

Szegedi Tudományegyetem

Kísérleti Fizikai Tanszék

Szakedolgozat

Tóth Zoltán

2012

Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és

Informatikai Kar

Kísérleti Fizikai Tanszék

Változócsillagok fénygörbe analízise

BSc Szakdolgozat

Készítette: Tóth Zoltán

Fizika BSc hallgató

Témavezető: Dr. Székely Péter

egyetemi adjunktus

Szeged

2012

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| Bevezetés | 3 |
| 1. A változócsillagok észlelése | 4 |
| 1.1. Az amatőr mérések hibái | 4 |
| 1.2. Adatbázisok | 5 |
| 1.2.1. Az AAVSO | 6 |
| 2. A változócsillagok | 6 |
| 2.1. Fedési változók | 6 |
| 2.2. Rotáló változók | 7 |
| 2.3. Eruptív változók | 7 |
| 2.4. Kataklimikus változók | 7 |
| 2.5. Pulzáló változók | 8 |
| 2.5.1. Hosszú periódusú és félszabályos változók | 10 |
| 3. Matematikai alapok | 11 |
| 3.1. A legkisebb négyzetek módszere | 11 |
| 3.1.1. Története | 11 |
| 3.1.2. Definíciója és alkalmazása | 11 |
| 3.2. Sztringhossz módszer | 13 |
| 3.3. Autokorreláció | 13 |
| 3.4. Maximum Entrópia Módszer | 14 |
| 3.5. Fázisdiszperzió minimalizálása | 14 |
| 3.6. O-C diagram | 15 |
| 3.7. Fourier-analízis | 15 |
| 3.7.1. Története | 15 |
| 3.7.2. A valós Fourier-sor | 16 |
| 3.7.3. A komplex Fourier-sor | 18 |
| 3.7.4. Nem periodikus jelek Fourier-analízise | 19 |
| 3.7.5. Mintavételezett jelek Fourier-transzformáltja | 20 |
| 3.7.6. Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) | 20 |
| 3.7.7. Alkalmazás | 21 |
| 3.8. A wavelet-transzformáció | 22 |
| 3.8.1. Diszkrét wavelet-transzformáció | 23 |
| 3.8.2. A wavelet-térkép | 24 |

| | |
|----------------------------------|-----------|
| 4. Programok | 24 |
| 4.1. Period04 | 24 |
| 4.2. WinWWZ | 25 |
| 5. Eredmények | 26 |
| 5.1. A T Ursae Minoris | 26 |
| 5.2. A V Bootis | 30 |
| 5.3. A Z Ursae Minoris | 35 |
| 5.4. A Z Ursae Maioris | 38 |
| 6. Összefoglalás | 43 |
| 7. Köszönetnyilvánítás | 43 |
| 8. Irodalomjegyzék | 44 |
| Nyilatkozat | 45 |

Bevezetés

Változócsillagoknak azokat a csillagokat tekintjük, melyek fényessége az idő folyamán változik. Ez alapján szinte minden csillag besorolható ebbe a kategóriába, hiszen minden csillag változtatja fényességét, illetve állapotát, ha hosszú távon vizsgáljuk azt. Emellett változhat a csillag állapota rövid időn belül is, csak épp az érzékelő detektorunk nem megfelelő annak kimutatására. Régebben a Napunk fényességét is állandónak tekintették, ugyanis a földi detektorok nem voltak alkalmasak a változás kimutatására. De tudjuk a jelenlegi űrtávcsövek méréseiből, hogy csillagunk is változtatja fényességét, még akkor is, ha ez a változás igen csekély (kb. 0,1%). Éppen ezért változócsillagoknak általában az olyan csillagokat nevezzük, amelyek fényességváltozása egy emberi élethossz alatt kimutatható. Mivel Napunk is változik, ezért a változócsillagok vizsgálata, analízise nagy mértékben hozzájárul saját csillagunk megismeréséhez.

Egy változócsillag fényességének, illetve adatainak (pozíciója, fényintenzitásának hullámhossz szerinti eloszlása, stb.) méréséhez több különböző eszköz áll a rendelkezésünkre. Ezekkel az eszközökkel a megfigyeléseket végezhetjük a Földről, illetve a világűrben is. Az űrtávcsövek érzékenysége meghaladja a földi távcsövekét, köszönhetően a légkör hiányának. Ilyen távcső például a Kepler űrtávcső is. A több száz napos periódussal rendelkező változócsillagok mérése űrtávcsővel szinte kivitelezhetetlen, mert ezekhez több évnnyi adatra van szükség.

A földi megfigyelések pontatlanabbak, de sokkal olcsóbbak és jól használhatóak a hosszabb periódusú fényváltozások mérésére is. Az amatőr csillagászok leggyakrabban használt detektora a csillagok fényességének méréséhez az emberi szem. A szem érzékenysége egyénenként más és más, de az egyéni hibákat kiejti a mérések nagy száma.

Manapság már léteznek olyan szervezetek (AAVSO, AFOEV, VSOLJ, VSNET), melyek összegyűjtik, és rendezik ezeket az adatokat, majd mások számára is elérhetővé teszik az interneten. Ilyen szervezettől, az AAVSO (American Association of Variable Star Observers) honlapjáról töltöttem le én is a felhasznált adataimat.

Változócsillagok vizsgálatára több módszer is használható, amelyeket a matematikai alapok című fejezetben később részletesen is felsorolok. Ezen eljárások közül kettőt - Fourier-analízist és a wavelet-analízist - én is alkalmaztam szakdolgozatomban a Period04 és a WinWWZ programok segítségével.

1. A változócsillagok észlelése

A változócsillagok észleléséhez elsősorban szükségünk van egy távcsőre, illetve különböző detektorokra. Ezek segítségével tudjuk mérni egy csillag fényességét, azaz fényintenzitását, fényességének hullámhossz szerinti eloszlását, azaz spektrumát, az éggömbön való pozícióját, és magától értetődően az időt is. Ez utóbbit a csillagászok Julián-dátumban¹ mérik. Ezen adatok közül szakdolgozatomban két adatra lesz szükség: a fényesség és az idő. Fényességet többféle módszerrel tudunk mérni. Először is szükség van egy távcsőre, ami lehet a Földön és az űrben is. Utóbbiak pontosabbak, de hosszú periódussal rendelkező csillagok mérésére nem használják, ugyanis ezen változócsillagok elemzéséhez hosszú adatsorokra van szükség, amely akár több év is lehet. Az ilyen csillagok mérését leggyakrabban amatőr csillagászok végzik, saját távcsöveikkel. Miután a csillag fényességét más referenciacsillagok segítségével meghatározták, beküldik az adatokat bizonyos szervezetekhez, amelyek szétválogatják, majd rendszerezik őket. Ezek az adatok ma már szinte mindenki számára elérhetőek.

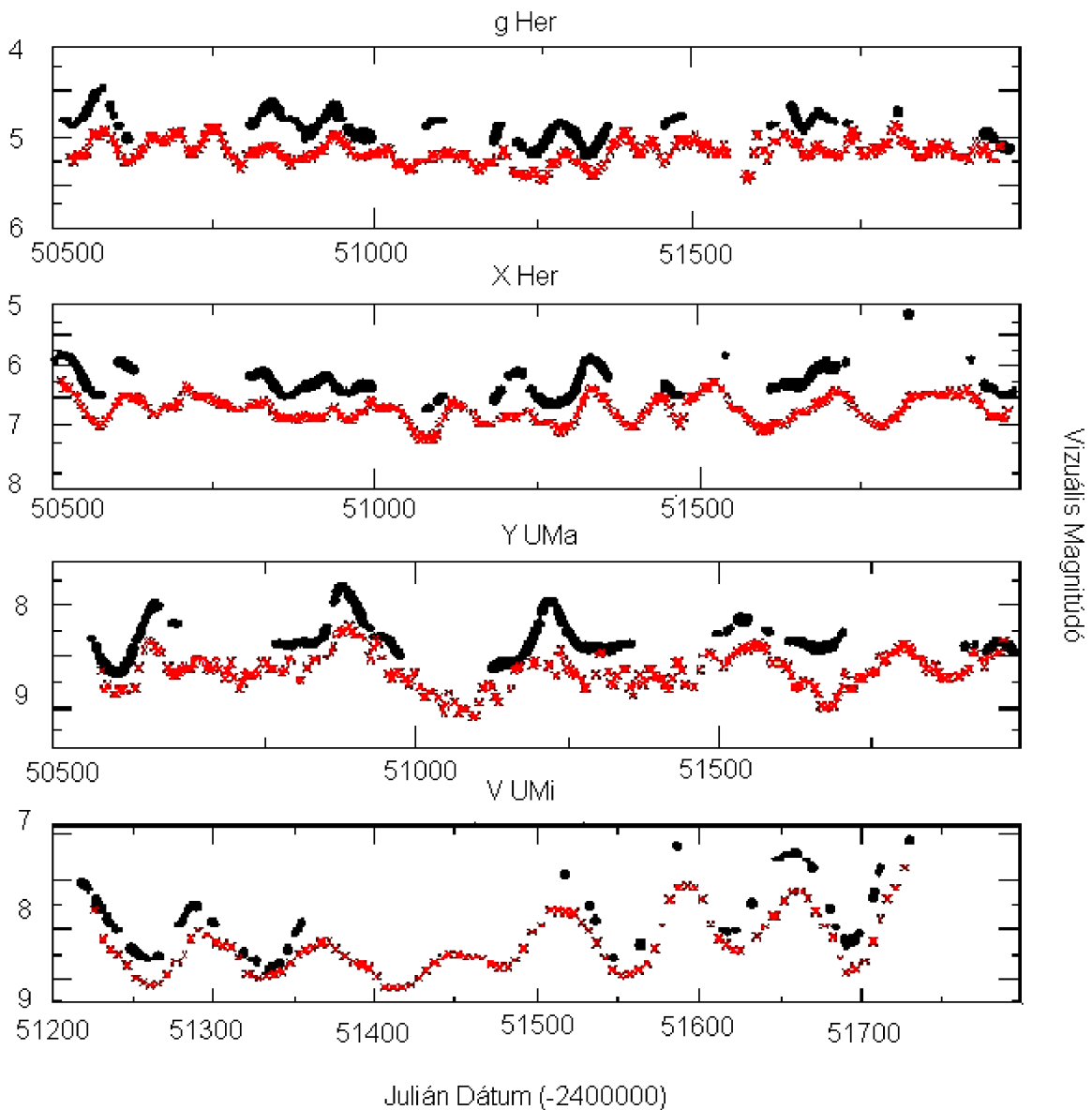
1.1. Az amatőr mérések hibái

Vajon mennyire pontosak ezek az amatőr mérések? Ugyanis a legtöbb amatőr csillagász fénydetektora a saját szeme. A vizuális és fotoelektromos mérések pontosságának összehasonlításával kapcsolatban Kiss László és társai végeztek vizsgálatokat. (Meteor 2002/2).

Az összehasonlítás egyik alapját a Bécsi Egyetem 75 cm-es automata ikertávcsöve jelentette. Ezekkel készítették 0,01-0,02 magnitúdó pontosságú fotoelektromos fotometriai méréseket az összehasonlításban szereplő RV Boo, U Del, TX Dra, g Her, X Her, Y UMa és V UMi csillagokról. Ezután felhasználták a vizuális adatokat a francia AFOEV adatbázisából. Ráadásul másfajta összehasonlítást is elvégeztek, három Mira változó V szűrős CCD méréseit és vizuális észleléseit is összehasonlították.

A félszabályos csillagokkal kapcsolatos fő eredmény az volt, hogy a vizuális adatsor teljesen jó összhangban van a fotoelektromos mérésekkel. Az egyezés csak a 0,1 magnitúdós tartomány alatt sérül. Ehhez az egyezéshez azonban szükség van napi egy vizuális megfigyelésre, illetve arra is, hogy ezek a mérések ne egy észlelőtől származzanak, mert a megfigyelésekből származó hibák csak így átlagolódnak ki. Tehát az adatok függetlensége is nagyon fontos feltétel. Ezek alapján elmondhatjuk, hogy a vizuális megfigyelések megbízható becslést adnak egy félszabályos csillag átlagos ciklushosszára, illetve amplitúdójára. Az egyezések a Mira típusú változócsillagok CCD-s és vizuális mérések összehasonlítására is igazak.

¹A csillagászatban használt időskála, mely a Kr. e. 4713. jan. 1. greenwichi idő szerinti 12:00 órától eltelt napok száma. Jelenleg kb. 245600-ik napot írjuk.



1. ábra. A fotoelektromos adatok (fekete pontok) és átlagolt, simított vizuális megfigyelések (keresztek) összevetése négy csillagra. (Forrás:<http://astro.u-szeged.hu/ismeret/vizufoto.html>)

1.2. Adatbázisok

Miután az előző fejezetben megállapítottuk, hogy szükségünk van amatőr csillagászok fényesség mérésére, amelyeket a későbbiekben szeretnénk is felhasználni, ezért ezeket valakinek össze kell

gyűjtenie, rendszereznie és a nagyközönség számára elérhetővé tennie. Ilyen szervezetet mára már több országban is találhatunk. Például:

1. az amerikai AAVSO (American Association of Variable Star Observers)
2. a francia AFOEV (Association Francaise pour Observations des Etoiles Variables)
3. a magyar MCSE-VCSSZ (Magyar Csillagászati Egyesület Változócsillag Szakcsoportja)
4. és a japán VSOLJ (Variable Star Observers League in Japan).

1.2.1. Az AAVSO

Az adatbázist, ahonnan én is letöltöttem a később feldolgozandó adatokat, 1911-ben hozták létre. A több mint 100 éve alakult nemzetközi adatbázis rengeteg változócsillagot tartalmaz. Ehhez az adatmennyiséghez 6000 megfigyelő járult hozzá. Az adatok átmennek egy szigorú minőségellenőrzési vizsgálaton. Az eljárás biztosítja az adatok hibamentességét. Ez a legnagyobb és legjobb minőségű digitális adatbázis a változócsillagok megfigyelésére.

2. A változócsillagok

A változócsillagok 5 típusát szokás megkülönböztetni:

- Fedési változók
- Rotáló változók
- Eruptív változók
- Kataklimikus változók
- Pulzáló változók

2.1. Fedési változók

Ezek a változócsillagok igazából kettős vagy többes csillagok, melyek egymás körül keringenek. Fényességcsökkenés azért következik be, mert keringésük során egy időre részben vagy teljesen eltakarják egymást. Fénygörbájük alapján megkülönböztetünk Algol, β Lyrae és W UMa típusú fedési változócsillagokat, míg fizikai tulajdonságuk alapján érintkező (*contact*), félig érintkező (*semidetached*) és elkülönülő (*detached*) kettősöket. A W Ursae Maioris csillagok érintkező kettősök. Két alosztályba sorolhatóak: A- és W-típus. Az A-típusú kettősök mindkét csillaga

forróbb a Napnál, színképosztályuk A vagy F. Ezek periódusideje 0,4-0,8 nap között változik. A W-típus komponensei hidegebbek, színképosztályuk G vagy K, periódusuk rövidebb (0,22-0,4 nap).

2.2. Rotáló változók

Ezeknek a csillagoknak a látszólagos fényességük 3 okból változhat. Ezek az okok alapján megkülönböztetünk foltos és elliptikus csillagokat, valamint pulzárokat. A foltos és elliptikus csillagok fényváltozásának oka hasonló. A foltos csillagok felszínén különböző hőmérsékletű, az elliptikus csillagok felszínén más-más méretű részek láthatóak. Ezen csillagok azért változtatják fényességüket, mert tengely körüli forgásuk során más és más részük fordul a Föld felé. A harmadik típusú rotáló változók esetén (pulzárok) a csillag mágneses mezeje időről-időre változik a Földről nézve a csillag forgása miatt. A foltos- és elliptikus csillagok tengely körüli forgásának periódusa állandó, de a foltok mérete, fényessége, alakja és száma időben változhat, ennek következtében a fénygörbéje is változik. Ellenben a pulzárok felvillanásai időben „atomóra-pontossággal” követik egymást, ha az egyéb változásoktól eltekintünk.

2.3. Eruptív változók

A változócsillagok e fajtájánál a csillag felszínén vagy légkörében történő robbanások, kitérések következtében a csillag fényessége megnövekszik. Ez a fényességváltozás igen szabálytalan időtartamú és nagyságú. A fényességnövekedés mértéke néhány tized magnitúdótól néhány magnitúdóig terjed. Jellemző a nagy anyagkifúvás. Ide tartoznak a T Tauri, FU Orionis, R CrB típusú változók.

Az R CrB típusú eruptív változók hidrogénben szegény, szénben gazdag csillagok, amelyek az időnkénti erős elhalványulás mellett kváziperiodikus pulzációt is mutatnak. A periódus 30-100 nap közötti, az amplitúdó nagyobb mint 1 magnitúdó.

2.4. Kataklimikus változók

Közös tulajdonságuk, hogy rövid idő alatt drasztikus mértékben megnövekszik a fényességük, majd lassan elhalványulnak. 4 csoportot szokás megkülönböztetni: szupernóvák, nóvák, törpenóvák, és nóvaszerű objektumok. A szupernóvák esetében az élete végéhez ért csillag a robbanás során elpusztul. Itt a felrobbanó csillag lehet egy nagy tömegű szuperóriás, ami összeroskad, vagy egy fehér törpe, ami anyagot fog be a társcsillagától, majd a Chandrasekhar-határt² elérve felrobban. A nóvák szoros kettős rendszerek, amelyek egyik komponense egy fehér törpe. A másik

²A fehér törpe csillagok maximális tömege, kb. 1,44 naptömeg.

komponens kitöltötte Roche-térfogatát³ és anyagot ad át a fehér törpének. A fehér törpe által befogott hidrogén sűrűsége és hőmérséklete eléri azt a határt, aminél beindul a fúzió és ezáltal egy robbanás jön létre az akkréciós korongban vagy a fehér törpe felszínén. Ez a robbanás váltja ki a fényességnövekedést. A törpenóvák esetén a kísérő társcsillag egy vörös törpe. A kataklizmikus változócsillagok némely típusát standard gyertyaként használják fel távolságméréshez.

2.5. Pulzáló változók

A változócsillagok csoportjának legtöbb alcsoportja a HRD⁴ úgynevezett instabilitási sávjában helyezkedik el (2. ábra) A pulzáló változócsillagok többségének periodikusan nő, illetve csökken a felülete és ezzel együtt a fényessége. Az instabilitási sávban csökkenő luminozitás szerint a legfontosabb pulzáló változócsillagok:

- Klasszikus cefeidák vagy δ cefeidák
- W Virginis és BL Herculis típusú csillagok vagy II. populációs cefeidák
- RR Lyrae
- δ Scuti
- ZZ Ceti típusú csillagok.

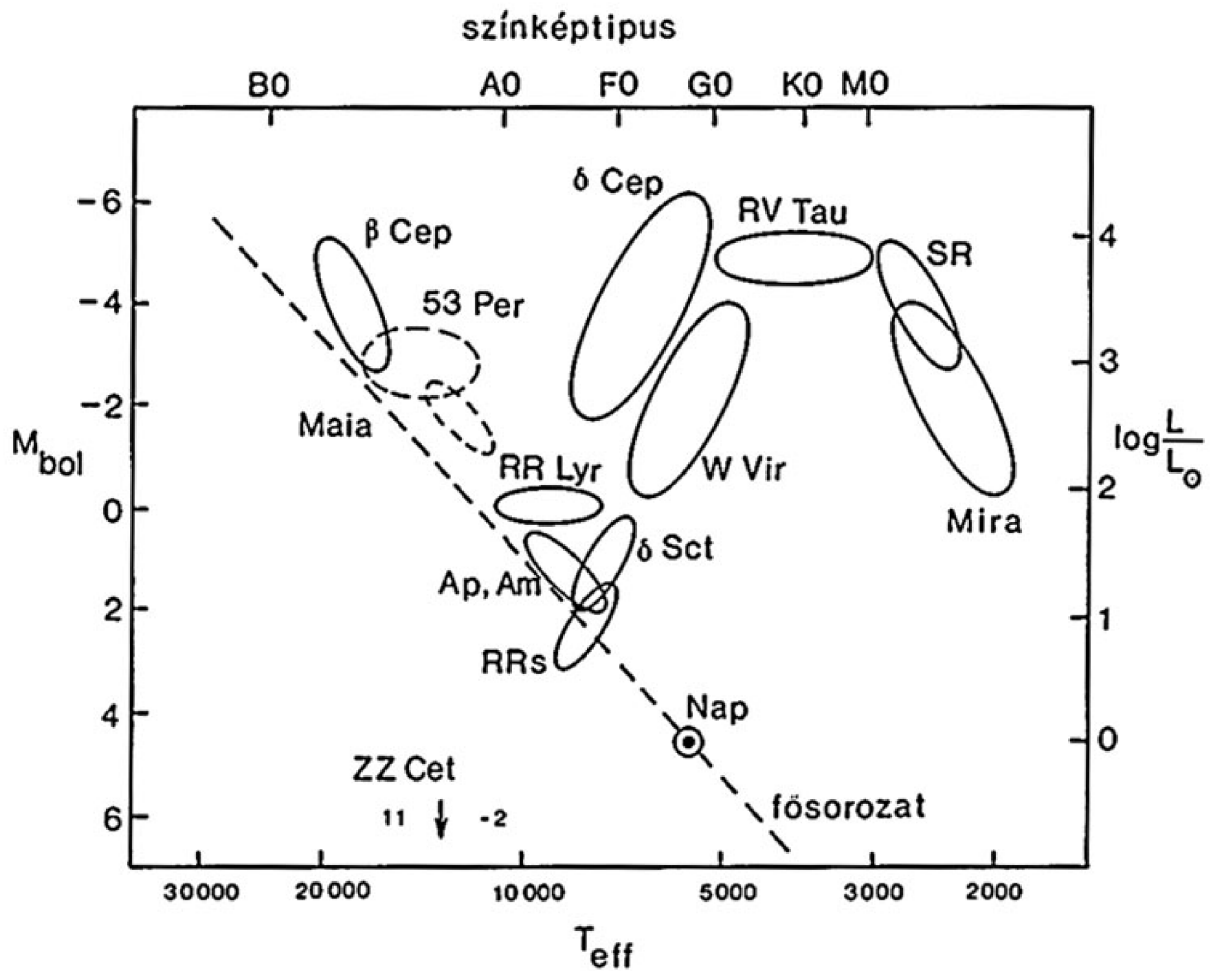
A HRD-diagramon még további pulzáló változócsillagok is találhatóak. Ezek pl. a β Cephei típusúak, valamint a nagy luminozitású RV Tauri csillagok, illetve a félszabályos (SR) és a Mira típusú változók.

- Cefeida változók:

Radiálisan pulzáló I. populációs, fényes szuperóriás csillagok. Periódusidejük 1-135 nap közötti, az amplitúdó pedig néhány tized magnitúdótól néhány magnitúdóig terjed ($0,1 - 2^m$). A β cefeidák többszörös periodicitást mutatnak. A W Virginis és a BL Herculis típusú csillagok vagy II. populációs cefeidák öregebbek, a HRD-n jól elkülöníthető helyen találhatóak.

³A kettős vagy többes rendszerekben a belső Lagrange-ponthoz (L1) tartozó gravitációs ekvipotenciális felületek által határolt térfogat, ami a két csillag között egy pontban érintkezik.

⁴A Hertzsprungról és Russellről elnevezett diagram a csillagfejlődést szemlélteti, melynek vízszintes tengelyén a csillagok effektív hőmérséklete vagy színképosztálya, függőleges tengelyén a csillagok abszolút fényessége vagy luminozitása szerepel.



2. ábra. A pulzáló változócsillagok helye a HRD-n.

- RR Lyrae:

A színképosztályú, öreg, II. populációs óriás csillagok. Periódusidejük néhány tized naptól 1 napig terjed (0,2-1 nap), ezalatt fényességük néhány tized magnitúdótól 2 magnitúdóig változik. Abszolút fényességük nagyon hasonló, így távolság meghatározására alkalmasak.

- δ Scuti:

A vagy F színképosztályú csillagok. Néhány órás periódusidővel változik a fényességük, mégpedig pár század vagy tized magnitúdós amplitúdóval. Korábban törpe cefeidáknak is hívták őket. Tulajdonságaikban az RR Lyrae csillagokra hasonlítanak. Periódusváltozásukban gyakran több felharmonikus figyelhető meg, amelyek kombinációja egy különösen összetett fénygörbét eredményez.

- ZZ Ceti típusú csillagok:

Multiperiodikus, nem radiálisan pulzáló, hidrogén-atmoszférájú fehér törpék, néhány perces periódussal. Az amplitúdó változásuk néhány ezred magnitúdótól néhány tized magnitúdóig terjed.

2.5.1. Hosszú periódusú és félszabályos változók

Ennek a változócsoporthoz a tagjai vörös óriáscsillagok, periódusidejük rendszerint egy év körüli. Ez a periódusidő azonban nem állandó, ciklusról ciklusra változik, „lötyög”.

Mira típusú változók:

Névadó csillaga az európai csillagászok által elsőként megfigyelt változócsillag, az omikron Ceti. A Mira jelentése „csodálatos”, „megdöbbenő”. A Mira kettőscsillag, komponensei a vörös óriás Mira A és a Mira B. Távolsága a Hipparkhosz mérése alapján kb. 400 fényév. Periódusideje 333 nap.

A GCVS (General Catalogue of Variable Stars) szerint a mirák vörös óriás, vagy szuperóriás csillagok, amelyeknek pulzációs ideje rendkívül hosszú (100 nap feletti) és fényességváltozása több mint 2,5 magnitúdó. A mirák az alaphangon, valamint az első felhangon szoktak pulzálni. Ennek során a csillag sugara akár $\frac{1}{5}$ -ével is megváltozhat, ennek következtében hőmérséklete lecsökken. Amikor a csillag a legnagyobb sugarú állapotban van pulzációja során, akkor TiO (titánium-oxid) molekula, illetve por képződik a külső légkörében, ami a csillag fényének jelentős részét elnyeli a vizuális tartományban. Emiatt a csillag akkor a legfényesebb, amikor a legkisebb méretű és egyúttal legforróbb a felszíne.

A félszabályos (*szemireguláris*) változócsillagok pulzációjának periódusideje a mirákéhoz hasonlóan lötyög, gyakran több módusú pulzációt mutat. A fényességváltozásuk amplitúdója is ingadozik, előfordulhat, hogy fényességük egy időre állandósul, majd újraindul a pulzáció. A félszabályos változócsillagokon belül négy kategóriát szokás megkülönböztetni, ezek az SRa, SRb, SRc, és SRd. Ezen kategóriák közül az SRa típusúak a legszabályosabbak, majd ez a szabályosság egyre csökken az SRd típus felé haladva.

Az SRa félszabályos változócsillagok a mirákhoz hasonlóak, csak kisebb amplitúdó és szabálytalanabb periódus jellemzi őket, melynek ideje 35-1200 nap. Az SRb csillagoknak nagyon erősen változó fénygörbéjük van, gyakran mutatnak többszörös periodicitást. Az SRc típusú félszabályos változócsillagok az M színképosztályú nagyon fényes szuperóriások osztályába tartoznak. Fényességváltozásuk amplitúdója 1 magnitúdó körüli, míg periódusidejük 1 hónap és néhány ezer nap között változik. Az SRd csillagok a sárga óriások és szuperóriások osztályába tartoznak. Fényességváltozásuk periódusának hossza 30-1100 nap, amplitúdójú néhány tized magnitúdótól

négy magnitúdóig terjed.

3. Matematikai alapok

3.1. A legkisebb négyzetek módszere

Eleinte a hosszú periódusú pulzáló változócsillagok periódusát a legkisebb négyzetek módszerével keresték.

3.1.1. Története

Az 1800-as évek elején Giuseppe Piazzi olasz csillagász felfedezte a Ceres törpebolygót⁵. A pályáját több mint egy hónapig figyelte, majd a törpebolygót szem elől tévesztette. Ezután több tudós is próbálkozott, hogy becslést adjon a Ceres pályájára. Ezen számítások közül Carl Friedrich Gaussé volt annyira pontos, hogy a számítások alapján az év vége felé újra rátaláljanak a Ceresre. Gauss ezt az eljárását, a legkisebb négyzetek módszerét 1809-ben adta ki a *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* című művének második kötetében. Ugyanezt a módszert 1806-ban Legendre is közzétette Gausstól függetlenül. Tőle származik a *méthode des moindres carré* (legkisebb négyzetek módszere) elnevezés. Gauss 1829-ben bebizonyította, hogy a módszer tágabb értelemben optimális, azaz megadta a valószínűségelméleti megalapozását is (Gauss-Markov tétel).

3.1.2. Definíciója és alkalmazása

A csillagok mérései során előfordul, hogy 2 vagy több egymástól függő fizikai mennyiséget mérünk meg (fényintenzitás, idő, pozíció, stb.). Tegyük fel, hogy megmértük az x és y mennyiségeket, melyek között a következő kapcsolat van:

$$y = f(x, a, b, \dots), \quad (1)$$

ahol a, b, \dots ismeretlen paraméterek. Mivel a mérések során kapott x_i és y_i mennyiségek mérési hibával terhelték, ezért nincs olyan a, b, \dots paraméter, melyek esetén a függvény tökéletesen illeszkedne a mérési pontokra.

A paramétereket meg tudjuk határozni a legkisebb négyzetek módszerével, ami azt mondja, hogy az illesztés akkor a legjobb, ha az alábbi négyzetösszeg minimális:

⁵Természetesen akkor még a Ceres nem tartozott a törpebolygók családjába, ugyanis ezt a definíciót 2006 augusztusában Prágában vezették be a Nemzetközi Csillagászati Unió által tartott XXVI. közgyűlésen. (Meteor 2006/10.)

$$S(a, b, \dots) = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i, a, b, \dots))^2 = \min., \quad (2)$$

ahol N a mérések adatpárjainak a száma, x_i és y_i a mérések során kapott értékek. Tehát a paramétereiket úgy kell meghatározni, hogy a kapott értékek minimálisak legyenek.

Általános esetben a probléma igen bonyolult szélsőérték problémához vezet. Több esetre léteznek kidolgozott elméleti és numerikus módszerek. Nézzünk egy példát ezen módszerek közül. Talán a legfontosabb és legegyszerűbb eset az egyenes illesztése.

Ebben az esetben az f függvény alakja a következő lesz:

$$y = a \cdot x + b \quad (3)$$

Behelyettesítve (3)-ast a (2)-es egyenletbe kapjuk, hogy

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - (a \cdot x_i + b))^2 = \min. \quad (4)$$

Ennek a négyzetösszegnek kell minimálisnak lennie. Analízisből ismeretes, hogy szélsőértéke akkor van, ha $S(a, b)$ összeg a és b paraméterek szerinti parciális deriváltja nulla:

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^N [2 \cdot (y_i - (a \cdot x_i + b)) \cdot (-x_i)] = 0, \quad (5)$$

és

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^N [2 \cdot (y_i - (a \cdot x_i + b)) \cdot (-1)] = 0 \quad (6)$$

Ebből a két egyenletből már kifejezhető a és b értéke:

$$a = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - \bar{x}_N \cdot \bar{y}_N}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{x}_N^2} \quad (7)$$

és

$$b = \bar{y}_N - a \cdot \bar{x}_N \quad (8)$$

Az illesztés pontosságát, minőségét jellemezhetjük a korrelációs együtthatóval (R), vagy annak négyzetével, melynek definíciója:

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^N [(x - \bar{x}_N)(y - \bar{y}_N)] \right]^2}{\sum_{i=1}^N (x - \bar{x}_N)^2 \sum_{i=1}^N (y - \bar{y}_N)^2}, \quad (9)$$

ahol R értéke 0 és 1 közé esik. Ha a függvényünk tökéletesen illeszkedik a mért pontjainkra, akkor értéke 1, és annál közelebb esik R (illetve R^2) értéke egyhez, minél kisebb a pontok szórása.

Fontos megkülönböztetni az origón át nem menő egyenest az origón biztosan átmenőtől, ekkor ugyanis $b=0$, így a (4)-es egyenlet a következőképpen módosul:

$$S(a) = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i))^2 = \min. \quad (10)$$

Majd deriválva:

$$\frac{\partial S(a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^N 2(y_i - (ax_i))(-x_i) = 0 \quad (11)$$

Az egyenletet átrendezve, kapjuk a-ra, hogy:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (12)$$

Ezeknek a függvényeknek az illesztését ma már számítógépeken, adatfeldolgozó programok segítségével oldjuk meg. De ebben az esetben is figyelni kell pl. az origón átmenő egyenes esetére. A csillagászatban már nem igazán használják ezt a módszert, mert a többszörös periodicitásnál és periódusváltozásnál már nagy hibák lépnek fel (1934, Sterne).

3.2. Sztringhossz módszer

Angolul „*string length method*” (Lafler és Kinman, 1965, Dworetzky, 1983). A módszert először 1965-ben az RR Lyrae változócsillagok periódusának keresésére használta és dolgozta ki Lafler és Kinman.

A próbaperiódusok keresése a fázis-diagram pontjai töröttvonallal való összekötésén alapul. Ezek hosszának minimalizálásával keresi a valódi periódust.

3.3. Autokorreláció

Az autokorreláció olyan módszert jelent, amely azt tanulmányozza, hogy ugyanazok a változók megfelelő intervallumok eltelte után mennyire hasonlítanak egymásra. A k lépéses autokorreláció az idősor és a k lépéssel eltolt idősor közötti korreláció, melynek elméleti értéke:

$$\rho_k = \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(z_t - \mu)^2] E[(z_{t+k} - \mu)^2]}}, \quad (13)$$

ahol a tört nevezője éppen a sokasági szórás (σ) négyzetét adja, így:

$$\rho_k = \frac{E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)]}{\sigma^2}, \quad (14)$$

Az egyes ρ_i tényezők közelítő értékeit az idősor elemei alapján számíthatjuk ki:

$$r_\tau = \frac{\sum_{t=1}^{T-\tau} (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}, \quad (15)$$

ahol T az idősor hossza, τ az egyes mérési időpontok távolsága, és \bar{x} az idősor várható értékének becslése. Egy idősor autokorrelációs függvénye a $\tau = 0, \dots, n$ értékekhez tartozó r_τ autokorrelációs tényezőkből áll.

Ezt a módszert ritkán használják a csillagászatban, mivel τ értéke állandó (ekvidisztans adatsor) kell hogy legyen.

3.4. Maximum Entrópia Módszer

Az entrópia megjelenik az információelméletben, a statisztikus fizikában, és számos alkalmazásra talál a fizika egyéb területein, a csillagászatban és az orvostudományban. A maximum entrópia módszer (MEM) egy olyan valószínűségelméleti eljárás, amely alkalmazható a változócsillagok fénygörbéjének elemzésében.

3.5. Fázisdiszperzió minimalizálása

Angolul „*Phase Dispersion Minimalization*” (Stellingwerf, 1978), röviden PDM egy hasznos módszer, mert nem veszi figyelembe az adatsorban általában előforduló űröket, illetve a fényváltozás aszimmetriáját. A módszer akkor alkalmazható jól, ha a jelek nem szinuszosak, de periodikusak.

Minden jelet eltolunk a $[0, 1]$ intervallumba, így kirajzolódik a fázis. A fázisdiagramot kiszámoljuk egy próbaperiódussal. Ilyenkor az intervallumot kis szakaszokra osztjuk. Legyen az intervallum M , melyben m cella van. Ekkor az összes cellába eső pontok szórása:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (m_k - \bar{m})^2}{n - 1}, \quad (16)$$

ahol n a mérési pontok száma, és \bar{m} az egyes m_k fényességértékek átlaga. Gyököt vonva kapjuk az empirikus szórást:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (m_k - \bar{m})^2}{n - 1}}, \quad (17)$$

Legyen

$$S = \sum_{m=1}^M \sigma_m \quad (18)$$

Ezt az S -et kell kiszámolni és ábrázolni a próbaperiódus függvényében. Az ábrázolt függvény globális minimuma lesz a helyes periódus. A módszer tetszőleges alakú fénygörbére alkalmazható, azonban ha többszörös periodicitás van jelen, akkor nehezkessé válhat a módszer alkalmazása.

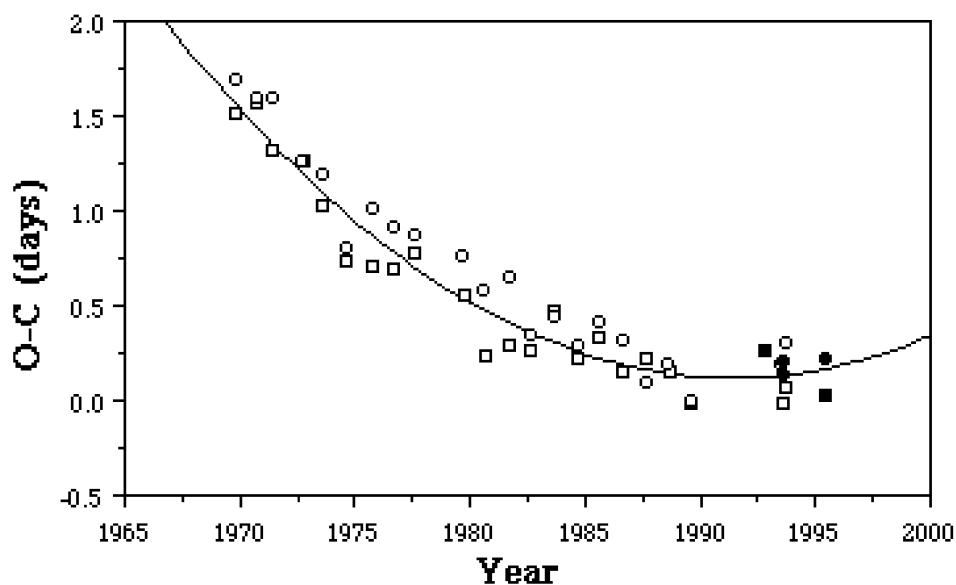
3.6. O-C diagram

A változócsillagok periódusidejének, illetve a periódusidő változásának meghatározására szolgáló diagram.

Legyen T_o egy változócsillag fényességének szélső helyzetben (minimum vagy maximum) megfigyelt időpontja, T_c pedig egy feltételezett periódussal előre kiszámolt időpont. Ekkor definíció szerint:

$$O - C = T_o - T_c \quad (19)$$

Ezután az O-C értékeket ábrázoljuk a ciklusszám függvényében. Ez lesz az O-C diagram. Ha a mért periódus értéke megegyezik a számolt periódus értékkel, akkor a pontok nulla közelében helyezkednek el, míg rosszul meghatározott esetben egy bizonyos meredekségű egyenes mentén vannak. Ha az egyenes meredeksége nagyobb, mint 0 ($m > 0$), akkor a periódus hosszabb a számoltnál, ha az egyenes meredeksége kisebb, mint 0 ($m < 0$), akkor a periódus rövidebb a számoltnál. Ha az eltérés, azaz a pontthalmaz egy magasabb fokú függvénnyel írható le, akkor a periódusváltozás folyamatos, aminek már fizikai okai vannak.



3. ábra. O-C diagram.

3.7. Fourier-analízis

3.7.1. Története

Már a XVII. században is döntő szerepet játszottak bizonyos fizikai problémák az analízis további fejlődésében. A XVIII. században és a XIX. század elején a fizika több olyan problémát

is felvetett, amelyek elősegítették új matematikai elméletek megalkotását. Többek között ilyen probléma mutatkozott a jelanalízisben is. A jelek mind az idő-, mind a frekvenciatartományban leírhatók egy sor jellegzetes paraméterrel. Ezen a paraméterek között szigorú matematikai összefüggések vannak. Jean Baptiste Joseph de Fourier francia matematikus már 1822-ben rájött erre a tényre. Ráadásul bebizonyította, hogy minden periodikus függvény felbontható különböző amplitúdó és fázissúlyozású, harmonikus rezgések összegére. Az időfüggvény menete és a Fourier szerinti sorfejtés tagjainak súlytényezői között szoros kapcsolat van. Ezeket a tagokat Fourier tiszteletére Fourier-együtthatóknak nevezzük. Később az elméletet nem periodikus folyamatokra, valamint a diszkrét idejű és diszkrét értékű függvényekre is kiterjesztették. Azt a matematikai eljárást, amely a függvény egyik leírási tartományból egy másik leírási tartományba való átalakítását teszi lehetővé transzformációnak nevezzük. A Fourier-transzformáció függvények időtartományból frekvenciatartományba és visszaalakítását teszi lehetővé. Ez az eljárás a jelfeldolgozás egyik legfontosabb eszközévé vált.

3.7.2. A valós Fourier-sor

Periodikus függvényről beszélünk, ha megadható olyan T mennyiség, melyre $f(t + T) = f(t)$ minden t esetén teljesül. A T mennyiséget periódusidőnek nevezzük, mert T idő múlva a t független változótól függő $f(t)$ függvényérték megismétlődik. A Fourier által megfogalmazott tétel szerint $f(t)$ a következő alakba írható:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(\omega_k t), \quad (20)$$

Természetesen ω_k -ra érvényes a következő összefüggés:

$$\omega_k = k\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} k = 2\pi f_0 k, \quad (21)$$

ahol az $f_0 = \frac{1}{T_0}$ mennyiséget az $f(t)$ periodikus függvény alaphfrekvenciájának, míg az $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ mennyiséget az alapkörfrekvenciának nevezzük. A (20)-as egyenlet által megfogalmazott tétel azt jelenti, hogy egy periodikus függvény az f_0 alaphfrekvenciájú és t_0 egész számú többszöröseinek megfelelő frekvenciájú, harmonikus rezgésekre bontható, azaz sorbafejthető. Ebben a sorfejtésben a rezgések amplitúdóit és fázisait az a_k és a b_k Fourier-együtthatók adják. Ezek az együtthatók meghatározhatók a következő integrálok segítségével:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (22)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (23)$$

A $k=0$ esetén az a_0 Fourier-együttható:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt, \quad (24)$$

amely az $f(t)$ időfüggvény egy T_0 periódusra átlagolt aritmetikai középértékének felel meg.

A (20)-as egyenletet a következőképpen is fel lehet írni:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \quad (25)$$

ahol $A_0 = a_0$ és

$$A_k = \frac{a_k}{\cos\varphi_k} = \frac{-b_k}{\sin\varphi_k}, \quad (26)$$

valamint

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (27)$$

és

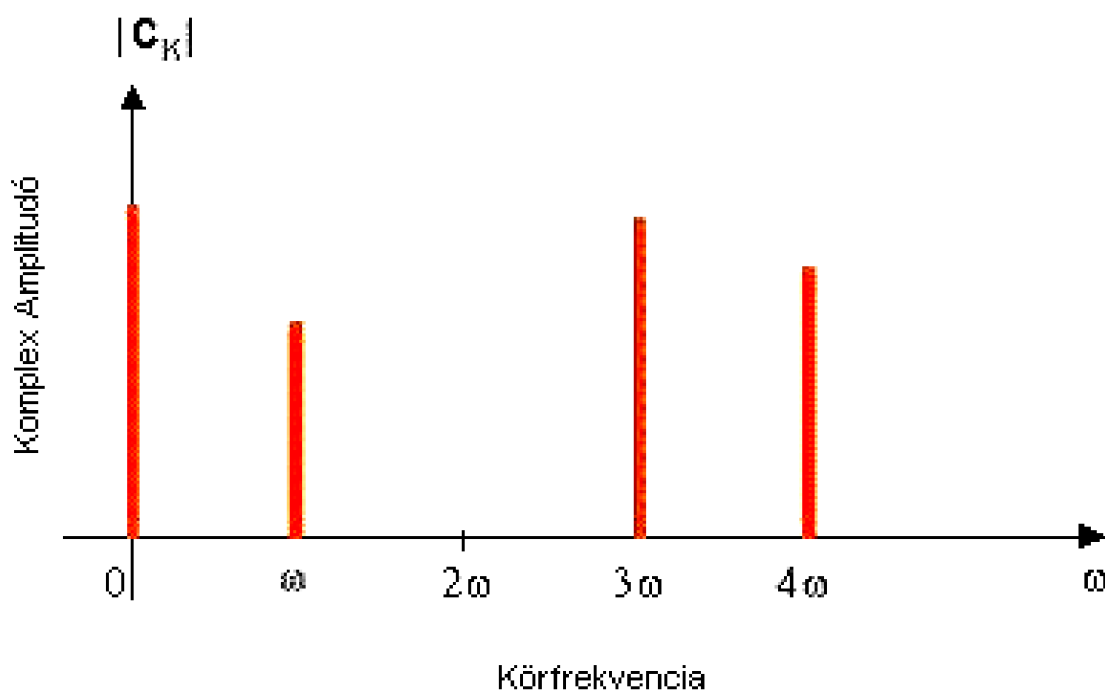
$$\varphi_k = \arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right). \quad (28)$$

Ha a (25)-ös egyenletbe visszahelyettesítjük a $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$ addíciós tételt, úgy hogy az egyenletbe $x = k\omega_0 t$ és $y = \varphi_k$ írunk, akkor visszakapjuk a (20)-as egyenletet.

A periodikus időfüggvény A_k és φ_k értékekkel leírt spektrumát az $\omega_k = k\omega_0$ helyeken vonalakkal ábrázoljuk, ezeknek a vonaloknak a nagyságát az A_k és a φ_k számértékei határozzák meg. Az ilyen fajta spektrumot vonalas spektrumnak nevezzük.

Tehát az eddigiek alapján alaptételként rögzíthetjük a következőket:

1. Periodikus függvénynek diszkrét frekvenciaspektruma van, amelyet a Fourier-sorba fejtésben megadott együtthatók írnak le.
2. Páros függvényeknél a b_k együtthatók, páratlan függvényeknél az a_k együtthatók nullák. (A (22)-es és a (23)-as egyenletekből következik.)
3. Azonos frekvenciák esetén az a_k és a b_k együtthatókat egy A_k amplitúdóval és egy φ_k fázissal lehet összefogni, ezért minden periodikus függvény diszkrét amplitúdó- és fázisspektrummal jellemezhető.
4. Normális esetben az amplitúdóspektrum önmagában nem mond semmit az időfüggvény menetéről, ezért egyes A_k tényezők φ_k helyzetének megváltoztatásával más és más időfüggvényeket kapunk.



4. ábra. A C_k komplex együttható spektrális ábrázolása.

3.7.3. A komplex Fourier-sor

A Fourier-sor valós alakjának sok gyakorlati alkalmazása van, de a jelanalizációs problémák körében ez kényelmetlenné válik. Ezért írjuk át a (20)-as egyenletet komplex alakba. Ehhez az átíráshoz az Euler-formulákra van szükség:

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} \quad (29)$$

$$i \cdot \sin(k\omega_0 t) = \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2} \quad (30)$$

Használjuk ki (29)-es és a (30)-as összefüggéseket, és alakítsuk át a (20)-as egyenletet, ami a következő alakú lesz:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} - ib_k \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2} \right] \quad (31)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega_0 t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega_0 t} \right] \quad (32)$$

Az összegzés külön is elvégezhető, de a második tagnál változtassuk meg az összegző indexet k -ről $-k$ -ra, ekkor:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega_0 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{a_{-k} - ib_{-k}}{2} e^{ik\omega_0 t} \quad (33)$$

Vezessük be a következő jelölést:

Ha $k \geq 0$, akkor $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ és ha $k < 0$, akkor $c_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}$. Az új jelöléssel a (33)-as egyenlet a következő alakú lesz:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \quad (34)$$

Így $f(t)$ Fourier-sorát már egy \sum jel alá lehet írni:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}, \quad (35)$$

ahol

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad (36)$$

Az a_k és a b_k valós Fourier-együtthatók, valamint a c_k komplex együttható között a következő összefüggés áll fenn:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad (37)$$

ahol $k = -\infty, \dots, \infty$.

3.7.4. Nem periodikus jelek Fourier-analízise

Az eddig tárgyalt Fourier-analízis során feltettük a vizsgált függvények periodikus voltát. A Fourier-tételnek nem periodikus jelekre történő kibővítése a Fourier-integrál bevezetését teszi szükségessé, amely fontos szerepet játszik a következő részben tárgyalt diszkrét Fourier-transzformációs (DFT) eljárásban.

A periodikus jelekről a nem periodikus jelekre való áttérést úgy lehet elvégezni, hogy az általános periodikus jel T_0 periódusidejét a végtelenhez közelítjük. Mivel a diszkrét spektrumban a spektrumvonalak egymás közti távolsága a periódusidővel fordítva arányos, ezért $\Delta f \rightarrow 0$, ha $T_0 \rightarrow \infty$. Így a vonalas spektrum helyett folytonos spektrum jön létre. Így tehát a határátmenet elvégzésekor a (35)-ös egyenletben szereplő összeg integrállá alakul és eljutunk a Fourier-tétel integrál alakját megfogalmazó két egyenletig:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (38)$$

és

$$F(\omega) = \int_{k=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (39)$$

A (39)-es egyenletben szereplő $F(\omega)$ mennyiséget az $f(t)$ Fourier-transzformáltjának nevezzük, míg a (25)-ös egyenletet az inverz Fourier-transzformációnak nevezzük. Mivel érvényes a $df = \frac{d\omega}{2\pi}$ összefüggés, ezért a (38)-as egyenlet a következő alakba is írható:

$$f(t) = \int_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} df \quad (40)$$

Megjegyzendő, hogy nem minden nem periodikus folyamatnak van Fourier-transzformáltja. Az $F(\omega)$ létezésének egyik szükséges feltétele, hogy az $I = \int_{k=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ integrál értéke véges legyen. Ezt a konvergenciát szinte minden függvény esetén meg lehet valósítani megfelelő matematikai műveletek segítségével.⁶

3.7.5. Mintavételezett jelek Fourier-transzformáltja

A mintavételezett jelekre a (39)-es egyenlet közvetlenül nem alkalmazható, mert a végtelen kis mintavételi tartományokat előíró követelmény a gyakorlatban nem valósítható meg (végtelen nagy mintavételi sebesség adódna). Tegyük fel, hogy csak a t_n diszkrét időpontokban vett mintavételezett jelek állnak rendelkezésünkre, ezért a folytonos t változót a $t_n = n\Delta t$ ($-\infty \leq n \leq \infty$) diszkrét változóval helyettesítjük, és az integrál helyett diszkrét összeget használunk. Így a (39)-es egyenlet a következő alakba írható:

$$F'(\omega) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) e^{i \cdot 2\pi n f \Delta t} \quad (41)$$

Míg a folytonos függvények $F(\omega)$ általános Fourier-transzformáltja esetén a spektrum amplitúdói és fázisai bármilyen frekvenciára definiálva vannak, addig az $F'(\omega)$ spektrum amplitúdói és fázisai nincsenek minden tetszés szerinti nagy frekvenciára definiálva. Azaz létezik egy $f = f_{max}$ felső határ, amely a Δt mintavételi tartománytól és ezzel együtt az f_m mintavételi frekvenciától függ. Ezt a határt Claude Shannon (1949) mintavételi tétele szabja meg, amely kimondja, hogy időben és értékben folytonos jel időbeni mintavételezett értékekből történő hibátlan helyreállításához az f_m mintavételi frekvenciát a jelben előforduló legnagyobb frekvencia kétszeresénél nagyobbra kell választani, azaz $f_{max} < \frac{1}{2\Delta t}$. Az f_{max} értéke az $F(\omega)$ megengedett felső határát adja. Ez az $f_{max} = \frac{1}{2\Delta t}$ maximális frekvencia, amit meg lehet határozni, az ún. Nyquist-frekvencia.

3.7.6. Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

Mivel a gyakorlatban véges számú mintavételi értékünk van, ezért a (38)-as egyenlet további módosításra szorul, így jutunk el az időben korlátozott jelekre vonatkozó diszkrét Fourier-transzformációs (DFT) eljáráshoz.

Tegyük fel, hogy N számú mintavételezési pont áll rendelkezésünkre, ekkor az egyenlet a következő alakot ölti:

$$F(\omega_M) = \Delta t \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f(n\Delta t) e^{-i \cdot M \Delta \omega n t}, \quad (42)$$

⁶Laplace és a Z-transzformáció.

ahol az eredeti folytonos ω változót egy diszkrét ω_M váltotta fel. A korlátozás következtében az eredeti folytonos spektrumot csak véges számú, egymástól független, diszkrét frekvenciaértékekre lehet kiszámítani: $\omega = M\Delta\omega$ és $f_M = M\Delta f$.

A diszkrét Fourier-transzformációnak is létezik inverz transzformációs algoritmus, az inverz diszkrét Fourier-transzformáció (IDFT):

$$f(n) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=0}^{N-1} F(m)e^{i\frac{2\pi mn}{N}} \quad (43)$$

A Fourier-transzformációt csak véges számú N mintavételi értékre korlátozva az időtartományban egymástól független frekvenciaértékek nem mindegyikét értelmezhetjük a frekvenciatartományban, hanem a spektrum csak diszkrét frekvenciaértékekre adható meg. Ez arra utal, hogy a szakaszonként megadott jel periodikusan ismétlődik az időtartományban. Az analizálandó időfüggvénynek az időablak által kijelölt $S_F(t)$ szakasza az ablakszélesség időtartamának megfelelően periodikus:

$$S_F(t) = S_F(t + nT_F), \quad (44)$$

ahol $-\infty < n < \infty$ és T_F a jel $N \cdot \Delta t$ időtartamon belüli mintavételezése.

A mintavételezett függvények Fourier-transzformáltjára vonatkozó (38)-as egyenletbe helyettesítsünk be az eredetileg $f(t)$ folytonos időfüggvény $f'(n)$ mintavételi értékei helyett egy módosított $f'(t) = f(t)w(t)$ időfüggvényt:

$$F'(\omega) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)w(n)e^{-i\frac{2\pi mn}{N}}, \quad (45)$$

ahol $w(t)$ az időablak. A Fourier-transzformáltakra vonatkozó konvolúciós tétel szerint érvényes az:

$$F'(\omega) = F(\omega) * W(\omega), \quad (46)$$

illetve az

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)W(\omega - \omega')d\omega' \quad (47)$$

összefüggés, ahol $W(\omega)$ a $w(t)$ időablak Fourier-transzformáltja, azaz spektruma. Az $F'(\omega)$ függvény változását nagyban befolyásolja a $w(t)$ időablak függvényének menete. A spektrálablak kiszámítására a következő összefüggés használható:

$$W(\omega) = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos(\omega t_n) \right]^2 + \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin(\omega t_n) \right]^2 \quad (48)$$

3.7.7. Alkalmazás

A Fourier-transzformációknak és a Fourier-soroknak számos alkalmazásuk van. Többek között használják a jelfeldolgozásban, a hang- és videotechnikában. Természetesen az analóg áramkörök

leírásában is. Sok valószínűség-számítási és statisztikai elméletben is megjelenik. Összetett rezgések vizsgálatakor a Fourier-analízis segítségével meghatározhatók az egyes komponensek amplitúdói és fázisai.

A Fourier-transzformáció alkalmazható differenciálegyenletek megoldásában is. Ugyanis a Fourier-transzformáció egyik tulajdonságának köszönhetően a differenciálegyenletek algebrai egyenletekké alakíthatók, majd megoldhatók. Az inverz Fourier-transzformáció segítségével meg visszaalakíthatók.

A Fourier-analízist számos területen alkalmazták már a csillagászatban is. Ezeket a számolásokat ma már programok segítségével végezzük, többek között ilyen program a Period04 nevű program is. A programra egy későbbi fejezetben visszatérek. Ennek a programnak a segítségével végeztem el a különböző változócsillagok idő-frekvencia analízisét.

3.8. A wavelet-transzformáció

A frekvenciatartomány vizsgálata a jelfeldolgozásban igen fontos szerepet játszik. A Fourier-transzformáció egyetlen igazán nagy hátránya az, hogy nincs időbeli lokalizációs tulajdonsága, azaz a frekvenciafüggvény alapján nem tudjuk eldönteni, hogy egy adott frekvenciakomponens „hol van” az időfüggvényben. Ezt a problémát oldja meg a wavelet-transzformáció.

A wavelet-analízist elsőként a szeizmológia és a geofizika terén alkalmazta Goupillaud, Grossmann és Morlet az 1980-as években (Goupillaud et al., 1984).

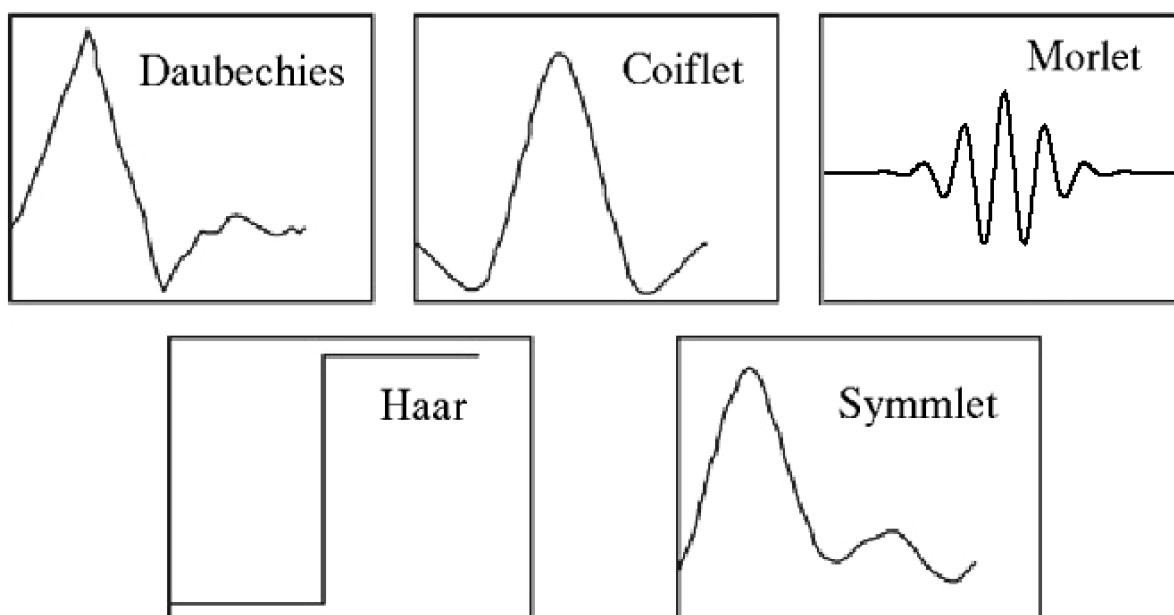
A fenti két eljárás közötti különbség az, hogy míg a Fourier-transzformáció bázisfüggvényei a $]-\infty, \infty[$ tartományon folytonosak és egyik részintervallumon sem azonosan nullák, addig a wavelet-transzformáció bázisfüggvényei olyan lokalizált függvények, melyek egy alap wavelet (kernel) eltolt és összenyomott változatai és az alap waveletre igaz a következő összefüggés:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (49)$$

ahol $\psi(t)$ a wavelet-függvény. A összefüggésből látszik, hogy a wavelet-függvény nullává válik a $]-\infty, \infty[$ intervallum határai felé közeledve, tehát csak egy részintervallumon különbözik nullától, azaz lokalizált.

A bázisfüggvények alapjául szolgáló analízáló waveletek (alap waveletek) nincsenek konkrétan megadva. A wavelet-transzformáció sokféle bázissal elvégezhető, ezek közül párat az 5. ábra mutat.

A transzformáció alapelve nagyon hasonlít a Fourier-transzformációéra. A transzformáció során a transzformálandó függvényt korreláljuk a bázisfüggvényekkel, így megkapjuk az adott bázisfüggvény irányába eső komponens nagyságát. Így a transzformáció eredménye egy kétvál-



5. ábra. Analizáló kernel függvények.

tozós függvény, amelynek egy általános alakja a következő:

$$W(f, \tau) = \sqrt{f} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) g * [h(t - \tau)] dt, \quad (50)$$

ahol f a frekvenciát, τ pedig az időeltolást jelenti. Itt $g * [h(t - \tau)]$ jelöli a transzformáció kernel függvényét, és a $*$ pedig a komplex konjugáltat.

Változócsillagok periódusvizsgálatánál leginkább a Morlet-kernelt használjuk, amelynek definíciója a következő:

$$g(x) = e^{-icx - \frac{x^2}{2}}, \quad (51)$$

ahol $x = f \cdot (t - \tau)$ és c skálafaktor az idő- és frekvencia-felbontást befolyásolja, ugyanis a Fourier-transzformációhoz hasonlóan az adatsort szakaszonként vizsgáljuk. Minél rövidebbek ezek az ablakszélességek, annál bizonytalanabb lesz a frekvenciák meghatározottsága, azaz csökken a frekvenciabeli felbontás. Szélesebb ablakok alkalmazása esetén a frekvenciák meghatározása pontosabb lesz, azaz a frekvenciabeli felbontás növekszik, de az időbeli felbontás csökken. Értelem-szerűen a szélesebb ablakokat hosszabb adatsorok elemzésére használjuk.

3.8.1. Diszkrét wavelet-transzformáció

A gyakorlatban érdemes bevezetni a Diszkrét Fourier-transzformációhoz hasonlóan a Diszkrét Wavelet Transzformációt (DWT), ekkor az amplitúdó spektruma (Szatmáry és Gál, 1992):

$$W(f, \tau) = [f \cdot C^2(f, \tau) + f \cdot S^2(f, \tau)]^{1/2}, \quad (52)$$

ahol

$$C(f, \tau) = \sum_{i=1}^n s(t_i) \cos[2\pi f(t - \tau)] e^{-\frac{1}{2}f^2(t_i - \tau)^2}, \quad (53)$$

és

$$S(f, \tau) = \sum_{i=1}^n s(t_i) \sin[2\pi f(t - \tau)] e^{-\frac{1}{2}f^2(t_i - \tau)^2}, \quad (54)$$

ahol n a mintavételezett pontok számát jelöli. Az ablakot τ értékkel toljuk el az adatsor elejétől a végéig, és minden eltolásra kiszámoljuk a frekvenciaspektrumot.

3.8.2. A wavelet-térkép

A 3. fejezetben tárgyaltuk, hogy a Fourier-spektrumot kétdimenziós grafikonon (amplitúdó-frekvencia vagy fázis-frekvencia) ábrázoljuk, ellenben a wavelet-transzformációval kapott frekvencia-idő-amplitúdó adathármaszt egy felületként ábrázoljuk, ezt wavelet-térképnek nevezzük. Az eredmények ábrázolásához három tengelyre van szükség. Itt kétféle lehetőségünk van az ábrázolásra: perspektivikusan színtvonalakkal, vagy az amplitúdó nagyságát különböző színekkel jelezve, mintha „felülről” látnánk. Ezzel azt szemléltetjük, hogy a különböző frekvenciájú (vagy periódusú) fényváltozások mikor és milyen amplitúdóval vannak jelen a fénygörbében. A térképek segítségével olyan jelenségeket is kimutathatunk (pl. modulációk, fázisugrás, módusváltás), amelyeket a hagyományos Fourier-analízissel nem.

4. Programok

4.1. Period04

A Fourier-analízist a Period04 nevű programmal végeztem el, amit Martin Sperl készített. A Period04 bővített verziója a Sperl által készített Period98-nak (Sperl, 1998) - egy szoftvercsomag, ami egy kifinomult *time-string* analízis számára készült. A program különösképpen a hosszú asztronómiai idősorokat tartalmazó függvények analízisével foglalkozik. A csillagászati alkalmazásokra készült program kombinált megvalósítása a Fourier-analízisnek és a nemlineáris többparaméteres függvényillesztésnek. A program 3 részből (modulból) tevődik össze:

- *time-string* modul
- megfeleltetés modul
- Fourier modul

A *time-string* modullal a felhasználó rögzítheti az adatokat. A modul tartalmaz olyan eszközöket, melyekkel az adathalmazok szétvághatók alhalmazokra és ezek az adathalmazok külön-külön kombinálhatóak egymással.

A megfeleltetés modul segítségével számos frekvencia legkisebb négyzetes illesztése készíthető el. A program tartalmaz még amplitúdó és/vagy fázis variációt. Ezeken felül számos eszköz elérhető a megfeleltetési paraméterek bizonytalanságainak számolásához, mint például a Monte-Carlo-szimuláció.

A Fourier modul segítségével kiszámíthatjuk a vizsgált jelek Fourier-spektrumát, illetve fehérítés segítségével meghatározhatjuk a többszörösen periodikus jelek frekvencia összetevőit és azok paramétereit (frekvencia, amplitúdó, fázis). A Fourier-analízis a Period04-ben a diszkrét Fourier-transzformációs algoritmuson alapul. Nem használ gyors Fourier-transzformációs algoritmust (FFT), mivel az idősorok általában nem egyenletesen mintavételezettek.

Néhány eszköz vagy funkció csak akkor elérhető, ha a program úgynevezett *Expert módban* üzemel. A Period04 minden adatot (Fourier-spektrum, frekvenciák, amplitúdók, stb.) egy központi fájlba ment. Maga a központi fájl platform független, ez biztosítja, hogy a felhasználó különböző operációs rendszerek között válogathasson.

A Period04 egy Java/C++ hibrid program, ingyen elérhető és Linux, Windows, illetve MacOSX alatt is használható.

4.2. WinWWZ

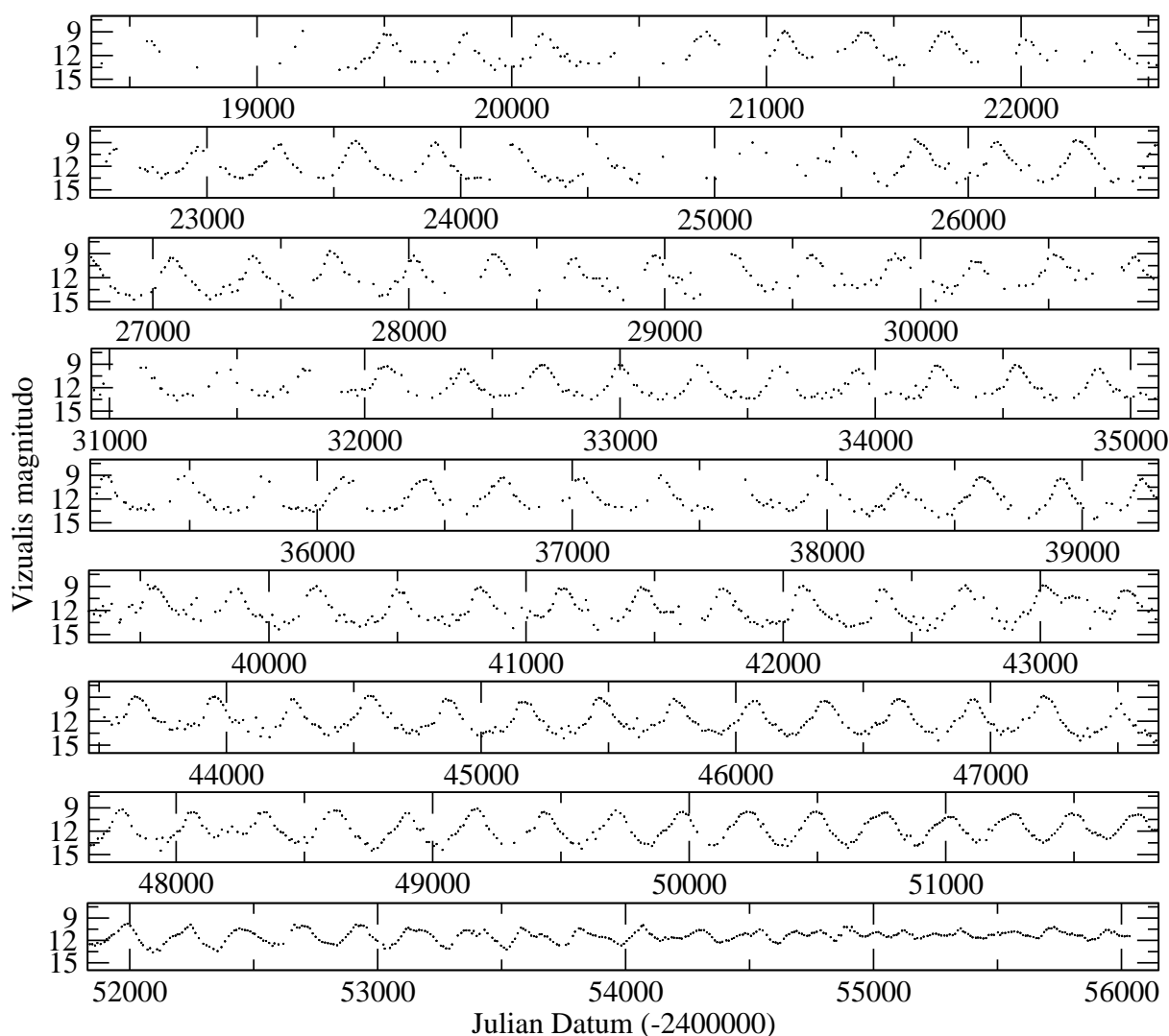
A Geir Klingenberg és Lisa Henkel által kifejlesztett WinWWZ egy Windows alapú program, amely a változócsillagok adatainak, vagy egyéb idősorok elemzésére szolgál. Úgy tervezték, hogy az AAVSO nemzetközi adatbázisaiból letölthető adatok elemzésére szolgáljon, de lehet használni a legáltalánosabb idősorok elemzésére is.

A program segítségével letölthetőek az adatsorok az AAVSO oldaláról, amiket azonnal megjelenít a program. Ezek a fénygörbék nagyíthatók és átlagolhatók tetszőleges időintervallumokra. A program a súlyozott wavelet-transzformáció egy speciális esetét használja (*Weighted Wavelet Z-Transform* - WWZ) használja, ami levezethető a diszkrét wavelet-transzformációból (Foster 1996). A wavelet-térképeket színes ábrákon jeleníti meg, amelyet *contour plot*-nak nevezünk. Nagy előnye, hogy az eredmények elmenthetők és exportálhatók szöveges fájllokba is.

5. Eredmények

5.1. A T Ursae Minoris

A T Ursae Minoris a Mira-típusú változócsillagok osztályába tartozik, körülbelül 300 napos periódussal. Gál és Szatmáry (1995) vizsgálata során meghatározta, hogy 25 év alatt a csillag periódusa 314,5 nappól 283,2 napra csökkent. Ezt a nagy periódusváltozást egy ismert csillag sem mutatta korábban.

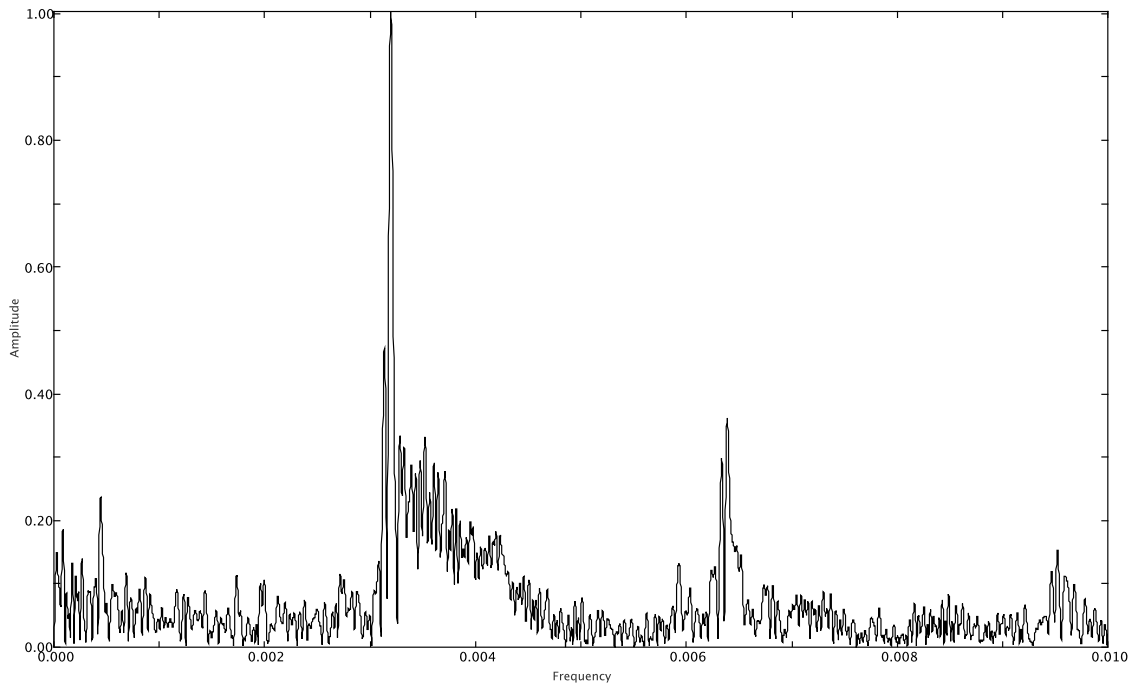


6. ábra. A T UMi fénygörbéje 10 napos átlagolással.

A változócsillag fényesség adatait az AAVSO honlapjáról töltöttem le. Az adatsort a Win-WWZ nevű program segítségével 10 napra átlagoltam, majd ábrázoltam. A csillag 10 napra átlagolt fénygörbéjén (6. ábra) jól látszik a kb. 300 napos pulzációs periódus. Az utolsó években

ténylegesen megfigyelhető, hogy a csillag pulzációja megváltozott. Az ábráról az is leolvasható, hogy a csillag pulzációs amplitúdója is megváltozott.

Az adatok Fourier-spektrumából (7. ábra) - melyet a Period04 nevű programmal végeztem - látszik a fő periódus, melynek adatait az 1. táblázat tartalmazza.



7. ábra. A T UMi Fourier-spektruma 10 napos átlagolással.

Észrevehető, hogy a fő 312,5 napos periódus mellett még fellépnek kisebb amplitúdójú rezgések is. Ezek közül a legjobban kiemelkedő csúcs kb. 160-170 napos pulzációt mutat. Az analízis elvégzése után a kisebb amplitúdójú rezgésre 156,25 nap adódott, ami épp a fele a fő periódusnak. Valószínűsíthető, hogy ez a fő periódus egy felharmonikusa.

| Frekvencia [1/nap] | Amplitúdó [m] | Fázis [rad] | Periódus [nap] |
|---------------------------|-----------------------------------|--------------------|-----------------------|
| 0.0032 | 1.14 | 0.276 | 312.5 |
| 0.0064 | 0.277 | 0.060 | 156.25 |

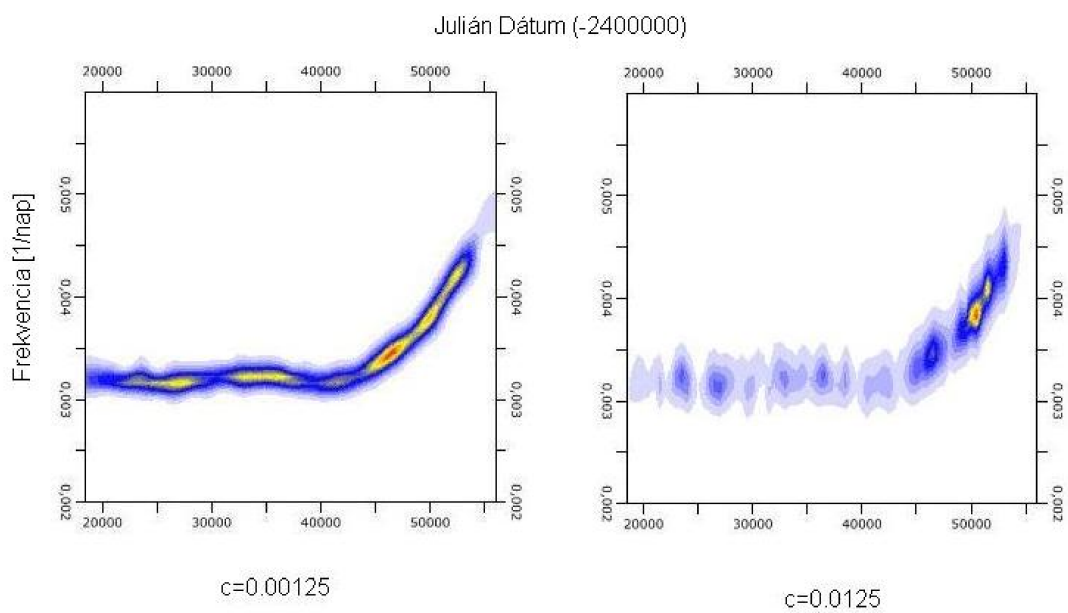
1. táblázat. A T UMi adatai.

A wavelet-térképen (8. ábra és 9. ábra) jól látható a pulzációs periódus megváltozása, azaz a frekvencia kb. $0,003 \text{ nap}^{-1}$ -ről kb. $0,0045 \text{ nap}^{-1}$ -re való növekedése. A wavelet-térkép segítségével ténylegesen megállapítható, hogy a változócsillag periódusa, azaz a frekvenciája időben

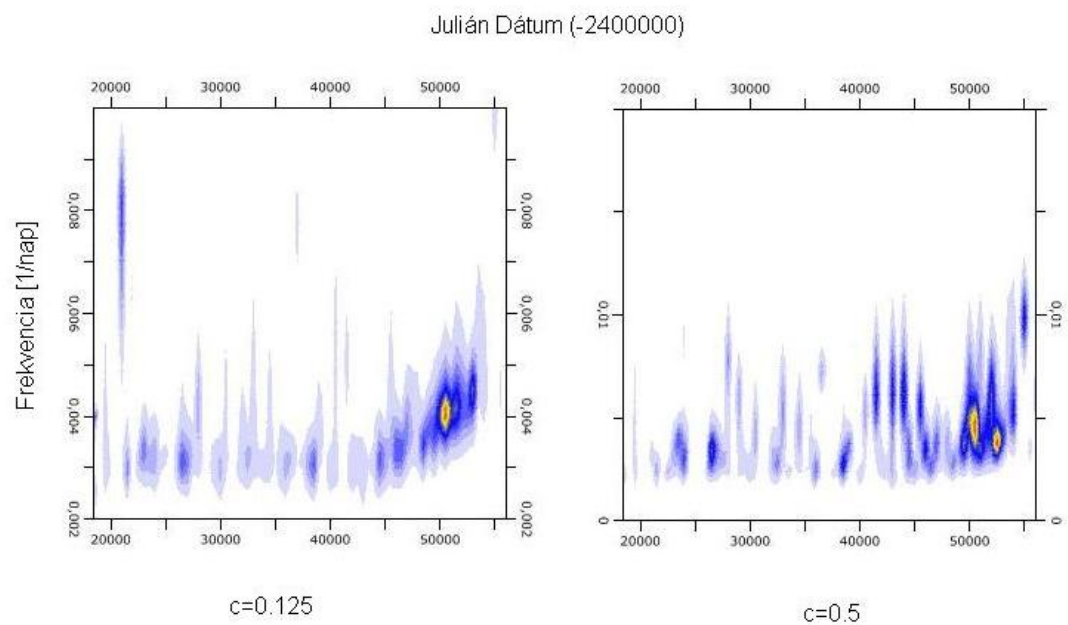
változik. A wavelet-analízist több c skálafaktor esetén is elvégeztem, hogy látható legyen mennyire befolyásolja az idő- és frekvenciafelbontást. A wavelet-analízis adatait a 2. táblázat tartalmazza. A táblázatban szereplő t_{min} érték a kezdő-, míg a t_{max} a végső időpontot jelöli Julián-dátumban. A τ érték a lépésköz az időtengelyen, úgy hogy a t_{min} -től indul és elmegy a t_{max} értékig. Az f_{min} és az f_{max} azok a frekvencia értékek, melyek között az analízis során a változócsillag frekvenciáját keressük, a Δf pedig a lépésköz. A c skálafaktor értéke befolyásolja az idő- és frekvenciafelbontást. Látszik, hogy c növelésével a frekvenciabeli felbontás (függőleges tengely) növekszik, de az időbeli felbontás (vízszintes tengely) csökken.

| | |
|--------------------|---------|
| t_{min} [nap] | 2418500 |
| t_{max} [nap] | 245600 |
| τ [nap] | 500 |
| f_{min} [1/nap] | 0.0025 |
| f_{max} [1/nap] | 0.0055 |
| Δf [1/nap] | 0.00002 |
| c_1 | 0.00125 |
| c_2 | 0.0125 |
| c_3 | 0.125 |
| c_4 | 0.5 |

2. táblázat. A wavelet-analízis adatai a T UMi esetén.

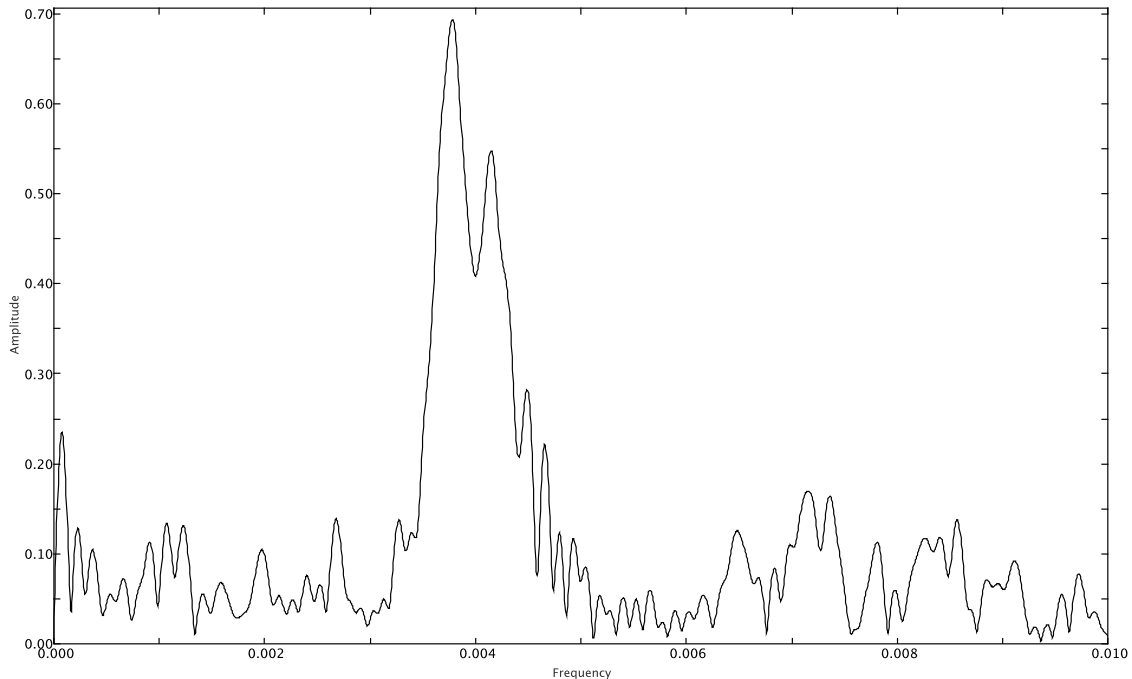


8. ábra. A T UMi wavelet-térképe.



9. ábra. A T UMi wavelet-térképe.

A változócsillag utóbbi évtizedekben történt periódus csökkenése miatt az utolsó 23 év fényesség adatain újra elvégeztem a Period04-gyel a Fourier analízist, melynek eredménye a 3. táblázatban és a 10. ábrán látható. A pulzációs frekvencia ténylegesen megváltozott 263 napra, és az amplitúdó is lecsökkent.



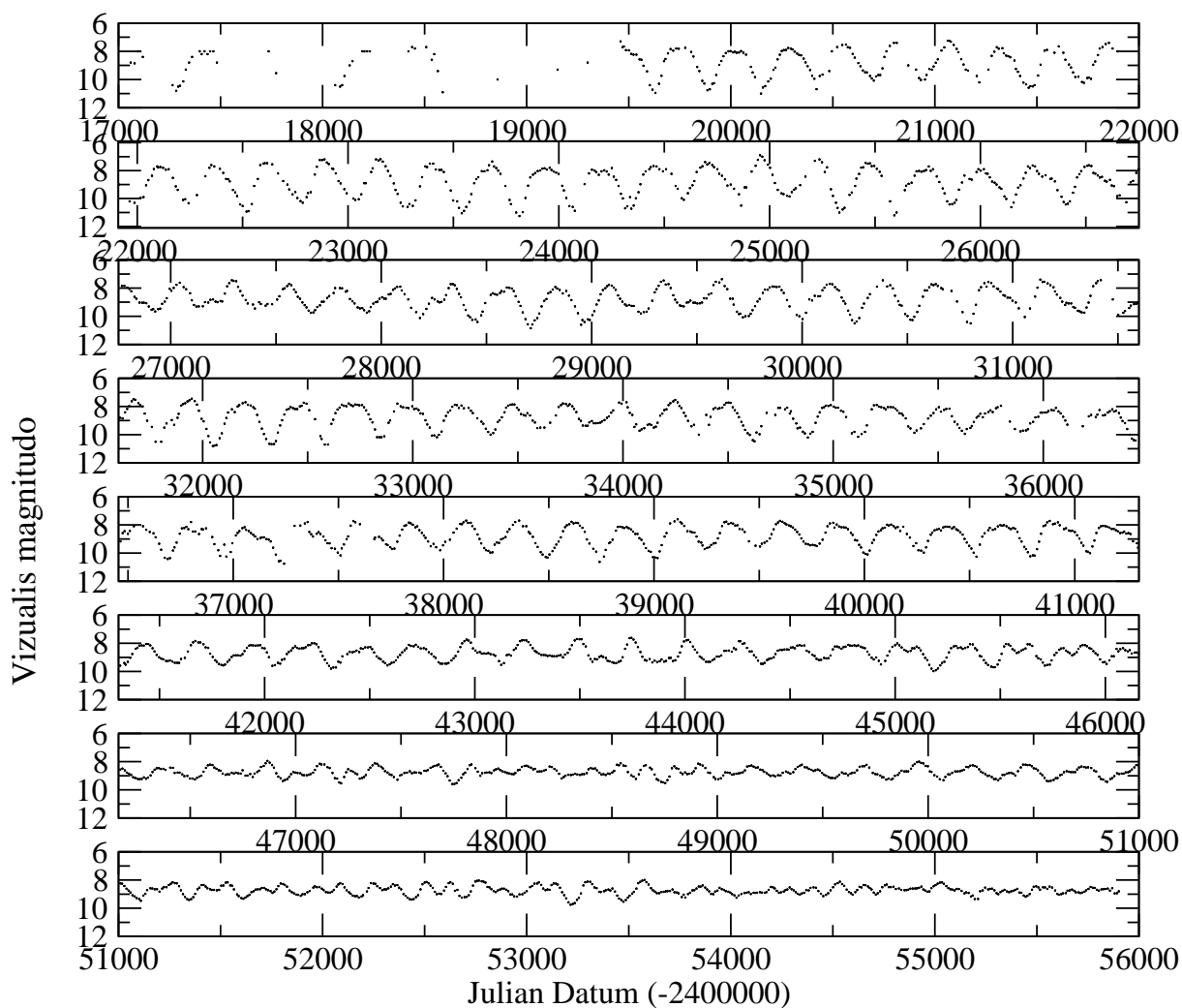
10. ábra. A T UMi Fourier-spektruma 10 napos átlagolással az utolsó 23 évre.

| Frekvencia [1/nap] | Amplitúdó [m] | Fázis [rad] | Periódus [nap] |
|---------------------------|-----------------------------------|--------------------|-----------------------|
| 0.0038 | 0.687 | 0.791 | 263.16 |

3. táblázat. A T UMi adatai az utolsó 23 évre.

5.2. A V Bootis

A V Bootis SRa típusú félszabályos változó csillagot, már korábban többen is elemezték, többek között Fritsová és munkatársai (1954) meghatározták a fő periódusát, amelyre azt kapták, hogy 248 és 264 nap között változik. A csillag fényessége 7 és 12 magnitúdó között ingadozik. Percy et al. (1990) az AAVSO adatsor analíziséből a fényváltozás teljes amplitúdójának 3 magnitúdóról 2-re való csökkenését mutatta ki. Emellett 258 napos periódust határozott meg. Az érdekesség az, hogy ez idő alatt az átlagfényesség és a periódus is állandó maradt a folyamat

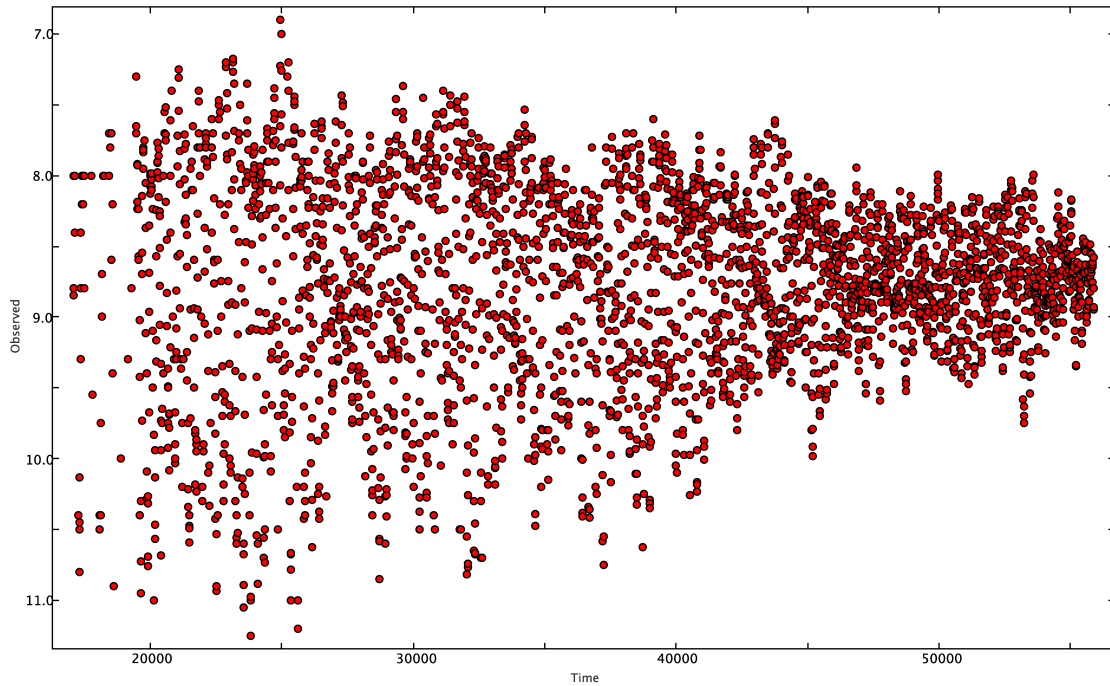


11. ábra. A V Bootis fénygörbéje 10 napos átlagolással.

során. A jelenségre már sokan próbáltak magyarázatot találni. Graves és Howarth (2000) a csillag körüli anyag jelenlétét okolták.

A V Bootis adatait is az AAVSO honlapjáról töltöttem le. Az adatsort a WinWWZ nevű program segítségével 10 napra átlagoltam, majd ábrázoltam. A csillag 10 napra átlagolt fénygörbéjén (11. ábra) látszik egy kb. 250 napos periódus. Az utolsó években ténylegesen megfigyelhető, hogy a csillag pulzációs amplitúdója lecsökkent (12. ábra).

A csillag adatainak Fourier-spektrumát elkészítettem, melyet a 13. ábra mutat. Az ábrán szembevetű a kb. $0,004 \text{ nap}^{-1}$ frekvenciához tartozó csúcs. Ennek a frekvenciának az adatait a 4.

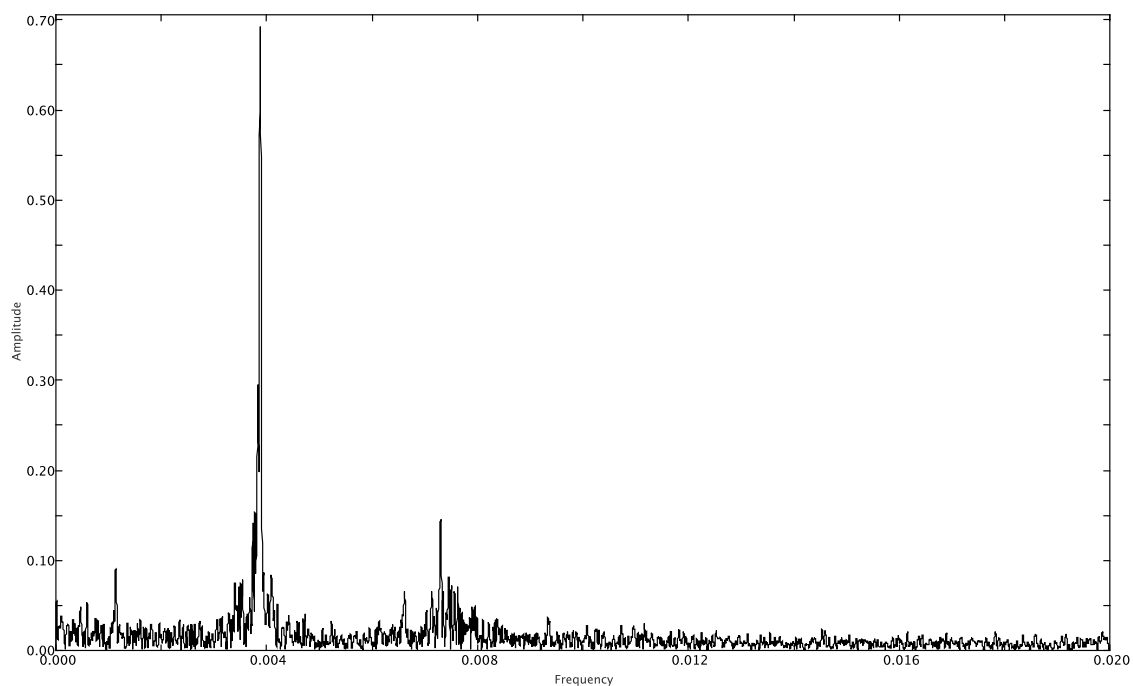


12. ábra. A V Bootis teljes fénygörbéje.

táblázatban foglaltam össze.

| Frekvencia [1/nap] | Amplitúdó [m] | Fázis [rad] | Periódus [nap] |
|---------------------------|-----------------------------------|--------------------|-----------------------|
| 0.00388 | 0.778 | 0.969 | 257.73 |

4. táblázat. A V Bootis adatai.

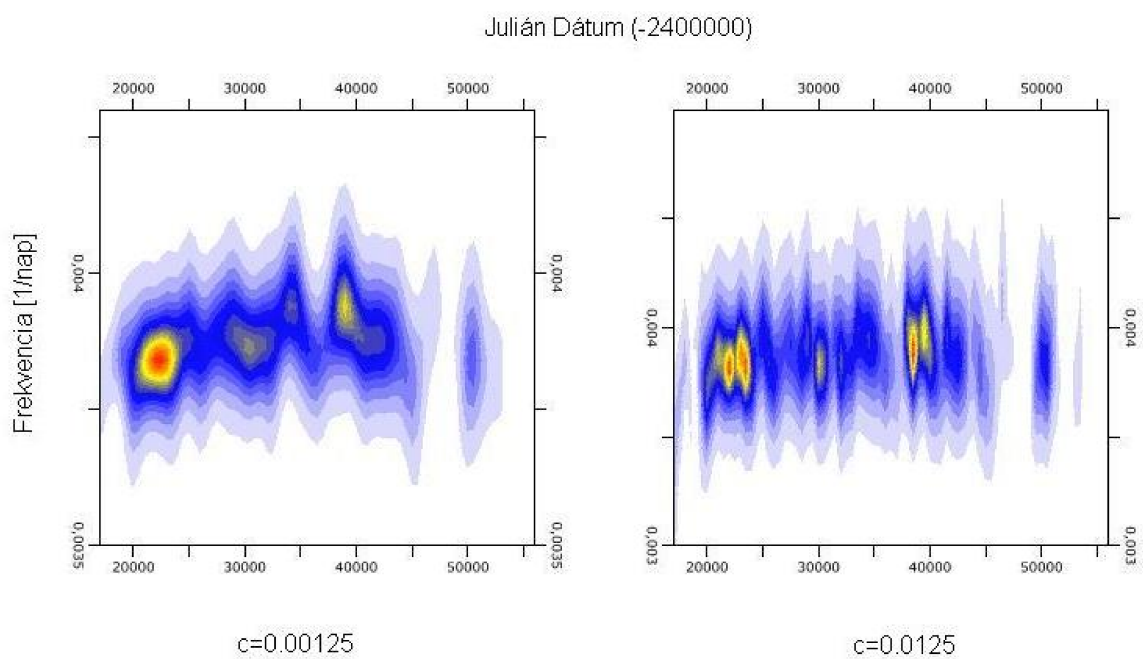


13. ábra. A V Bootis Fourier-spektruma 10 napos átlagolással.

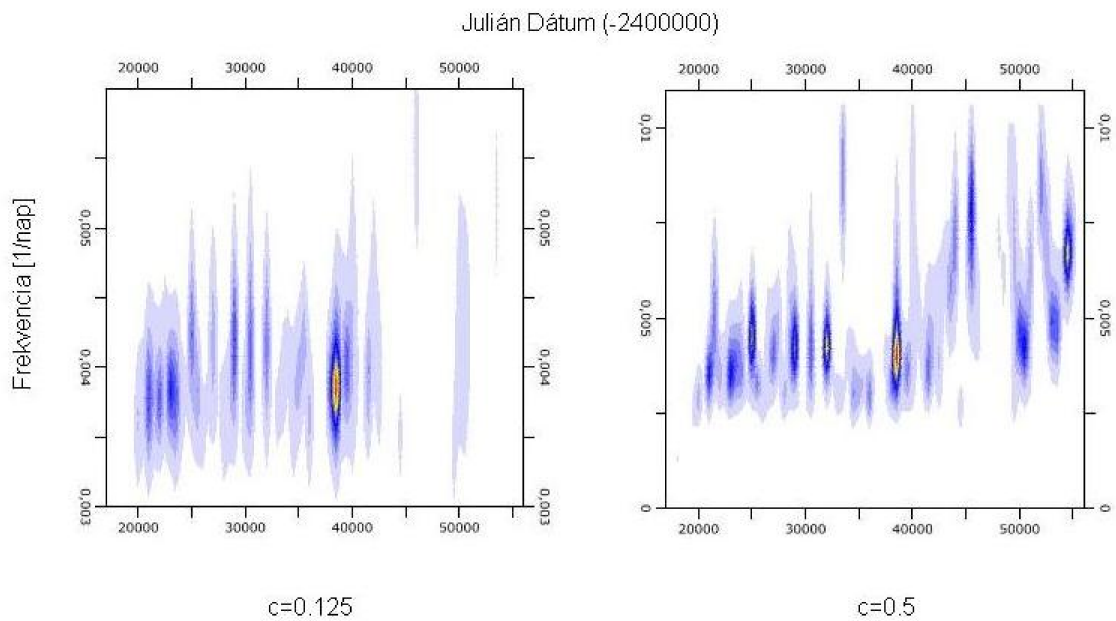
Az általam készített-wavelet térképeket a 14. ábra és a 15. ábra tartalmazza. A wavelet-térkép segítségével jelen esetben az amplitúdó változása nem igazán látható, azaz nem lehet biztosan kimutatni. A wavelet-analízist több c skálafaktor esetén is elvégeztem, így látható mennyire befolyásolja az idő- és frekvenciafelbontást. A wavelet-analízis adatait és konstansait az 5. táblázat tartalmazza. A táblázatban szereplő mennyiségeket az előző változócillag tárgyalása során kifejtettem és az alábbi esetben is ezt használom. A $c=0,125$ -es vagy annál nagyobb értéknél már az analízis használhatatlan, az időbeli felbontás nagyon lecsökkent.

| | |
|--------------------|---------|
| t_{min} [nap] | 2417000 |
| t_{max} [nap] | 2456000 |
| τ [nap] | 500 |
| f_{min} [1/nap] | 0.0035 |
| f_{max} [1/nap] | 0.01 |
| Δf [1/nap] | 0.00002 |
| c_1 | 0.00125 |
| c_2 | 0.0125 |
| c_3 | 0.125 |
| c_4 | 0.5 |

5. táblázat. A wavelet-analízis adatai a V Boo esetében.

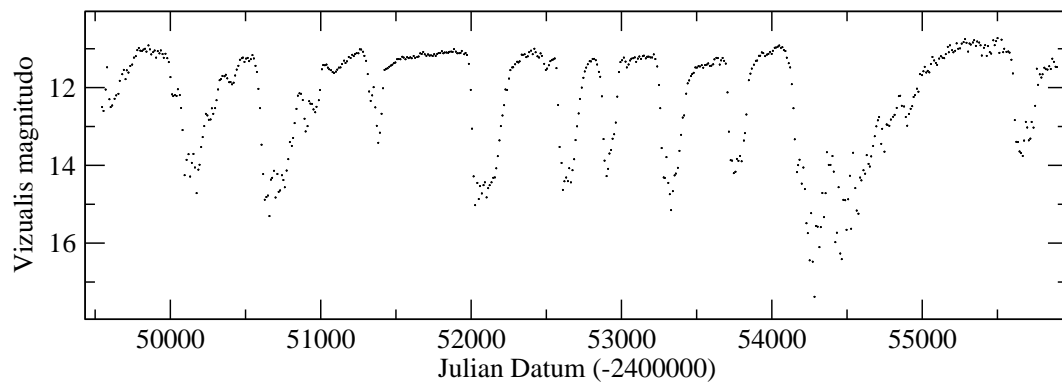


14. ábra. A V Bootis wavelet-térképe.



15. ábra. A V Bootis wavelet-térképe.

5.3. A Z Ursae Minoris

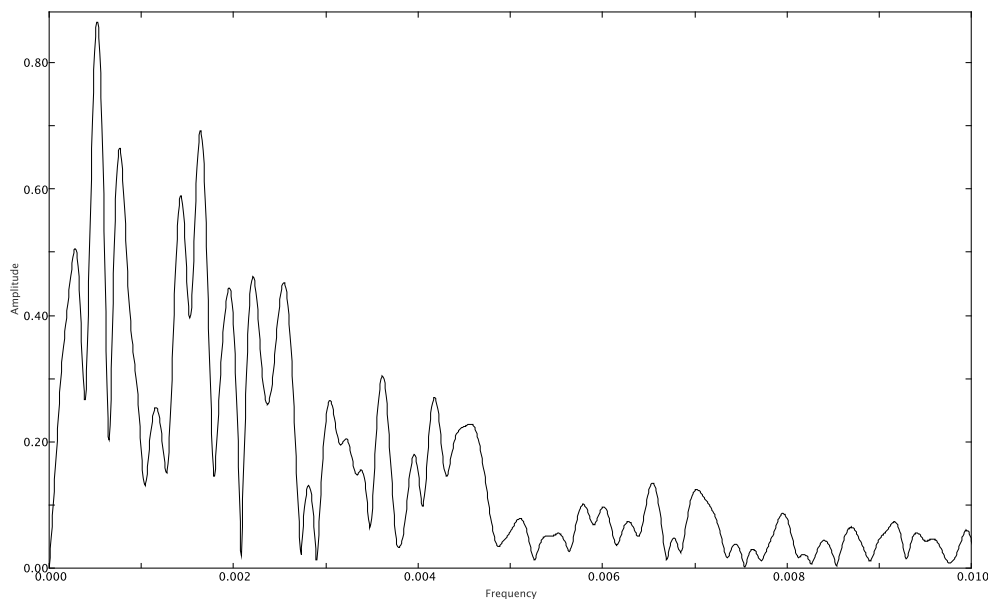


16. ábra. A Z Ursae Minoris fénygörbéje 10 napos átlagolással.

A Z Ursae Minoris Benson et al. (1994) szerint az R Coronae Borealis (RCB) változócsillaghoz hasonló fényváltozást mutat. A csillag fényváltozását először Beljawsky (1934) jegyezte le. Kholopov és munkatársai (1993) szerint a Z UMi egy Mira típusú változócsillag, melynek egyik periódusa több mint 400 napos. Benson és munkatársai (1994) megvizsgálták a csillagot és

megállapították, hogy a csillag a fotometriai és spektroszkópai vizsgálatok alapján az RCB változócsillagok osztályába tartozik.

A csillag fényesség adatainak letöltése után elkészítettem az átlagolást 10 napra. Az átlagolás utáni fénygörbe a 16. ábrán látható. A Z Ursae Minoris fénygörbéjére tekintve látható egy vagy több periodikusan visszatérő folyamatos fényesség csökkenés, ami valószínűleg nem pulzáció eredménye. Ezután a Period04 program segítségével elkészítettem a Z Ursae Minoris változócsillag Fourier-spektrumát, amely a 17. ábrán látható. A Fourier-analízis során talált adatokat a 6. táblázat tartalmazza. A két legnagyobb amplitúdójú fényváltozás periódusideje 1923 és 395 nap.

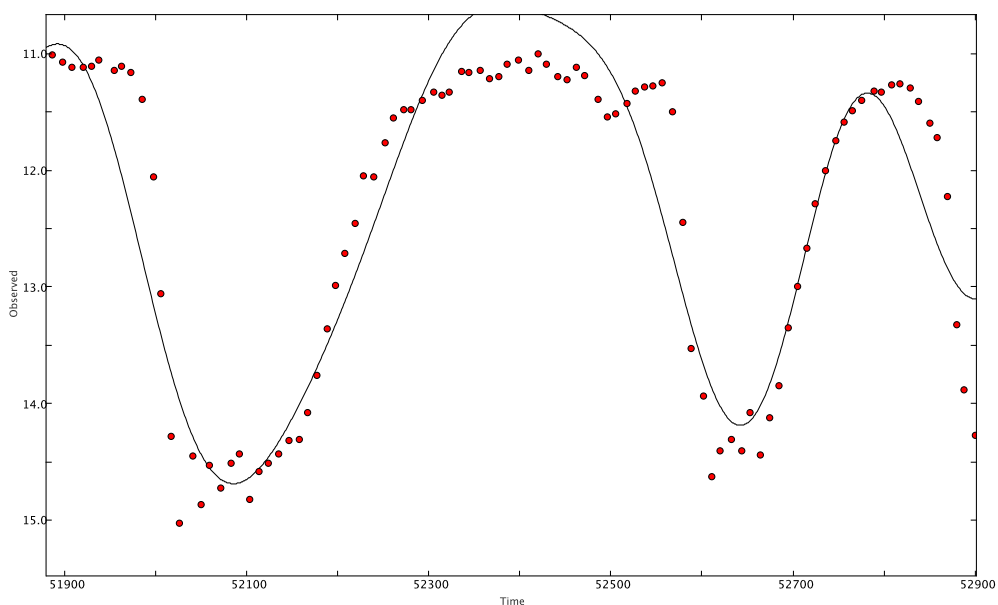


17. ábra. A Z Ursae Minoris Fourier-spektruma 10 napos átlagolással.

| Frekvencia [1/nap] | Amplitúdó [m] | Fázis [rad] | Periódus [nap] |
|--------------------|-------------------|-------------|----------------|
| 0.00052 | 0.765 | 0.955 | 1923.07 |
| 0.00165 | 0.712 | 0.641 | 606.06 |
| 0.00146 | 0.547 | 0.882 | 684.9 |
| 0.00253 | 0.559 | 0.952 | 395.26 |
| 0.00193 | 0.501 | 0.562 | 518.14 |

6. táblázat. A Z Ursae Minoris adatai.

A táblázat tartalmazta adatok alapján generált szinusz függvény illesztése az adatsorra a 18. ábrán látható. A görbe elég jól megközelíti az adatpontokat.



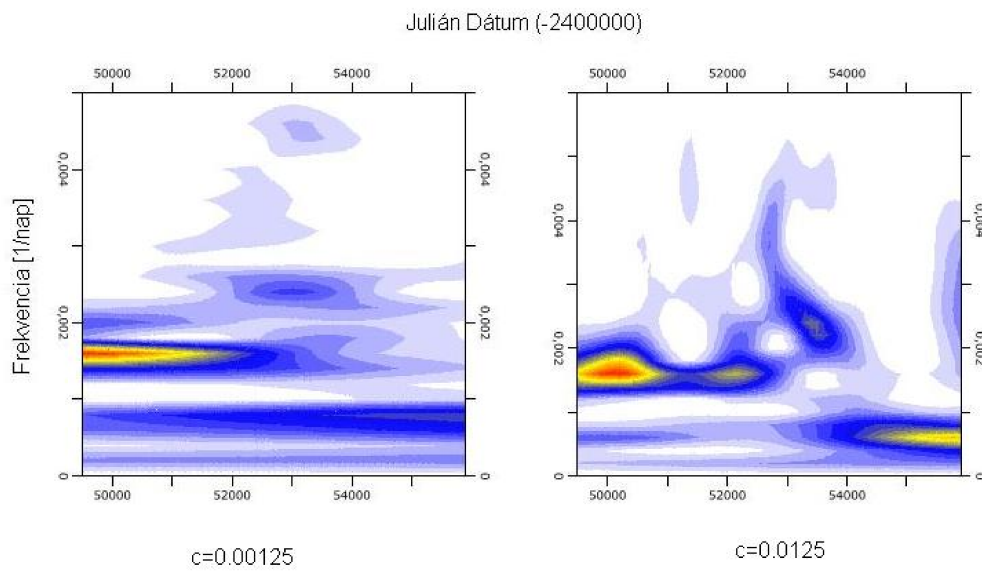
18. ábra. A Z Ursae Minoris fénygörbéjére illesztett függvény 10 napos átlagolással.

A wavelet-térképeken (19-20. ábra) látható két erősebb amplitúdójú fényváltozás. Ez a két fényváltozás kb. $0,0016 \text{ nap}^{-1}$ (kb. 620 nap) és kb. $0,0006 \text{ nap}^{-1}$ (kb. 1650 nap).

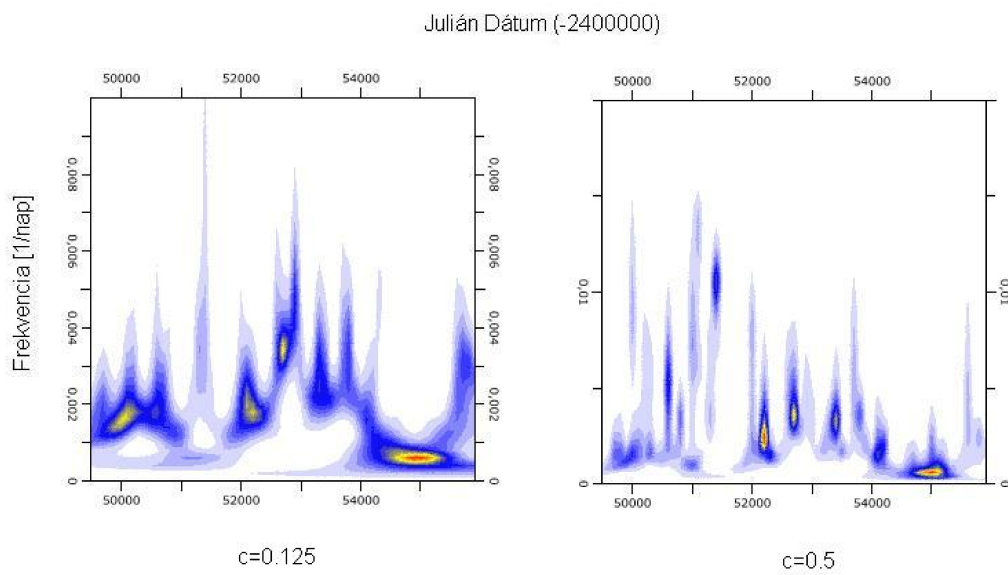
A wavelet-analízis adatait és konstansait a 7. táblázat tartalmazza. A c skálafaktor értéke befolyásolja az idő- és frekvenciafelbontást.

| | |
|--------------------|---------|
| t_{min} [nap] | 2449500 |
| t_{max} [nap] | 2455900 |
| τ [nap] | 100 |
| f_{min} [1/nap] | 0 |
| f_{max} [1/nap] | 0.0051 |
| Δf [1/nap] | 0.0002 |
| c_1 | 0.00125 |
| c_2 | 0.0125 |
| c_3 | 0.125 |
| c_4 | 0.5 |

7. táblázat. A wavelet-analízis adatai a Z UMi esetében.



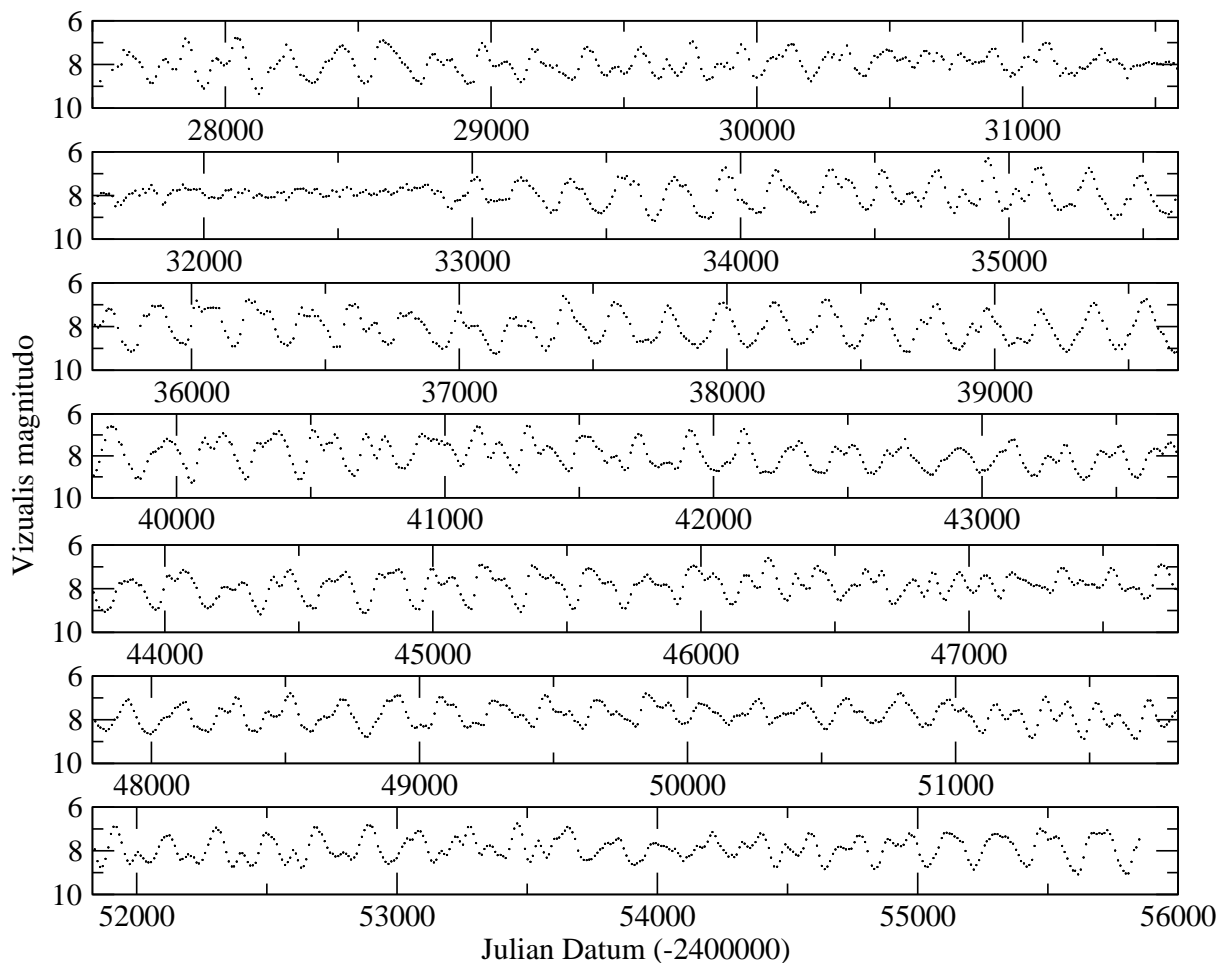
19. ábra. A Z Ursae Minoris wavelet-térképe.



20. ábra. A Z Ursae Minoris wavelet-térképe.

5.4. A Z Ursae Maioris

Az SRb típusú Z Ursae Maioris változócsillagot korábban már sokan vizsgálták. Fényváltozását King fedezte fel 1897 és 1904 között. Loreta (1940) arra az eredményre jutott, hogy a fő



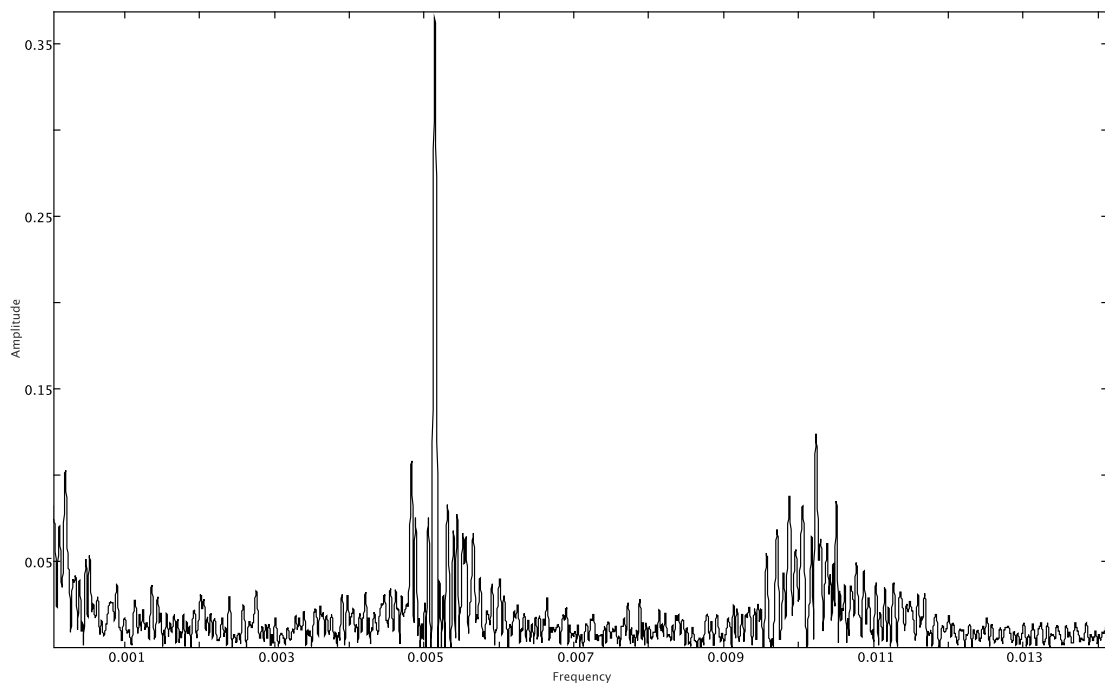
21. ábra. A Z Ursae Maioris fénygörbéje 10 napos átlagolással.

periódus hossza 198,3 nap. Suchko (1980) az AAVSO-ról letöltött adatokat elemezve azt kapta, hogy a csillagnak alapvetően két rezgési periódusa van: a rövidebbnek 195, a hosszabbiknak 205 nap a periódusideje. Szerinte ennek a két periódusnak az együttes hatása okozhat lebegési jelenséget.

Később többen is kimutatták, hogy a csillag multiperiodicitása a gerjesztett módusok egyidejű pulzációjának az eredménye. (Isles (1998), Percy és Polano (1998), Kiss és társai (1999)). Szerintük a csillag az alaplómódban és a felharmonikusokban egyszerre oszcillál.

A GCVS (1985) szerint ciklusonként két maximum és két minimum figyelhető meg, a periódus 195,5 nap.

A Z Ursae Maioris egy félszabályos változócsillag. Az AAVSO oldaláról letöltött adatokat 10 napra átlagoltam, majd ábrázoltam. A fénygörbére (21. ábra) tekintve látható egy pulzáció szabályossága, amelynek kb. 200 napos periódusa lehet. Néhány helyen látható egy másik pulzáció eredménye, amely mellékminimumokat, illetve maximumokat hoz létre.



22. ábra. A Z Ursae Maioris Fourier-spektruma 10 napos átlagolással.

A Fourier-analízis elvégzése után jól látható a spektrumban két erős csúcs (22. ábra). A rövidebb periódus, mely 97,75 napnak adódott és amplitúdója 0.139 magnitúdó. A nagyobb, 0,368 magnitúdós amplitúdójú csúcs pulzációs periódusa is hosszabb (8. táblázat). Szembetűnik még egy csúcs csoport az ábrán, ez kb. 5000 napos periódusnál van. A hosszabb periódus mintha kicsit lötyögne, ingadozna egy átlagérték körül.

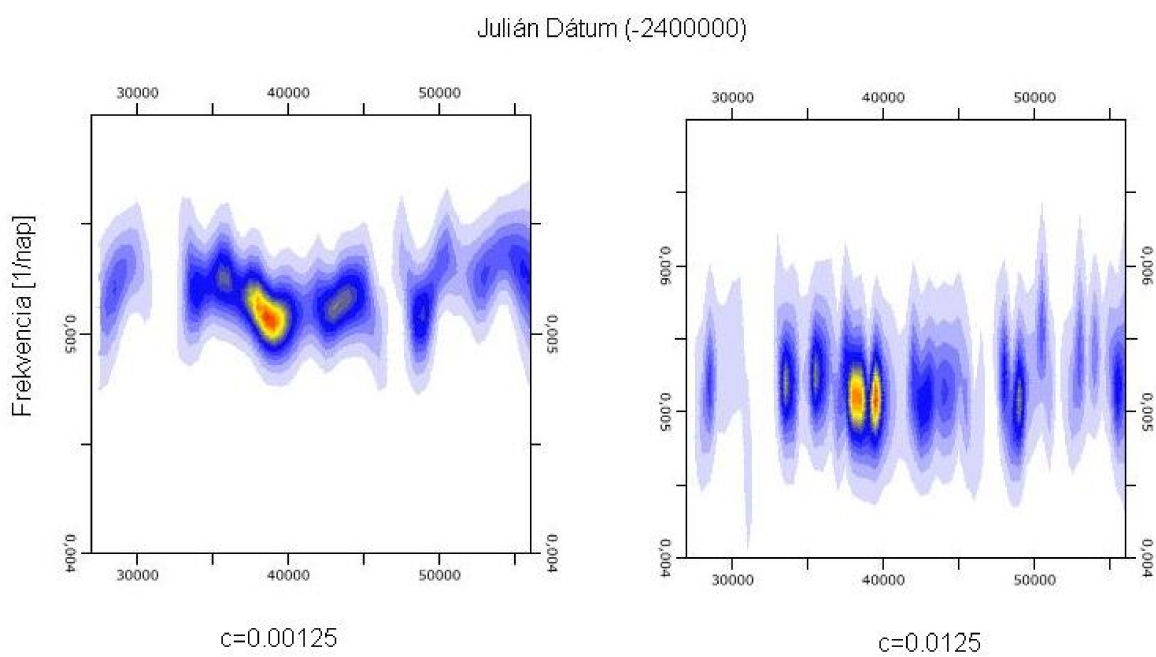
| Frekvencia [1/nap] | Amplitúdó [m] | Fázis [rad] | Periódus [nap] |
|---------------------------|-----------------------------------|--------------------|-----------------------|
| 0.00514 | 0.368 | 0.726 | 194.5 |
| 0.01023 | 0.139 | 0.495 | 97.75 |

8. táblázat. A Z Ursae Maioris adatai.

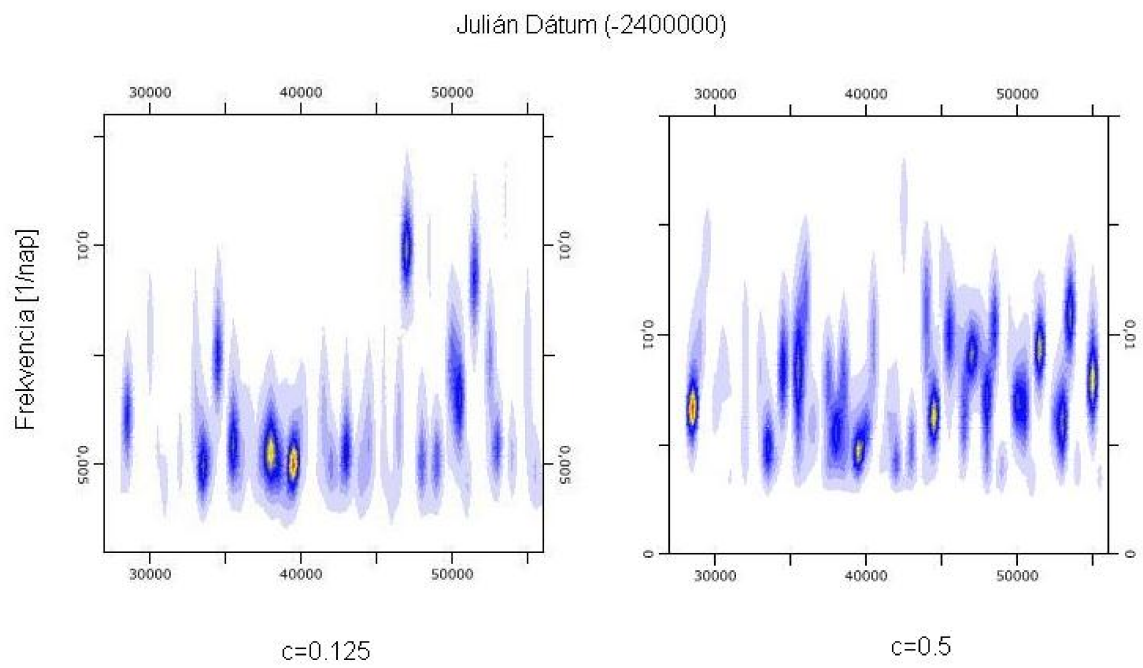
Az általam készített wavelet-térképeken (23-24. ábra), különösen a $c=0,00125$ konstans esetén látható a kb. a $0,005 \text{ nap}^{-1}$ frekvenciánál a pulzáció időbeli, azaz frekvenciabeli lötyögése.

| | |
|--------------------|---------|
| t_{min} [nap] | 2427500 |
| t_{max} [nap] | 2456000 |
| τ [nap] | 500 |
| f_{min} [1/nap] | 0 |
| f_{max} [1/nap] | 0.02 |
| Δf [1/nap] | 0.00002 |
| c_1 | 0.00125 |
| c_2 | 0.0125 |
| c_3 | 0.125 |
| c_4 | 0.5 |

9. táblázat. A wavelet-analízis adatai a Z UMa esetén.



23. ábra. A Z Ursae Maioris wavelet-térképe.



24. ábra. A Z Ursae Maioris wavelet-térképe.

6. Összefoglalás

A dolgozatomban rövid leírást adtam a fénygörbe analízishez használt módszerekről. Ezek a módszerek közül kettőt, a Fourier-analízist és a wavelet-transzformációt részletesebben is ismertettem. A wavelet-transzformációnál próbáltam kitérni arra, hogy az ablakszélesség mennyire befolyásolja az idő- és frekvenciafelbontást. E két alkalmazás napjainkban egyre szélesebb körben terjed a csillagászatban.

A Fourier-analízist és a wavelet-transzformációt én is elvégeztem az általam kiválasztott négy csillag esetén. A csillagok fényesség adatait az AAVSO nemzetközi adatbázisból töltöttem le. Ezek a csillagok közül egy (T UMi) mutatott csak egyszeres periódust, a másik 3 esetén a többszörös periodicitás a valószínű. A T UMi csillagnál a periódusidő az utóbbi évek során erősen lecsökkent, amely a wavelet-transzformáció segítségével jól ki is mutatható. A V Bootis csillag esetén is bekövetkezett változás, de itt nem a pulzáció periódusideje, hanem az amplitúdója csökkent le. Ebben az esetben a wavelet-térképeken a változás nem annyira látványos, mint a periódusidő változása esetén. A Z Ursae Minoris változócsillagot az RCB-k osztályába sorolják, melynek során a Fourier-analízis az általam észrevettek alapján már kevésbé használható, nem úgy mint a Benson és munkatársai (1994) által elvégzett fotometriai és spektroszkópiai vizsgálatok. A Z UMa SRb típusú változócsillag többszörös periodicitást mutat, melyet a Fourier-analízis ki is mutatott. Az analízis viszont tényleg nem képes kimutatni a frekvencia időbeli változását, ahogy a Z UMa esetében is történt. Ezen módszerek nagyon sokat fejlődtek az elmúlt évtizedekben. De a zaj, a mintavételezett jelekből származó hibák és az adatsorban fellépő űrök még mindig nagy mértékben befolyásolják a mérési eredményekből levonható következtetéseket. Természetesen ezek a hibák a megfelelő műveletek, eljárások segítségével már nagy mértékben csökkenthetők. Ezeket a módszereket manapság már széles körben alkalmazzák más területeken is.

7. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar egyetemi adjunktusának, Dr. Székely Péternek a szakmai konzultációs lehetőségekért.

Köszönettel tartozom még az Amerikai Változócsillag-észlelők Társaságának (AAVSO), amiért elérhetővé tették számomra adataikat, valamint a WinWWZ nevű programot. Továbbá köszönettel tartozom Martin Sperl-nek a Period04 nevű program elkészítéséért és a Bécsi Egyetemnek a program elérhetőségéért.

8. Irodalomjegyzék

1. Kiss L., Sárnecky K., 2006, Nagybolygóból törpebolygó, Meteor 2002/2
2. Tusnády Gábor-Ziermann Margit, 1986, Idősorok analízise, Műszaki Könyvkiadó
3. Kiss L., 2002, Meteor 2002/2
4. Szatmáry K., Kiss L.L., Bebesi Zs., 2003, The He-shell flash in action: T Ursae Minoris revisited, Astron. Astrophys. 398, 277-282
5. Shannon C.E., 1949, Communication Theory of Secrecy Systems, Bell Syst. Techn. J., 28, 656-715.
6. Hesselmann N., 1985, Digitális jelfeldolgozás, Műszaki, Bp.
7. P. Lenz, M. Breger, 2005, Period04 User Guide
8. Goupillaud P., Grossman A., Morlet J., 1984, Cycle-Octave and Related Transforms in Seismic Signal Analysis, Geoexploration, 23, 85-102
9. Foster G., 1996, Wavelets for Period Analysis of Unevenly Sampled Time Series, Astron. J., 112, 1709
10. Bebesi Zsófia, 2003, Pulzáló vörös óriáscsillagok fényváltozásának idő-frekvencia analízise, diplomamunka
11. Szatmáry Károly, 1994, Változócsillagok periódus-analízise az idő és a frekvencia tartományban, kandidátusi értekezés
12. Lafler J., Kinman T.D., 1965, An RR Lyrae survey with the Lick 20-inch astrograph. II. The calculation of RR Lyrae periods by electronic computer, Astrophysical Journal Suppl. 11, 216
13. Stellingwerf R.F., 1978, Period determination using phase dispersion minimization, Astrophysical Journal 224, 953
14. Az AAVSO története: <http://www.aavso.org/history-aavso>
15. Az AAVSO adatbázis: <http://www.aavso.org/data/download/>
16. A Period04 program forrása: <http://www.univie.ac.at/tops/Period04/>
17. A WinWWZ története: <http://www.aavso.org/winwwz>
18. A WinWWZ program forrása: <http://www.aavso.org/data/software/winwwz.html>

Nyilatkozat

Alulírott Tóth Zoltán Fizika BSc szakos hallgató (ETR azonosító: TOZOABT.SZE) a „Változócsillagok fénygörbe analízise” című szakdolgozat szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, a hivatkozások és idézések általános szabályait betartottam és a mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Dátum: 2012. május 18.

Aláírás