőek egymással, tehát az egyértelmű megoldáshoz a határfeltételek közül elegendő csak az egyiket (általában a tömeget) megadnunk. Ezt szokás *Vogt–Russell-tétel*nek is nevezni. A Vogt–Russell.tétel értelmében a csillagok belső szerkezetét és mérhető paramétereit a tömeg és a kémiai összetétel egyértelműen meghatározza.

Kapcsolódó animációk:

- A hőáramlás (konvekció) egyszerű illusztrálása
  (link: 1/animation/Convection.gif, 0,4MB)
  (Forrás: commons.wikipedia.org)
  http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/08/Convection.gif

Irodalomjegyzék

[1] Bowers, R., Deeming, T.: Astrophysics I. Stars (Jones and Bartlett Publ., Sudbury, MA, 1984)

[2] Carroll, B. W., Ostlie, D. A.: An Introduction to Modern Astrophysics (Addison-Wesley Publ., Reading, MA, 2007)

[3] Hansen, C. J., Kawaler, S. D.: Stellar Interiors (Springer-Verlag, New York, 1994)

[4] Marik M. (szerk): Csillagászat (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989)

[5] Zeldovics, Ja. B., Blinnyikov, Sz. I., Sakura, Ny. I.: A csillagszerkezet és csillagfejlődés fizikai alapjai (Gondolat, Budapest, 1988)