

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Elméleti Fizikai Tanszék

Diplomamunka

**A fekete lyuk kettős rendszerek spin-dominált,
illetve effektív egy test közelítéseiben
származtatott dinamikáinak és gravitációs
hullámformáinak összehasonlítása**

Tarjányi Tamás

II. éves fizikus MSc hallgató

Témavezető: Dr. Keresztes Zoltán, egyetemi adjunktus, PhD,
SZTE TTIK Elméleti Fizikai Tanszék

Konzulens: Tápai Márton, predoktor, SZTE TTIK Kísérleti
Fizikai Tanszék

Szeged

2017

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Gravitációs hullámok elméleti háttere	4
2.1. Általános relativitáselmélet	4
2.2. Gravitációs hullámok gyenge-tér közelítésben	5
2.3. Általános megoldás	7
2.4. Detektálás	8
3. Posztnewtoni (PN) formalizmus	12
4. Spin-dominált hullámforma	14
5. Spines effektív egytest gravitációs hullámforma	16
6. Gravitációs hullámforma polarizációk összehasonlítása illesztett szűréssel	19
7. Gravitációs hullámformák időfejlesztéséhez használt evolúciós egyenletek összehasonlítása	26
8. Összegzés	32
9. Köszönetnyilvánítás	33
A. Python szkript	34
B. AWK szkript	37

1. fejezet

Bevezetés

Az általános relativitáselmélet a téridőt az anyag által kialakított geometriai görbületként értelmezi, ennek függését az anyagtól az Einstein-egyenletek írják le. A gravitációs hullám a téridő görbületén keletkezett kis zavar hullámszerű terjedése. Az elmélet szerint akkor keletkeznek gravitációs hullámok, ha egy rendszer kvadrupólmomentumának első és második időderiváltja sem nulla. A fekete lyukak és neutroncsillagok által alkotott kompakt kettősök ilyen rendszerek. Közvetett bizonyítékot a létezésükre a Hulse-Taylor kettős pulzár rendszer vizsgálata során találtak először. A keringésük során a periódusváltozás igen nagy pontossággal illett az elmélet jóslta görbére. Ezért a munkáért 1993-ban Nobel díjat kapott Russel Hulse és Joseph Taylor [1]. Azóta több kettősre is igazolták a megfigyelésüket.

A LIGO nemzetközi tudományos kollaboráció azért jött létre, hogy gravitációs hullámokat mérjenek [2]. A fejlesztett Advanced LIGO nevű detektor 2015-ben készült el [3]. A LIGO berendezések nagy pontosságú Michelson-interferométerek, melyek alkalmasak a beérkező gravitációs hullámok kimutatására 10^{-18} hosszváltozás esetén is, mely 3 nagyságrenddel kisebb a protonnál. A modellek által jóslott hullámokat az illesztett szűrés („matched filtering”) eljárással hasonlítják össze a zajos adatokkal. 2015 szeptemberben sikerült közvetlen mérésekkel igazolnia a LIGO-nak a gravitációs hullámok létezését [4]. A becslések szerint 410_{-180}^{+160} megaparszekre volt a forrás, amely egy összeolvadó kompakt kettős fekete lyuk rendszer. A kisebbik tömege $29_{-4}^{+4} M_{\odot}$ a nagyobbik $36_{-4}^{+5} M_{\odot}$, az összeolvadás után az össztömeg $62_{-4}^{+4} M_{\odot}$, azaz $3_{-0.5}^{+0.5} M_{\odot}$ tömegnyi energia szabadult fel.

A jövőre vonatkozóan az a terv, hogy az űrbe telepítenek ki egy rendszert, amelynek

5 millió kilométeres karhosszai lennének, ez a LISA. Az indítására kitűzött dátum 2034. Ez lehetővé tenné nagyobb tömegű fekete lyuk kettősök bespirálózása által keltett gravitációs hullámok detektálását, valamint a zajt is csökkentené [5]. Az alsó mérhető frekvencia határa az Advanced LIGO-nak 10 Hz, míg LISA-nak 10^{-5} Hz.

A kompakt kettősök összeolvadása három fázisra osztható: bespirálózás, összeolvadás és lecsengés. A bespirálózás analitikusan tárgyalható, melyre posztnewtoni sorfejtést alkalmaznak. Az összeolvadás numerikus módszerekkel tárgyalható. A lecsengés során a két fekete lyuk már egybeolvadt és egy perturbált fekete lyukként lehet kezelni. Ezt a fázist is lehet analitikusan kezelni, melynek megoldása, hogy csillapodó gravitációs hullámot bocsát ki a rendszer [6].

Munkám során a bespirálózást leíró két modellt hasonlítottam össze Python-ban írt szkripteket futtatva. Mindkettő spines fekete lyuk kettősöket ír le, ezek a „spin-dominated waveform” (SDW) és „spinning effective one body-numerical relativity” (SEOBNR). Mindkét modell kihasználja, hogy a teljes impulzusmomentum (a pálya-impulzusmomentum és spinek összege) iránya állandó. Az SDW egyrészt posztnewtoni, valamint a pálya-impulzusnyomaték és a domináns spin hányadosa szerinti sorfejtést is felhasznál. Az SEOBNR Hamiltoni-formalizmust használ az úgynevezett kváziszférikus sorfejtésben. A két modell által jósolt hullámok egyezését vizsgáltam össztömeg és tömegarány változtatásával különböző spinekre és pálya-impulzusmomentumokra. Az összehasonlításokból látszó különbség oka az lehet, hogy a megállási feltételek különbözőek a két modellben, valamint a SEOBNR bizonyos kis tömegarányú korrekciókat nem tartalmaz.

2. fejezet

Gravitációs hullámok elméleti háttere

2.1. Általános relativitáselmélet

Az anyag által kialakított geometriai görbületet az Einstein-egyenletek írják le. A geometria kifejezhető a g_{ab} metrikus tenzorral, amely mennyiség a gravitációs potenciállal áll kapcsolatban. Az ívelemnégyszet és az infinitezimális vektorok között teremt kapcsolatot a következőképpen:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b , \quad (2.1)$$

ahol az ismétlődő alsó és felső indexek összegzést jelentenek. Ezek az indexek 0-tól futnak 3-ig, a 0 index jelenti az idő részt és 1,2,3 a tér részt. A Christoffel-szimbólumok a metrikus tenzorral és deriváltjaival így írhatók fel:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) . \quad (2.2)$$

A differenciálható sokaságokon értelmezett mennyiségek geometriáját leírja a Riemann tenzor, az előzőekkel a következő kapcsolatban áll:

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{db}^a - \partial_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e , \quad (2.3)$$

ahol $\partial_c = \frac{\partial}{\partial x^c}$ deriválást jelenti. Ebből származtatható a Ricci tenzor, amely a spúrja a Riemann tenzornak:

$$R_{acb}^c = R_{ab} , \quad (2.4)$$

a Ricci skalár pedig:

$$R = R_a^a . \quad (2.5)$$

Az indexek mozgatását a következőképpen lehet megvalósítani:

$$V^a = g^{ab}V_b , \quad (2.6)$$

ahol g^{ab} az alsó indexes metrikus tenzor inverze, és az alsó indexes V_b mennyiség pedig egy egy-forma. Ezen geometriai mennyiségekkel írhatók le az Einstein-egyenletek, amelyek azt mondják meg, hogy az anyag milyen geometriát alakít ki:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = -8\pi T_{ab} . \quad (2.7)$$

T_{ab} az energia-impulzus tenzor, amely az anyagra jellemző mennyiségekből áll és G_{ab} az Einstein tenzor. Az Einstein-egyenletek 10 független differenciálegyenletből épülnek fel. A megoldása szimmetria feltevésekkel és közelítéseket felhasználva lehetséges.

2.2. Gravitációs hullámok gyenge-tér közelítésben

A számolások során $c = G = 1$ a mértékegység, valamint a (+,-,-,-) szignatúrát használom. A gravitációs hullámokat gyenge-tér közelítésben a sík Minkowski metrikára ráakódott kis pertrubációként kezelik, ez a következőt jelenti:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} . \quad (2.8)$$

Az abszolút értéke a perturbációnak kicsi, azaz $|h_{ab}| \ll 1$ és a deriváltjai $|\partial_c h_{ab}| \ll 1$. A Minkowski metrika deriváltjai nullák, azaz a $\partial_c \eta_{ab} = 0$. Az ebből számolt Christoffel-szimbólumot csak lineáris rendig számoljuk:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}\eta^{ad} (\partial_b h_{cd} + \partial_c h_{bd} - \partial_d h_{bc}) . \quad (2.9)$$

Ekkor a metrikából számolt Riemann tenzor:

$$R_{bcd}^a = \frac{1}{2} (\partial_c \partial_b h_d^a - \partial_c \partial^a h_{bd} - \partial_d \partial_b h_c^a + \partial_d \partial^a h_{bc}) . \quad (2.10)$$

A spúrját számolva megkapjuk a Ricci tenzort:

$$R_{ab} = R_{acb}^c = \frac{1}{2} (\partial_b \partial_a h + \square^2 h_{ab} - \partial_c \partial_a h_b^c - \partial_b \partial^c h_{ac}) , \quad (2.11)$$

ahol $h = h_a h^a$ és \square d'Alambert operátor a következőt jelenti:

$$\square = \partial^a \partial_a = g^{ab} \partial_b \partial_a . \quad (2.12)$$

Az ebből adódó Ricci skalár:

$$R = \square^2 h - \partial_a \partial_b h^{ab} . \quad (2.13)$$

Ezekből felírható az Einstein-egyenlet:

$$\partial_b \partial_a h + \square^2 h_{ab} - \partial_b \partial_e h_a^e - \partial_e \partial_a h_b^e - \eta_{ab} (\square^2 h - \partial_e \partial_i h^{ei}) = -8\pi T_{ab} . \quad (2.14)$$

Bevezetjük az úgy nevezett nyom megfordított mennyiséget, amely a h_{ab} -ra a következő:

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} h . \quad (2.15)$$

Ennek a következő tulajdonságait használjuk ki a számolások során: $\bar{h} = -h$ és $h_{ab} = \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \bar{h}$. Ekkor az Einstein egyenletek így fognak kinézni:

$$\square^2 \bar{h}_{ab} + \eta_{ab} \partial_e \partial_i \bar{h}^{ei} - \partial_b \partial_e \bar{h}_a^e - \partial_a \partial_e \bar{h}_b^e = -8\pi T_{ab} . \quad (2.16)$$

Megszabjuk a harmonikus mértéktranszformációt, amely ezt jelenti:

$$h'_{ab} = h_{ab} - \partial_a \xi_b - \partial_b \xi_a , \quad (2.17)$$

itt ξ^a tetszőleges függvények, mely koordinátatranszformációk miatt jönnek be. Az alábbiak szerint fog \bar{h}^{ab} transzformálódni:

$$\bar{h}'^{ab} = h'^{ab} - \frac{1}{2} \eta^{ab} h' = \bar{h}^{ab} - \partial^a \xi^b - \partial^b \xi^a + \eta^{ab} \partial_c \xi^c . \quad (2.18)$$

\bar{h}'^{ab} deriváltját a következőképpen lehet felírni:

$$\partial_b \bar{h}'^{ab} = \partial_b h'^{ab} - \square^2 \xi^a , \quad (2.19)$$

és úgy választjuk a $\xi^a(x)$ függvényeket, hogy teljesüljön a harmonikus mértékfeltétel:

$$\partial_b \bar{h}^{ab} = 0 . \quad (2.20)$$

Ekkor azt kapjuk az Einstein-egyenletre a harmonikus mértékfeltétel kirovásával, hogy:

$$\square^2 \bar{h}_{ab} = -16\pi T_{ab} . \quad (2.21)$$

Vákuum esetén T_{ab} energia-impulzus tenzor 0 és ezt kapjuk:

$$\square^2 \bar{h}_{ab} = 0 . \quad (2.22)$$

erre a hullámeqyenletre a k6vetkező alakban keressük a (síkhullám) megoldást:

$$\bar{h}^{ab} = A^{ab} \exp(ik_c x^c) . \quad (2.23)$$

Visszahelyettesítve ez a megoldás kielégíti a hullámeqyenletet. Az amplitúdónak komplex része is van, valódi fizikai megoldást viszont csak a valós rész tartalmaz, ezért kell venni annak ezt a részét. Alkalmazva a harmonikus mérték feltételt a megoldásra azt kapjuk, hogy:

$$\square^2 \bar{h}^{ab} = \eta^{cd} k_c k_d \bar{h}^{ab} = 0 . \quad (2.24)$$

Ez a következőt jelenti:

$$\eta^{cd} k_c k_d = k^c k_c = 0 , \quad (2.25)$$

az előzőekből ez tehető fel:

$$A^{ab} k_b = 0 . \quad (2.26)$$

Kihasználva azt, hogy az A^{ab} amplitúdó tenzor szimmetrikus a két indexére, 10 független komponense lesz. A harmonikus mérték transzformáció után 6 lesz független. Majd megfelelően választva $\xi^a(x)$ -eket, hogy azok kielégítsék $\square^2 \xi^a = 0$, utána már csak két független mennyiség marad. Ez lesz a két polarizációs állapot és majd ezek összegéből áll össze az összes lehetséges állapot. Az $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ komponenseket együttesen egy a és b mennyiségekkel lehet jellemezni a következőképpen:

$$A_{TT}^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.27)$$

2.3. Általános megoldás

Az általános megoldás során T_{ab} energia-impulzus tenzor nem nulla. A (2.21) egyenletre keressük a megoldást. Ez az elektrodinamikából ismert eljáráshoz hasonlóan tehető meg. A következő Green függvényt vezetjük be:

$$\square_x^2 G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta(x^\sigma - y^\sigma) . \quad (2.28)$$

Majd ennek a Green függvénynek a tulajdonságait kihasználva a linearizált Einstein-egyenletben szereplő \bar{h}^{ab} -re a következő összefüggést kapjuk:

$$\bar{h}^{ab}(ct, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{ab}(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} . \quad (2.29)$$

Erre az összefüggésre fel lehet írni a multipólus sorfejtést:

$$\bar{h}^{ab}(ct, \mathbf{x}) = -\frac{4G}{c^4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} M^{abi_1 \dots i_l}(ct_r) \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \left(\frac{1}{r} \right) , \quad (2.30)$$

itt a multipól momentumok a következő tagok lesznek:

$$M^{abi_1 \dots i_l}(ct) = \int T^{ab}(ct, \mathbf{y}) y^{i_1} y^{i_2} \dots y^{i_l} d^3\mathbf{y} . \quad (2.31)$$

Az energia-impulzus tenzorból kifejezhetünk egy úgynevezett kvadrupól momentum tenzort, amely a forrásra jellemző:

$$I^{ab}(ct) = \int T^{00}(ct, \mathbf{y}) y^a y^b d^3\mathbf{y} , \quad (2.32)$$

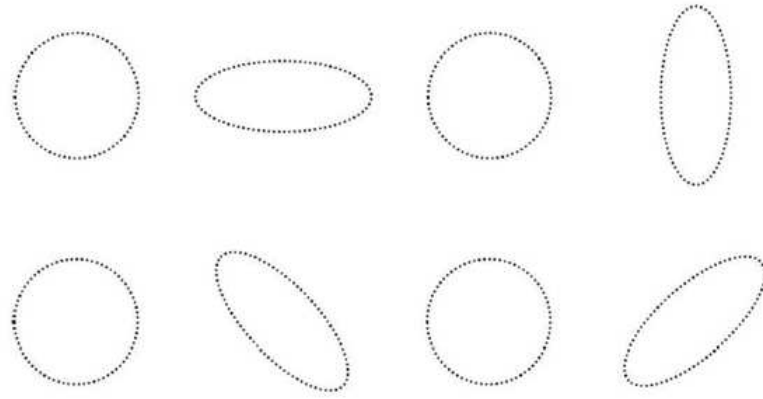
ekkor a gravitációs hullámot letudjuk írni a kvadrupól formulával:

$$\bar{h}^{ab}(ct, \mathbf{x}) = -\frac{2G}{c^6 r} \left[\frac{d^2 I^{ab}(ct')}{dt'^2} \right]_r . \quad (2.33)$$

Ezen alfejezetkhez Hobson könyvét használtam fel [7].

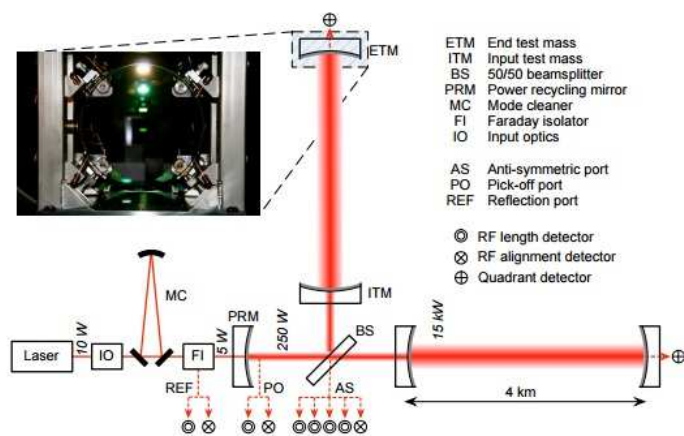
2.4. Detektálás

A gravitációs hullámok megváltoztatják a relatív távolságot két általunk kijelölt objektum között. Ezt úgy szokás illusztrálni, hogy kör alakba rendezett tömegpárokat helyezünk el az x-y síkba és rájuk merőlegesen a z tengely irányából érkeznek a gravitációs hullámok. Ekkor a kör alak eltorzul ellipszissé, attól függően milyen fázisában éri a hullám őket és melyik polarizáció:



2.1. ábra. A két polarizáció hatásának szemléltetése merőlegesen beérkező gravitációs hullámok hatására a körben elhelyezett tömeg pontsorra.

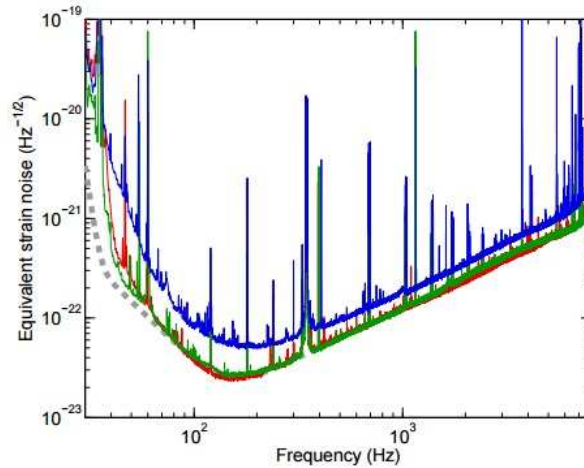
A lézeres interferometria detektálási módszer a fenti jelenség alapján működik. A karokban a lézerfény megtesz egy utat és ha gravitációs hullámok érik megváltozik a karhossz. A megváltozott karhossz változtat a felfogott interferenciaképen és ha a képet állandóan akarjuk tartani, akkor változtatni kell a karhosszt, ezt mérik. Ezekből a mért adatokból szűrjük ki a gravitációs hullámokat. A mért adatsorok nagyon zajosak és különböző algoritmusokat dolgoztak ki szűrésükre. A hullám időbeli lefutását a $h(t)$ függvény írja le, amely az antenna függvények és a polarizációk lineáris kombinációjából áll össze [8].



2.2. ábra. Michelson detektor ábrája, ez az ábra a LIGO cikkéből származik [2].

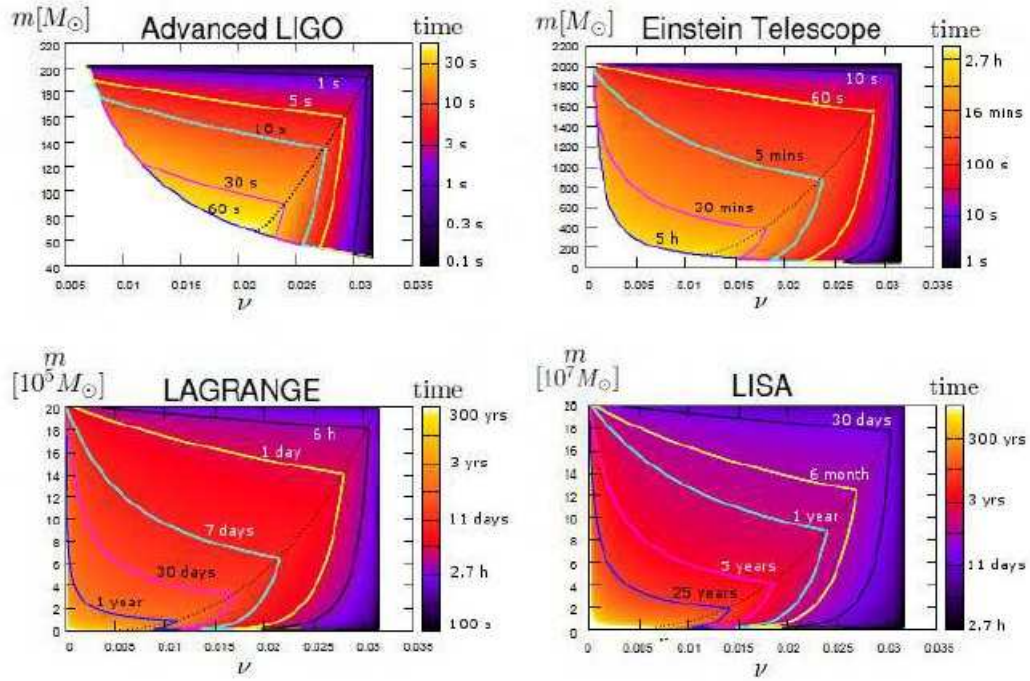
A LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) egy olyan létesítmény, amelyet azért hoztak létre, hogy lézeres interferométerrel gravitációs hullámokat megfi-

gyelhessenek [2]. Michelson interferométereket használnak kiegészítve Fabry-Perot karokkal. A karok 4 km hosszúak, amikben vákuumrendszert alakítottak ki. A karokban 75-ször verődik vissza a fény, amely az effektív hosszat növeli és ez felerősíti a jelenséget. Hasonló detektor az Olaszországban található Virgo is [9]. A detektorok érzékenyek a különböző külső zajokra. Az Advanced LIGO program keretében a külső zajszűrés javult [3].



2.3. ábra. Az Advanced LIGO mérési tartománya a frekvencia függvényében. Az ábra az Advanced LIGO cikkéből származik [3].

A jövőben telepítendő harmadik generációs Einstein teleszkóp alsó frekvencia tartománya 1 Hz [10], ami azt jelenti, hogy a maximális mérhető kettősök össztömege $2020 M_{\odot}$. A tömegarányt beállítva úgy, hogy a kisebbik objektum tömege a neutron csillag legyen, a legkisebb mérhető tömegarány $\nu_{\min} \approx 7 \times 10^{-4}$. A világűrbe tervezik telepíteni a Lagrange teleszkópot [11] és a LISA űrszondát [5]. Ezek nagy össztömegű fekete lyukak összeolvadása során keletkező gravitációs hullámokat is tudnának észlelni. A Lagrange teleszkóp alsó mérési frekvencia határa 10^{-3} Hz, míg a LISA-nak 10^{-5} Hz, a mérhető maximális össztömeg az előbbire $2 \times 10^6 M_{\odot}$, utóbbira $2 \times 10^8 M_{\odot}$. A tömegarányok $\nu_{\min} \approx 7 \times 10^{-7}$ a Lagrange-ra, a LISA-ra $\nu_{\min} \approx 7 \times 10^{-9}$. Ezek a számolások az SDW cikkéből származnak [13].



2.4. ábra. Az Advanced LIGO, Einstein teleszkóp, Lagrange teleszkóp és a LISA űrtávcső mérési tartományai különböző össztömegekre és tömegarányokra. Ez az ábra az SDW cikkből származik [13].

A LIGO 2015-ben detektált két gravitációs hullámot [4][12]. Mindkét forrás összeolvadó kompakt kettős fekete lyuk rendszer volt. A becslések szerint az első 410_{-180}^{+160} megaparszekre volt, a kisebbik tömegű fekete lyuk tömege $29_{-4}^{+4} M_{\odot}$, a nagyobbik $36_{-4}^{+5} M_{\odot}$, az összeolvadás után az össztömeg $62_{-4}^{+4} M_{\odot}$, azaz $3_{-0.5}^{+0.5} M_{\odot}$ tömegnyi energia szabadult fel. A második 440_{-190}^{+180} megaparszek-re volt, a kisebbik tömege $7.5_{-2.3}^{+2.3} M_{\odot}$ a nagyobbik $14.2_{-3.7}^{+8.3} M_{\odot}$, az összeolvadás után az össztömeg $20.8_{-1.7}^{+6.1} M_{\odot}$. Mindkét mérés szignifikanciája nagyobb volt mint 5σ .

3. fejezet

Posztnewtoni (PN) formalizmus

A PN sorfejtés azt jelenti, hogy az $\varepsilon \approx \frac{Gm}{c^2 r} \approx \frac{v^2}{c^2} \ll 1$ kis paraméter szerint sorfejtjük a mozgásegyenletet. Itt m a két fekete lyuk össztömege, G a gravitációs állandó, r a fekete lyukak szeparációja, c a fénysebesség és v a szeparáció deriváltja. A poszt-newtoni közelítés $\varepsilon \approx 0, 1$ -ig érvényes [14]. A mozgásegyenletek így a következők lesznek:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = - (m\mathbf{x}/r^3) [1 + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}) + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^{5/2}) + \dots] , \quad (3.1)$$

itt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ és $r = |\mathbf{x}|$, x_i pedig a koordináták. A pályamenti szeparáció időben nem változik, tehát $\dot{r} = 0$, a pálya-impulzusmomentum precesszál, ezt hívják körpálya közelítésnek. Ekkor a gravitációs hullámforma ez lesz Kidder [8] cikke alapján:

$$h^{ij} = \frac{2}{D} [Q^{ij} \{1 + O(\varepsilon^{1/2}) + O(\varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}) + \dots\}]_{TT} , \quad (3.2)$$

ahol D a távolság a forrás és a megfigyelő között és a TT a transzverzális nyommentesítést jelenti. A különböző rendekben megjelennek a spin és pálya kölcsönhatásai-
ból származó elkülöníthető tagok, melyek így fognak kinézni:

$$Q^{ij} = 2 \left[v^i v^j - \frac{m}{r} n^i n^j \right] , \quad (3.3)$$

$$P^{0.5} Q^{ij} = \frac{\delta m}{m} \left\{ 3 \frac{m}{r} [2n^{(i} v^{j)} - \dot{r} n^i n^j] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \left[\frac{m}{r} n^i n^j - 2v^i v^j \right] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) \right\} , \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
PQ^{ij} &= \frac{1}{3} \left\{ (1 - 3\eta) 4 \frac{m}{r} [3\dot{r}n^i n^j - 8n^{(i} v^{j)}] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) + 2 \left[3v^i v^j - \frac{m}{r} n^i n^j \right] \right. \\
&\quad \times (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v})^2 + \frac{m}{r} \left[(3v^2 - 15\dot{r}^2 + 7\frac{m}{r}) n^i n^j + 30\dot{r}n^{(i} v^{j)} - 14v^i v^j \right] (\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \left. \right\} \\
&\quad + \frac{4m}{3r} \dot{r} (5 + 3\eta) n^{(i} v^{j)} + \left[(1 - 3\eta) v^2 - \frac{2}{3} (2 - 3\eta) \frac{m}{r} \right] v^i v^j \\
&\quad + \frac{m}{r} \left[(1 - 3\eta) \dot{r}^2 - \frac{1}{3} (10 + 3\eta) v^2 + \frac{29m}{3r} \right] n^i n^j , \tag{3.6}
\end{aligned}$$

$$PQ_{SO}^{ij} = \frac{2}{r^2} (\boldsymbol{\Delta} \times \hat{\mathbf{N}})^{(i} n^{j)} . \tag{3.7}$$

Itt a kövekező mennyiségek lettek bevezetve: $\delta m = m_1 - m_2$, $\hat{\mathbf{n}} = x/r$, $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, $\boldsymbol{\Delta} = m(\mathbf{S}_2/m_2 - \mathbf{S}_1/m_1)$, $\hat{\mathbf{N}}$ a kettős tömegközéppontjától a megfigyelő felé mutató egységvektor és $\eta = \mu/m = \nu/(1 + \nu)^2$. A posztnewtoni rendekben megjelenik a spin-pálya korrekció, ezek mellett 2 PN rendnél a spin-spin kölcsönhatás, valamint a spin-pálya kölcsönhatásnak egy korrekciója adódik hozzá. Az egyes fekete lyukak spinje a következő:

$$\mathbf{S}_i = \frac{G}{c} \chi_i m_i^2 \hat{\mathbf{s}}_i , \tag{3.8}$$

ahol $\chi_i \in [0, 1]$, dimenziómentes paraméter. Kis tömegarány esetén a nagyobb tömegű fekete lyuk spinje válik dominánsá. A folyamat alatt a teljes impulzusmomentum állandó azaz $\dot{\mathbf{J}} = 0$, ez a pálya impulzusmomentumból és a poszt-newtoni korrekcióiból valamint a spinekből tevődik össze:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_{PN} + \mathbf{L}_{SO} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 . \tag{3.9}$$

4. fejezet

Spin-dominált hullámforma

Megfelelően kis tömegarány esetén a második spin elhanyagolható, valamint a bespirálózás végére a nagyobb tömegű fekete lyuk spinje lesz domináns, míg a pálya-impulzusmomentum mellette elhanyagolható. A Spin-dominált hullámforma (SDW) [13] egyrészt ε posztnewtoni, valamint a pálya-impulzusnyomaték és a domináns spin hányadosa szerinti sorfejtést is felhasznál, ez a következőképpen írható fel:

$$\xi = \varepsilon^{-1/2} \nu, \quad (4.1)$$

ahol ν a tömegarány. A spinek aránya a következő:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\chi_2}{\chi_1} \nu^2. \quad (4.2)$$

A második spin vezető tagjai 2PN rendben jelentkeznek, ezért gyorsan forgó kompakt kettősökre, kis tömegarányok esetén a második spin elhanyagolható lesz. A spin és a newtoni pálya-impulzusmomentum aránya a következő:

$$\frac{S_1}{L_N} \approx \varepsilon^{1/2} \nu^{-1} \chi_1. \quad (4.3)$$

S_1 -nek domináns szerepe lesz a bespirálózás utolsó szakaszaiban kis tömegarányokra $\nu < 0,1$. Továbbá $\xi \leq \xi_1 = 0,1$ feltételből az adódik, hogy $\varepsilon_1 = Gm/c^2 r_1 = 100\nu^2$. A posztnewtoni formalizmus [18] cikk alapján $\varepsilon_2 = 0,1$ -ig érvényes, ekkor a 3.5 rendű PN járulék összemérhető lenne a 2.5 járulékkal és összeomlik a formalizmus. Kepler harmadik törvényét felírva meg lehet becsülni az össztömeget körpálya közelítésre, a gravitációs hullámok f frekvenciáját ismerve PN paraméterrel:

$$m = \frac{c^3}{\pi G} \varepsilon^{3/2} f^{-1}. \quad (4.4)$$

Az Advanced LIGO alsó mérhető frekvencia határa 10 Hz [3], míg a LISA-nak 10^{-5} Hz [19]. Össztömegre a limit az Advanced LIGO esetén $202 M_\odot$ és a LISA esetén $2 \times 10^8 M_\odot$. Egy további becslés adható a tömegarányokra. A kisebb tömeget lefixáljuk a neutroncsillag tömegére, akkor az Advanced LIGO esetén $\nu_{\min} = 0,007 \approx 1 : 143$ és a LISA esetén $\nu_{\min} \approx 7 \times 10^{-9}$. Ezek a számolások az SDW [13] cikkéből származnak. A posztnewtoni paraméter kifejezhető a szögsebességgel:

$$\varepsilon = \frac{(Gm\omega)^{2/3}}{c^2} . \quad (4.5)$$

A teljes impulzusmomentum a pálya-impulzusmomentum newtoni részéből, valamint a domináns spin összegéből áll:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L}_N + \mathbf{S}_1 . \quad (4.6)$$

A folyamat során \mathbf{J} iránya állandó. A [20] cikk alapján a következőképpen írható fel a radiatív pálya szög sebesség:

$$\omega = \frac{\varepsilon^{3/2} c^3}{Gm} \left\{ 1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \left(-\frac{\xi}{2} + \chi_1 \cos \kappa_1 \right) \varepsilon^{3/2} \left[\frac{171}{8} - \chi_1^2 \left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{8} \cos^2 \kappa_1 \right) \right] \varepsilon^2 \right\} . \quad (4.7)$$

A radiatív pálya szög sebesség fejlődése ($\dot{\omega}$) nem egyenlő tömegarányokra:

$$\dot{\omega} = \frac{96 \varepsilon^6 \xi c^6}{5 (Gm)^2} \left\{ 1 + \frac{1105}{336}\varepsilon + \left(4\pi - \frac{79}{12}\xi - \frac{23}{4}\chi_1 \cos \kappa_1 \right) \varepsilon^{3/2} + \left[\frac{697465}{9072} - \chi_1^2 \left(\frac{335}{96} \sin^2 \kappa_1 - \frac{35}{16} \right) \right] \varepsilon^2 \right\} . \quad (4.8)$$

A pálya fázisa így írható fel:

$$\phi_c - \phi = \frac{\varepsilon^{-3}}{32\xi} \left\{ 1 + 2\varepsilon^{1/2}\xi + \frac{1195}{1008}\varepsilon + \left(-10\pi + \frac{3925}{504}\xi + \frac{175}{8}\chi_1 \cos \kappa_1 \right) \varepsilon^{3/2} + \left[-\frac{21440675}{1016064} + \chi_1^2 \left(\frac{375}{16} - \frac{3425}{96} \sin^2 \kappa_1 \right) \right] \varepsilon^2 \right\} , \quad (4.9)$$

ahol ϕ_c az egyesülésnél a fázis.

A h_+ polarizáció így írható fel az SDW-ben:

$$h_+ = \frac{2G^2 m^2 \varepsilon^{1/2} \xi}{c^4 D r} \left(h_+^0 + \beta_1 h_+^{0\beta} + \varepsilon^{1/2} \left[h_+^{0.5} + \beta_1 h_+^{0.5\beta} - 2\xi h_+^0 \right] + \varepsilon \left[h_+^1 - 4\xi h_+^{0.5} + \beta_1 h_+^{1\beta} + h_+^{SO} + \beta_1 h_+^{1\beta SO} \right] + \varepsilon^{3/2} \left[h_+^{1.5} + h_+^{1.5SO} + h_+^{1.5tail} \right] \right) , \quad (4.10)$$

ahol a h_+ tagok tartalmazzák a sorfejtés tagokat. A kereszt polarizáció hasonlóan írható fel, csak ott a plusz helyett a kereszt tagok szerepelnek.

5. fejezet

Spines effektív egytest gravitációs hullámforma

A Spines effektív egy test gravitációs hullámforma (SEOBNR) modellben Hamiltoni-formalizmusban írják fel a dinamikát, majd kváziszférikus sorfejtésben adják meg a gravitációs hullámot [17]. Az $\mathbf{r} = \mathbf{R}/m$ pozíció és $\mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{p}_1(t)}{\mu} = \frac{-\mathbf{p}_2(t)}{\mu}$ momentum vektorok idő fejlődését a [15] cikkben szereplő dinamikát leíró Hamilton függvény és ezen vektorok Poisson zárójeleivel írhatóak le:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\hat{t}} = \left\{ \mathbf{r}, \hat{H}_{real} \right\} = \frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (5.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\hat{t}} = \left\{ \mathbf{p}, \hat{H}_{real} \right\} + \hat{\mathbf{F}} = -\frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial \mathbf{r}} + \hat{\mathbf{F}}, \quad (5.2)$$

ahol $\hat{t} = t/M$ és \hat{H}_{real} a redukált Hamilton-függvény, $\hat{\mathbf{F}}$ a redukált radiációs reakciós erő [16]. A redukált Hamilton-függvény az effektív Hamilton-függvénnyel kifejezve a következő:

$$\mu \hat{H}_{real} = M \sqrt{1 + 2\nu \left(\frac{H_{eff}}{\mu} - 1 \right)} - M.$$

A spinekre is felírhatóak a Poisson zárójelek:

$$\frac{d\mathbf{S}_1}{dt} = \left\{ \mathbf{S}_1, \mu \hat{H}_{real} \right\} = \mu \frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial \mathbf{S}_1} \times \mathbf{S}_1, \quad (5.3)$$

itt $\mu = m_1 m_2 / m$ a redukált tömeg,

$$\frac{d\mathbf{S}_2}{dt} = \left\{ \mathbf{S}_2, \mu \hat{H}_{real} \right\} = \mu \frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial \mathbf{S}_2} \times \mathbf{S}_2. \quad (5.4)$$

A redukált radiációs reakciós erőt így lehet felírni:

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{\nu \hat{\Omega}} \frac{dE}{dt} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{p}|}, \quad (5.5)$$

itt $\hat{\Omega}$ a dimenziómentes pálya frekvencia, $\frac{dE}{dt}$ a kváziszférikus pályákhoz tartozó energia fluxus, ezek a következők:

$$\hat{\Omega} = M |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| / r^2, \quad (5.6)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\hat{\Omega}^2}{8\pi} \sum_{l=2}^8 \sum_{m=-l}^l m^2 \left| \frac{R}{M} h_{lm} \right|^2. \quad (5.7)$$

A pálya-impulzuszmomentum newtoni vezető rendű tagjához hozzá adódnak a poszt-newtoni és a spin-pálya korrekciók:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_{PN} + \mathbf{L}_{SO} + O(c^{-4}), \quad (5.8)$$

$$\mathbf{L}_{PN} = \mathbf{L}_N \left[\frac{1}{2} \nu^2 (1 - 3\nu) + (3 + \nu) \frac{M}{r} \right], \quad (5.9)$$

$$\mathbf{L}_{SO} = -\frac{2\mu}{r} \left[(\mathbf{S}_{eff} \cdot \hat{\mathbf{L}}_N) \hat{\mathbf{L}}_N + (\mathbf{S}_{eff} \cdot \hat{\lambda}) \hat{\lambda} \right]. \quad (5.10)$$

$\hat{\lambda} = (\hat{\mathbf{L}}_N \times \mathbf{r}) / r$ egységvektor $\hat{\mathbf{L}}_N$ körül forog Ω szögsebességgel, az effektív spin pedig a következőt jelenti:

$$\mathbf{S}_{eff} = \left(1 + \frac{3m_2}{4m_1} \right) \mathbf{S}_1 + \left(1 + \frac{3m_2}{4m_1} \right) \mathbf{S}_2. \quad (5.11)$$

A dimenziótlan spin paraméterek lineáris kombinációjával számolnak a sorfejtés során:

$$\chi_S = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}, \quad (5.12)$$

$$\chi_A = \frac{\chi_1 - \chi_2}{2}. \quad (5.13)$$

A precesszáló esetben $\hat{\mathbf{L}}_N(t)$ levetítésével a spinekre kifejezhető az időfüggésük:

$$\chi_S(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{S}_1(t)}{m_1^2} + \frac{\mathbf{S}_2(t)}{m_2^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{L}}_N, \quad (5.14)$$

$$\chi_S(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{S}_1(t)}{m_1^2} - \frac{\mathbf{S}_2(t)}{m_2^2} \right) \cdot \hat{\mathbf{L}}_N . \quad (5.15)$$

Az SEOBNR kvázi-szférikus sorfejtésben adja meg a hullám alakját, az összeolvadásra is tartalmaz egy becslést és a lecsengést is leírja a teljes hullámforma:

$$h_{lm}^{EOB}(t) = h_{lm}^{inspiral-plunge}(t)\theta(t_{match}^{lm} - t) + h_{lm}^{merger-RD}\theta(t - t_{match}^{lm}) , \quad (5.16)$$

ahol t_{match}^{lm} azaz időpont ahol összeillesztik a két hullámot. A bespirálózást leíró tag a $h_{lm}^{inspiral-plunge}(t)$, amely a következőképpen néz ki:

$$h_{lm}^{inspiral-plunge} = h_{lm}^F N_{lm} , \quad (5.17)$$

ahol

$$h_{lm}^F = h_{lm}^{(N,\epsilon)} \hat{S}_{eff} T_{lm} e^{i\delta_{lm}} (\rho_{lm})^l , \quad (5.18)$$

itt ϵ a paritását írja le a hullámformának. Az \hat{S}_{eff} effektív spin így néz ki:

$$\hat{S}_{eff}(r, p_{r^*}, p_\phi, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \begin{cases} \hat{H}_{eff}(r, p_{r^*}, p_\phi, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2), & \epsilon = 0 \\ \hat{L}_{eff} = p_\phi v_\Omega, & \epsilon = 1 \end{cases} , \quad (5.19)$$

ahol $v_\Omega = \hat{\Omega}^{1/3}$. T_{lm} a vezető rendű logaritmusai az uszály-járulékoknak:

$$T_{lm} = \frac{\Gamma(l+1 - 2imH_{real}\Omega)}{\Gamma(l+1)} \exp[\pi m \Omega H_{real}] \exp[2im\Omega H_{real} \log(2m\Omega r_0)] , \quad (5.20)$$

ahol $r_0 = 2M/\sqrt{e}$. $h_{lm}^{(N,\epsilon)}$ a newtoni rendek és így néznek ki:

$$h_{lm}^{(N,\epsilon)} = \frac{M\nu}{R} n_{lm}^{(\epsilon)} c_{l+\epsilon}(\nu) V_\phi^l Y^{l-\epsilon, -m}(\frac{\pi}{2}, \phi) , \quad (5.21)$$

itt R a távolság a megfigyelő és a forrás között, $Y^{l,m}(\Theta, \phi)$ a gömbfüggvények, $V_\phi^l = v_\phi^{l+\epsilon}$ pedig:

$$v_\phi = r_\Omega \hat{\Omega} = \hat{\Omega} \left(\frac{\partial \hat{H}_{real}}{\partial p_\phi} \Big|_{p_r=0} \right)^{-2/3} . \quad (5.22)$$

A polarizációk így írhatóak fel:

$$h_+(\theta, \phi) - ih_\times(\theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) h_{lm} . \quad (5.23)$$

6. fejezet

Gravitációs hullámforma polarizációk összehasonlítása illesztett szűréssel

Gravitációs hullámokat összehasonlítva a detektor által előállított zajos adatsorokkal az illesztett szűrés (matched filtering) eljárással történik. A gravitációs hullámforma időbeli lefutását a $h(t)$ függvény írja le. Két hullámforma közötti átfedés a skalárszorzattal írható fel:

$$O[e_1, e_2] = \langle e_1 | e_2 \rangle = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{h}_1(f) \tilde{h}_2^*(f)}{S_h(f)} df, \quad (6.1)$$

ahol $e = \frac{h}{\sqrt{\langle h|h \rangle}}$ normált hullámforma, mivel a jel amplitúdója nem számít a hullámformának. A LIGO által megírt programcsomagot használtam, amely c programnyelven kódolva tartalmazza a hullámforma generáló fájlokat és az összehasonlító fájlt. Két hullámforma között kiszámolva a fenti egyenletet 0 és 1 között ad értéket. Az 1 érték jelenti a teljes átfedést a két hullámforma között. Az összehasonlításokat python szkriptekkel hívtam meg, a függelék fejezetben található egy ilyen szkript. Az SEOBNR hullámformából hiányoznak a PN formalizmus amplitúdó korrekcióiból származó tömegarányban első rendű tagok. Az SEOBNR hullámforma leírja a bespirálózást, összeolvadást és lecsengést is, míg az SDW csak a bespirálózást írja le. Ez az összehasonlításnál a bespirálózás levágásánál további különbséget okoz. A spin egységvektorokat így lehet átváltani a spint leíró szögekre:

$$s_{1x} = \chi \sin(\kappa) \cos(\phi_1), \quad (6.2)$$

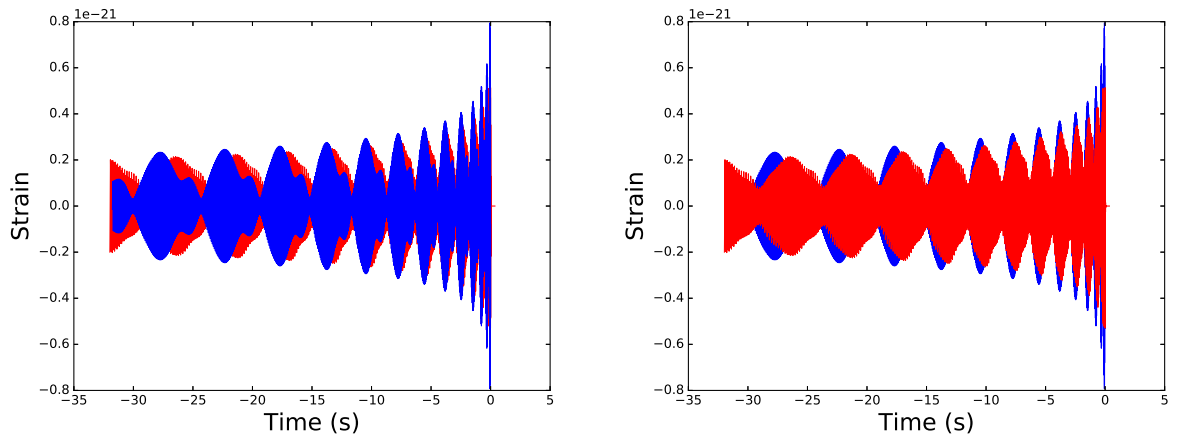
$$s_{1y} = \chi \sin(\kappa) \sin(\phi_1), \quad (6.3)$$

$$s_{1z} = \chi \cos(\kappa) , \quad (6.4)$$

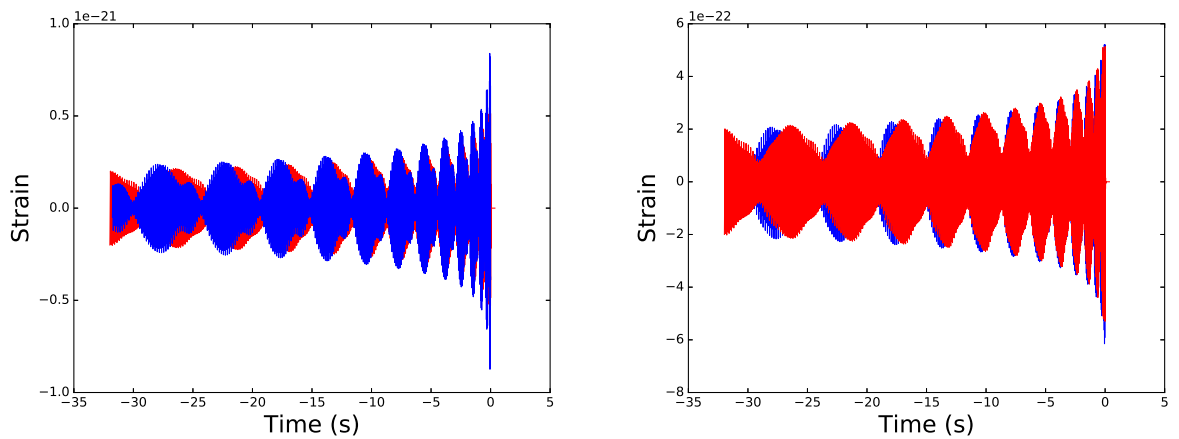
itt κ az \mathbf{L}_N vektortól mért szög, ϕ_1 pedig az azimutális szög. Először az SDW korrekciói közötti különbséget mutatom be, ezek tartalmazzák a kistömegarányú korrekciókat. Mind a 4 ábrán az SDW és az SEOBNRv3 látható, az SDW-ben csak az amplitúdó rendjét változtattam. A következő konfigurációt vizsgáltam: $\nu = 0,01$ tömegarány, $m = 150 M_\odot$ össztömeg, inklináció $\iota = 0,2$, $\chi_1 = 0,75$ spin paraméter, $\kappa = 0,7$, $\phi_1 = 0,837$ szögekkel. A „Strain” a h_+ polarizációt jelenti.

Az ezt követő ábrákon az egyezést mutatom be, különböző tömegarányok és össztömegekre. Négy eset látható és ezek a paraméterek jellemzik az ábrákat: az össztömeget 50-től 200 naptömegig változtattam, valamint a tömegarányt 0,01-től 0,03-ig. Az első konfigurációban a spint leíró szögek: $\kappa = 1,58$, $\phi_1 = 1,16589$, és a spin paraméter $\chi_1 = 0,75$, az inklináció $\iota = 0,2$. A második esetben: $\kappa = 0,0$, $\phi_1 = 0,837$, és a spin paraméter $\chi = 0,75$. A harmadik konfigurációra a szögek $\kappa = \pi/2$, $\phi_1 = 0,837$, és a spin paraméter $\chi = 0,75$. A negyedik konfiguráció: $\kappa = 1,3$, $\phi_1 = 1,2$, $\chi = 0,75$. Minden esetben az inklináció $\iota = 0,2$.

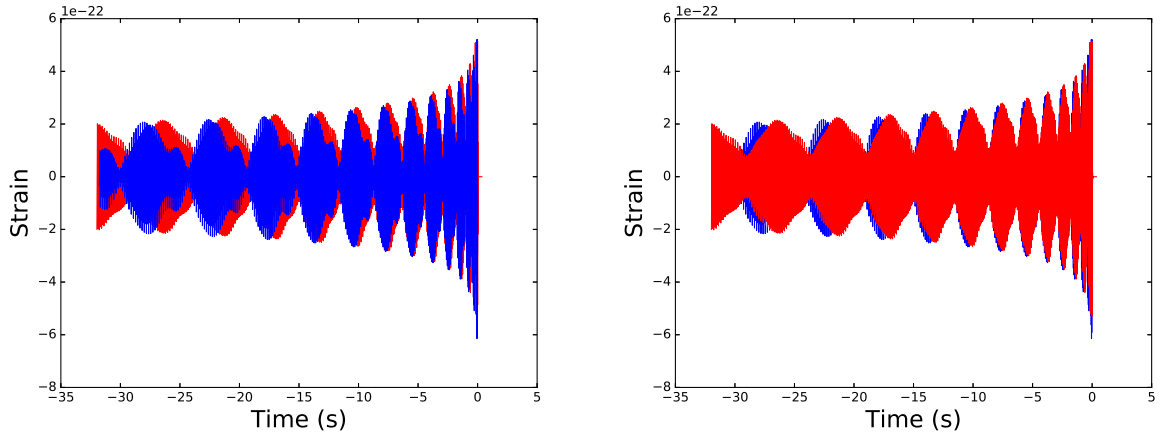
Az utolsó ábrákon azt mutatom meg, hogy különböző spin szögekre milyen az egyezés. Ezeket a szögeket (κ, ϕ_1) változtatva bejárható a teljes spin paraméter tartomány. A κ szög 0-tól π -ig változik, a ϕ_1 0-tól 2π -ig. A ν tömegarány minden esetben 0,03. Az első konfiguráció során az össztömeg 50 naptömeg, a másodiknál 100, a harmadiknál pedig 150. Az ι inklináció minden esetben 0,3.



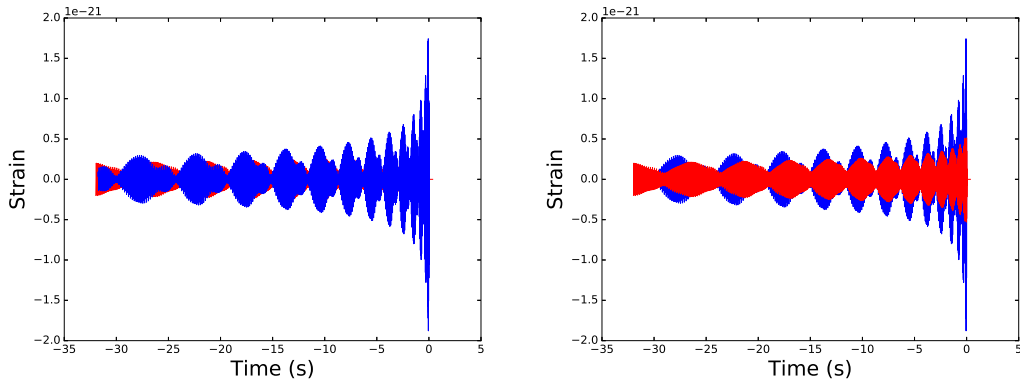
6.1. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az SDW kék színnel, az SEOBNRv3 pirossal van ábrázolva. Az amplitúdó itt vezető rendű és a match 0,2202. Az ι inklináció 0,2, az m össztömeg 150 naptömeg, a ν tömegarány 0,01, a spin paraméter $\chi_1 = 0,75$, $\kappa = 0,7$, $\phi_1 = 0,837$ szögekkel.



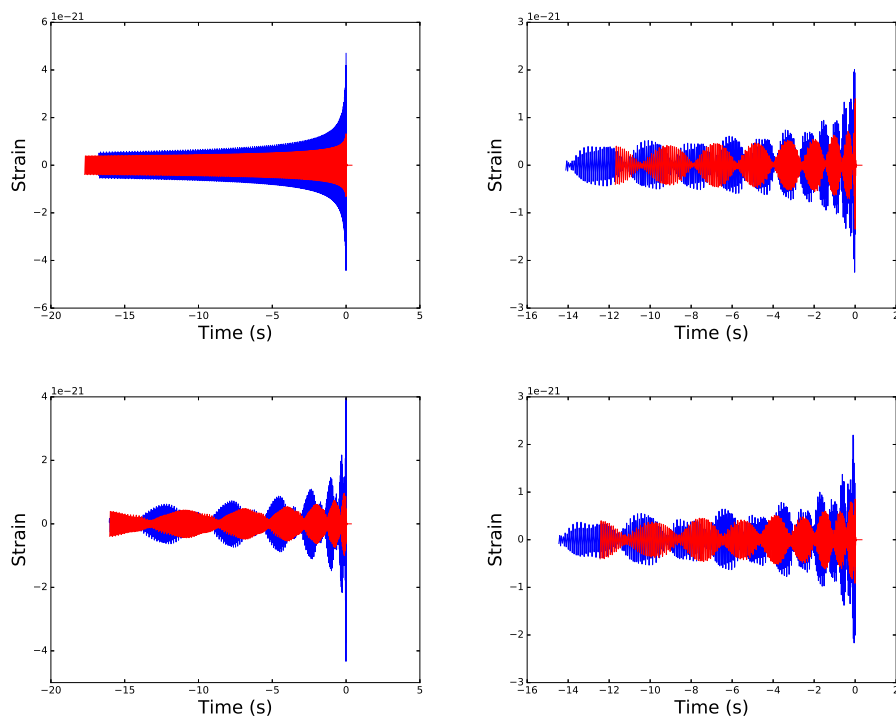
6.2. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az SDW kék színnel, az SEOBNRv3 pirossal van ábrázolva. Az amplitúdó itt első rendű és a match 0,2059. Az ι inklináció 0,2, az m össztömeg 150 naptömeg, a ν tömegarány 0,01, a spin paraméter $\chi_1 = 0,75$, $\kappa = 0,7$, $\phi_1 = 0,837$ szögekkel.



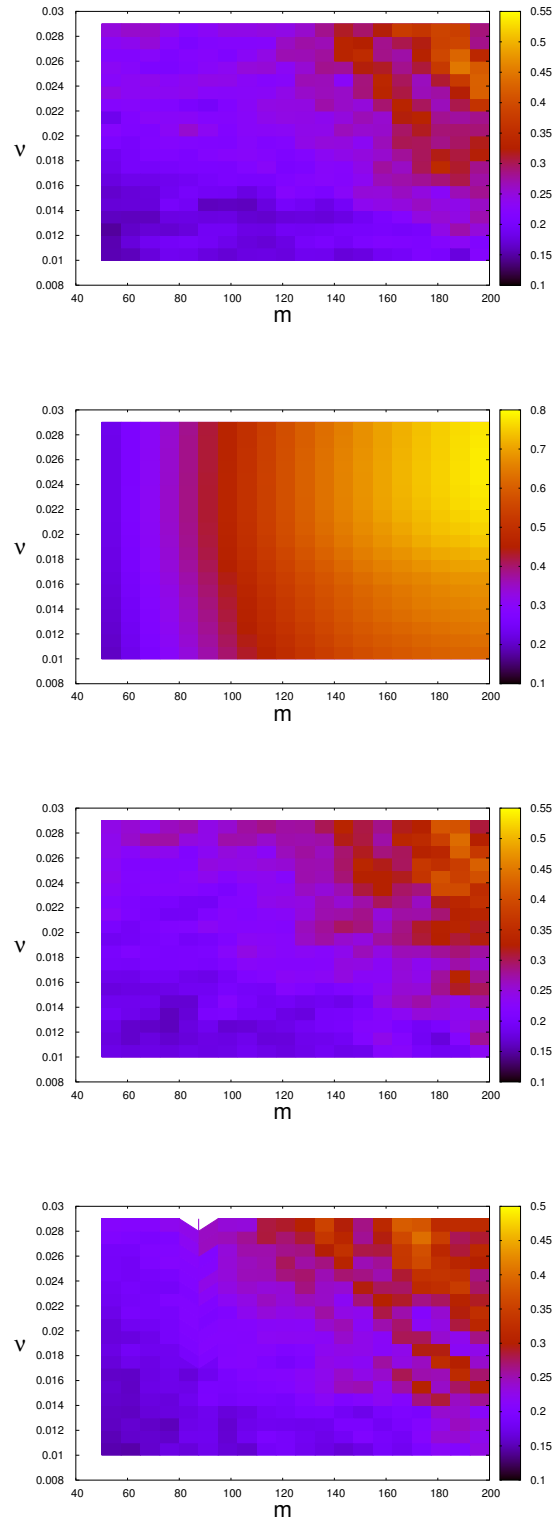
6.3. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az SDW kék színnel, az SEOBNRv3 pirossal van ábrázolva. Az amplitúdó itt 2. rendig megy el és a match 0,1722. Az ι inklináció 0,2, az m össztömeg 150 naptömeg, a ν tömegarány 0,01, a spin paraméter $\chi_1 = 0,75$, $\kappa = 0,7$, $\phi_1 = 0,837$ szögekkel.



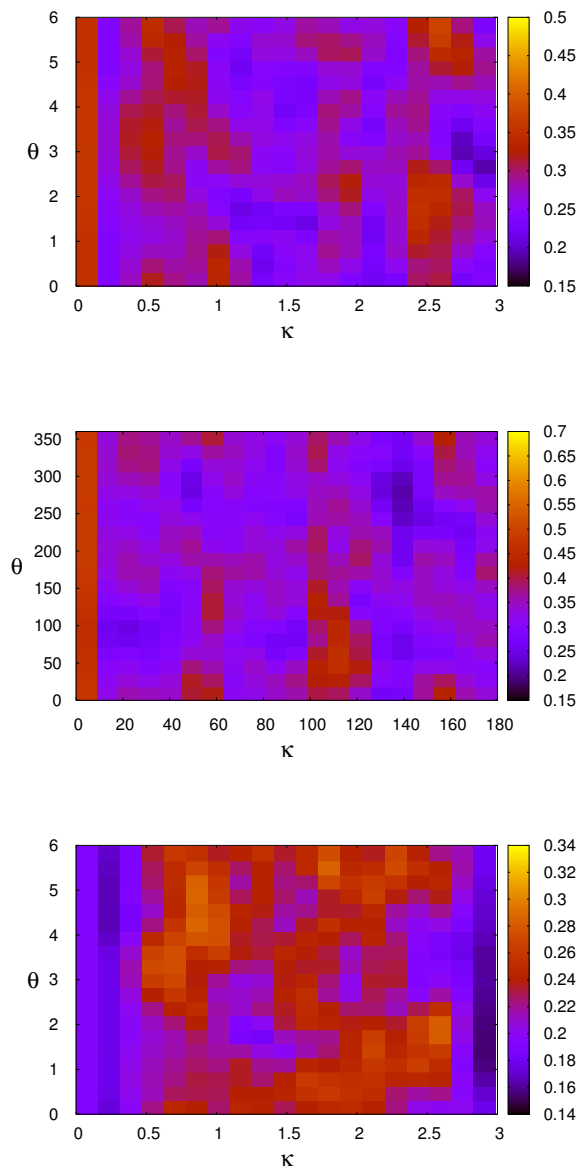
6.4. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az SDW kék színnel, az SEOBNRv3 pirossal van ábrázolva. Az amplitúdó itt 3. rendű. és a match 0,206. Az ι inklináció 0,2, az m össztömeg 150 naptömeg, a ν tömegarány 0,01, a spin paraméter $\chi_1 = 0,75$, $\kappa = 0,7$, $\phi_1 = 0,837$ szögekkel.



6.5. ábra. Az SDW (kékkel) és az SEOBNRv3 (pirossal) hullámformák összehasonlítása, a hullám nagysága van ábrázolva az idő függvényében. Az amplitúdó minden esetben 3. rendű. Az első ábrán a spint leíró szögek értékei: $\kappa = 0.0$, $\phi_1 = 0.837$, a másodiknál $\kappa = \pi/2$, $\phi_1 = 0.837$, a harmadiknál $\kappa = \pi/4$, $\phi_1 = 0.837$, a negyediknél $\kappa = 1.45$, $\phi_1 = 0.837$,. Az ι inklináció minden esetben 0.2, az össztömeg 150 naptömeg, a tömegarány $\nu = 0.02$, a spin paraméter $\chi = 0.75$,.



6.6. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, az össztömeg és a tömegarány van ábrázolva. Az amplitúdó minden esetben 3. rendű. Az első ábrán a spin értékek: $s_{1x} = 0.3$, $s_{1y} = 0.7$, $s_{1z} = 0.0$, a másodikonál a spint leíró szögek $\kappa = 0.0$, $\phi_1 = 0.837$, a spin paraméter $\chi = 0.75$, a harmadikonál $\kappa = \pi/2$, $\phi_1 = 0.837$, $\chi = 0.75$, a negyedikonál $\kappa = 1.3$, $\phi_1 = 1.2$, $\chi = 0.75$. Az ι inklináció minden esetben 0.2. A színek a match értékét jelöli.



6.7. ábra. Az SDW és az SEOBNRv3 hullámformák összehasonlítása, a spint leíró κ és ϕ_1 szögek változtatásával. Az amplitúdó minden esetben 3. rendű. Az első ábrán az össztömeg 50 naptömeg, a másodikon 100, a harmadikon 150. Az ι inklináció minden esetben 0.3 és a spin paraméter $\chi = 0.75$. A színkód a match értékét jelöli.

7. fejezet

Gravitációs hullámformák időfejlesztéséhez használt evolúciós egyenletek összehasonlítása

Az összehasonlítás során a match értékek alacsonyak voltak. A továbbiakban azt vizsgálom mi okozza ezt a nagy különbséget. A két hullámforma esetében különböző dinamikai mennyiségeket használnak, ezeket hasonlítom össze a következőkben. Az SDW-ben ezekből három konstans a kis tömegarány miatt és mert az egyenletek átlagoltak. Ezeket az SEOBNR c kódjából kinyerhető mennyiségekből kiszámolom majd összehasonlítom őket. A következőképpen számolhatóak ki: az \mathbf{L} pálya-impulzusmomentum és a \mathbf{J} teljes impulzusmomentum által bezárt szög α , az \mathbf{S}_1 domináns spin és a pálya-impulzusmomentum által bezárt szög κ_1 , a domináns spin és a teljes impulzusmomentum által bezárt szög β_1 . Definíció szerint egy spin esetén:

$$\kappa_1 = \alpha + \beta_1 . \quad (7.1)$$

Ezeket a következőképpen lehet megkapni a fenti vektorokból:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{L}_N}{|\mathbf{J}| |\mathbf{L}_N|} \right) , \quad (7.2)$$

$$\kappa_1 = \arccos \left(\frac{\mathbf{L}_N \mathbf{S}_1}{|\mathbf{L}_N| |\mathbf{S}_1|} \right) , \quad (7.3)$$

$$\beta_1 = \arccos \left(\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}_1}{|\mathbf{J}| |\mathbf{S}_1|} \right) . \quad (7.4)$$

A domináns spin nagyságát így írhatjuk fel:

$$S_1 = \frac{G}{c} m_1^2 \chi_1 . \quad (7.5)$$

A pálya-impulzusmomentum vezetőrendben:

$$\mathbf{L}_N = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} . \quad (7.6)$$

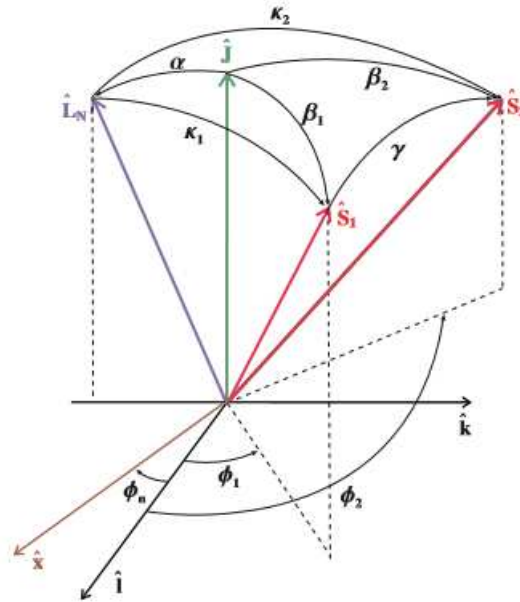
A nagysága a következő módon is felírható:

$$L_N = |\mathbf{L}_N| = \eta m \left(\frac{Gm}{c^2} \frac{1}{\left(\frac{G}{c^3} m \omega\right)^{1/3}} \right)^2 \omega . \quad (7.7)$$

Az $\hat{\mathbf{L}}_N = \mathbf{L}_N/|\mathbf{L}_N|$ egység vektor a kezdeti pillanatban z irányba mutat, azaz a pályasíkra merőleges. A kezdőfrekvenciát 10 Hz-ről szokás indítani, ebből megkapható a radiális pálya szögsebesség kezdőértéke $\omega = 10\pi$. A ψ fázis a radiális pálya szögsebesség időszerinti integrálásával kapható meg:

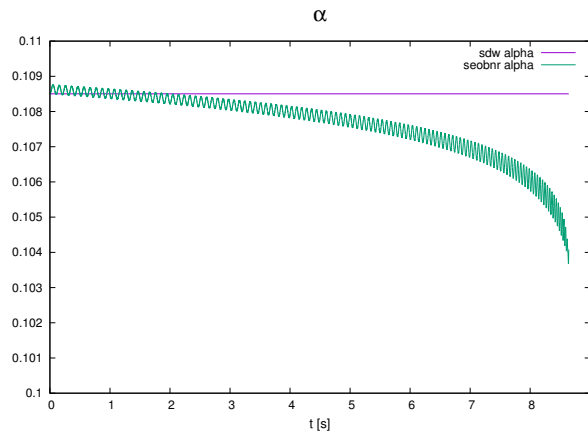
$$\psi = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \omega dt , \quad (7.8)$$

ω_1 itt az ε_1 -re utal a posztnewtoni paraméter felsőhatárára, amit a c kód a kettős paramétereinek alapján számol.

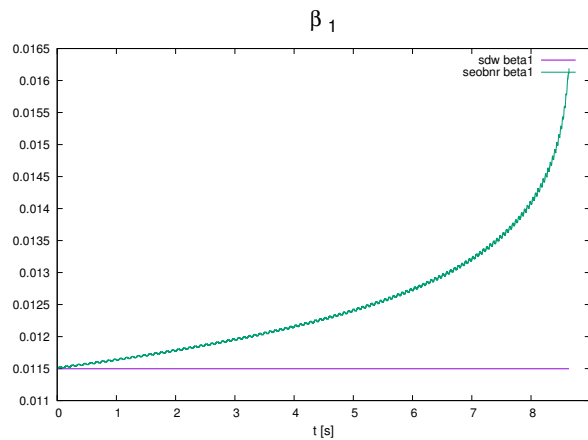


7.1. ábra. Az SDW-ben használt szögek erről az ábráról olvashatóak le, a következő cikkből származik az ábra [22].

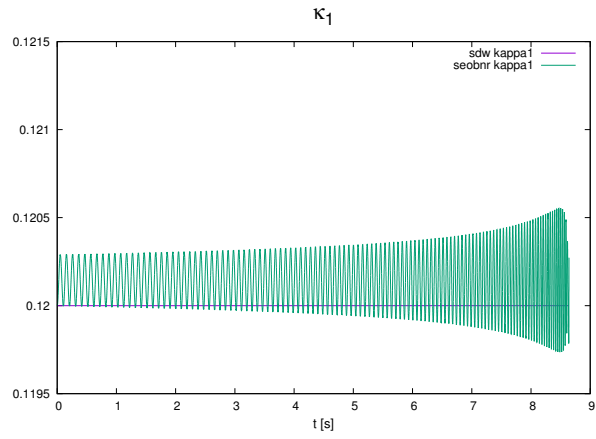
Az SEOBNR kódban fejlesztett differenciálegyenletekből kinyerhető az \mathbf{r} pozíció vektor, \mathbf{p} momentum vektor és \mathbf{S}_1 spin vektorok továbbá a ψ fázis és $\phi_N \cos \alpha$ időfejlődése. Ezekből kiszámolhatóak az SDW-ben konstansként kezelt $\alpha, \beta_1, \kappa_1$ szögek a 7.2, 7.3, 7.4 egyenletek alapján a teljes idő fejlesztés során. A számolásokat a c kódból kinyert fájlokon awk szkripteket alkalmazva végeztem el, majd az eredményeket gnuplottal ábrázoltam, a függelék tartalmaz egy ilyen awk szkriptet. Két esetben mutatom meg a különbséget az SDW-ben és az SEOBNR-ban számolt dinamikai mennyiségek között, egy jobb és egy rosszabb egyezés esetén. A rosszabb egyezéskor a match 0,2934, a jobbiknál 0,5649. Az első esetben a tömegarány $\nu = 0,025$, az össztömeg $m = 200 M_\odot$, az inklináció $\iota = 0,2$, a dimenziótlan spin paraméter $\chi_1 = 0,75$, a spint leíró szögek $\kappa = 0,12$, $\phi_1 = 1,33$. A második esetben a tömegarány $\nu = 0,03$, az össztömeg $m = 200 M_\odot$, az inklináció $\iota = 0,2$, a dimenziótlan spin paraméter $\chi_1 = 0.75$, a spint leíró szögek $\kappa = 0,9425$, $\phi_1 = \pi$.



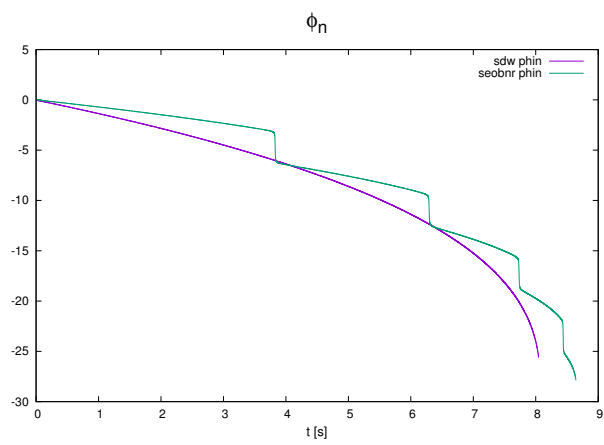
7.2. ábra. α szög 0,2934 match esetén.



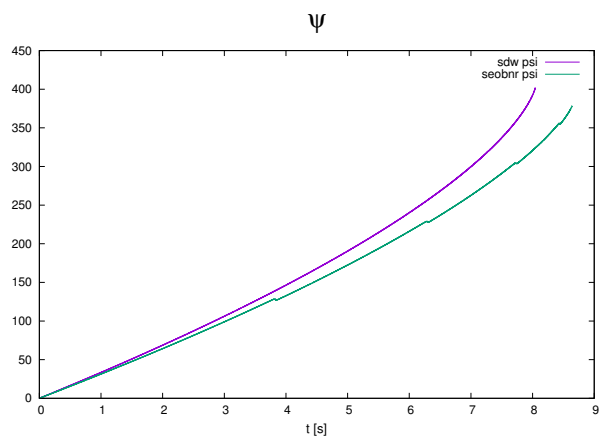
7.3. ábra. β_1 szög 0,2934 match esetén.



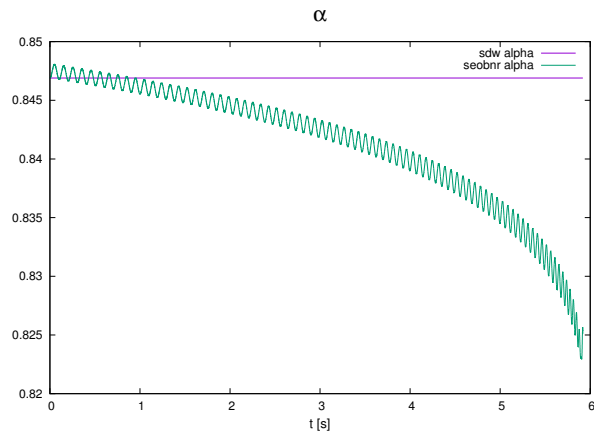
7.4. ábra. κ_1 szög 0,2934 match esetén.



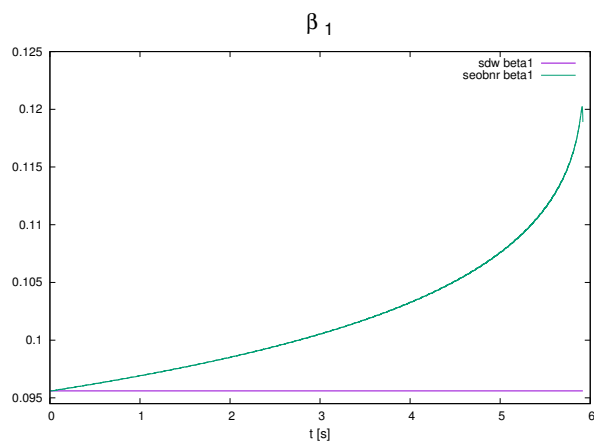
7.5. ábra. ϕ_n szög 0,2934 match esetén.



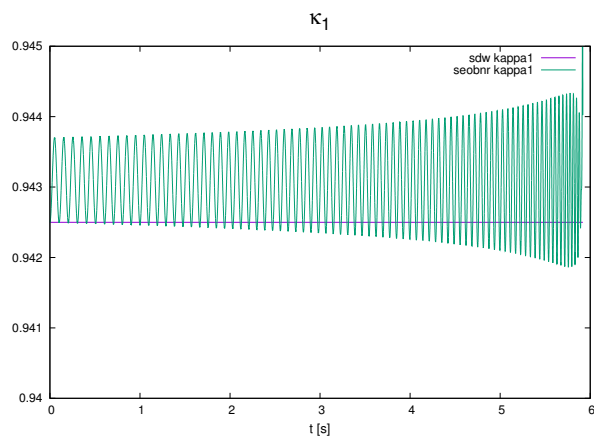
7.6. ábra. ψ fázis 0,2934 match esetén.



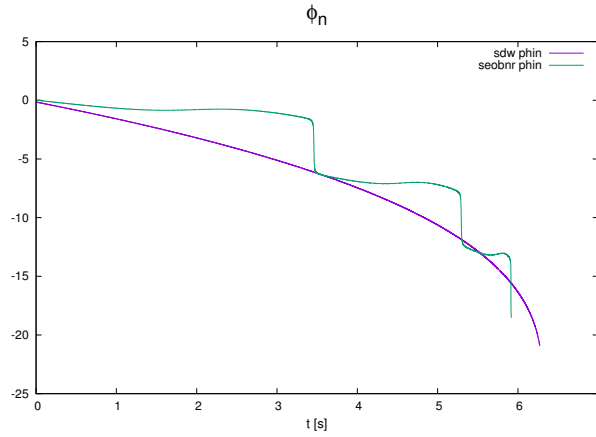
7.7. ábra. α szög 0,5649 match esetén.



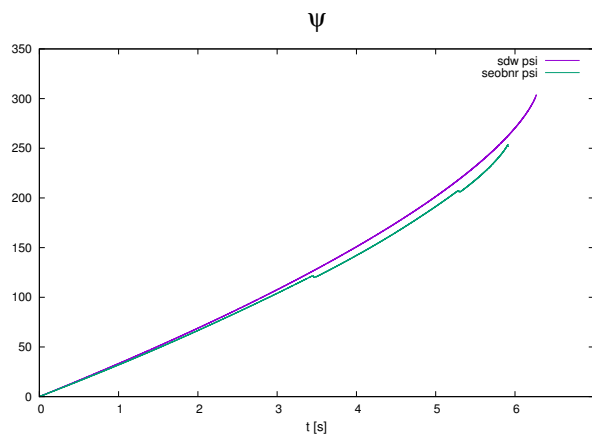
7.8. ábra. β_1 szög 0,5649 match esetén.



7.9. ábra. κ_1 szög 0,5649 match esetén.



7.10. ábra. ϕ_n szög 0,5649 match esetén.



7.11. ábra. ψ fázis 0,5649 match esetén.

Az ábrákon az SDW értékei egyenesek, ez az átlagolás miatt van, az SEOBNR értékei viszont oszcillálnak. Ez azért van mert az SEOBNR hullámformában pillanatnyi egyenleteket fejlesztnek. Az SEOBNR oszcillálásának értéke is eltér az SDW átlagától, ez azért van, mert a kezdeti értékeket máshogy kezeli a két hullámformát előállító kód. A β_1 és az α szögek szintén oszcillálnak, de eltérnek a kezdeti értéktől. A szögek értékei a harmadik tizedesjegyen kezdenek eltérni, ami nagyjából 0,06 fokot jelent. A ϕ_n szög mindkét hullámformánál hasonló tendenciát mutat, de az SEOBNR esetében megfigyelhetők ugrások. Ezen ugrások oka valószínűleg a c kódban keresendő, ennek elvégzése jövőbeli cél. A ψ fázis is hasonló fejlődést mutat a két hullámforma között, de a fejlődési egyenletek különbségéből adódóan a bespirálozás végére jelentős eltérés alakul ki a két hullámforma között. Ezen eltérések okozzák a két hullámforma közötti alacsony match értéket.

8. fejezet

Összegzés

A dolgozatomban a gravitációs hullámok felírási módját ismertettem, megmutattam hogyan vezethető le a síkhullám és az általános megoldás. Bemutattam a PN sorfejtés módszert, amely leírja a bespirálozás során keletkező hullámokat. Ismertettem két modellt, amelyek megadják a hullámformákat, majd összehasonlítottam őket különböző paraméterekre. Az SEOBNR hullámformából hiányoznak a PN formalizmus amplitúdó korrekcióiból származó tömegarányban első rendű tagok. Az SEOBNR hullámforma leírja a bespirálozást, összeolvadást és lecsengést is, míg az SDW csak a bespirálozást írja le. Ez az összehasonlításnál a bespirálozás levágásánál további különbséget okoz. Az ebből adódó különbségek a hullámformákon jelentős. Az figyelhető meg az ábrákon, hogy nagyobb össztömegekre és tömegarányokra javul az egyezés. A dinamikai mennyiségekben is megfigyelhető a különbség, amelyek a hullámformák közötti rossz egyezést eredményezik.

9. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőimnek, Dr. Gergely Árpád Lászlónak, Dr. Keresztes Zoltánnak és Tápai Mártonnak, hogy a kutatásba bekapcsolódhattam és hálás vagyok a szakmai útmutatásért.

A. függelék

Python szkript

```
import pylab
from pycbc.waveform import get_td_waveform
from pycbc.filter import match
from pycbc.psd import aLIGOZeroDetHighPower
import numpy
import scipy
import math
import lal
massratio_in = 0.01
totalmass_in = 50
samplerate = 9192
incl = 0.2
k=math.pi/2
t=0.837
chiin=0.75
s1x = chiin * numpy.sin(k)*numpy.cos(t)
s1y = chiin *numpy.sin(k) *numpy.sin(t)
s1z = chiin *numpy.cos(k)
diff_mass = 7.5
diff_massratio = 0.001
num_mass = 21
```

```

num_massratio = 20
name = 'output.txt'
output = open(name, 'w')
output.write("#SOF \n")
output.close()
for MassIndex in range(num_mass):
    for MassratioIndex in range(num_massratio):
        totalmass = totalmass_in + diff_mass * MassIndex
        massratio = massratio_in + diff_massratio * MassratioIndex
        hp, hc = get_td_waveform(approximant='SpinDominatedWf',
                                mass1=totalmass/(1.+massratio),
                                mass2=totalmass-totalmass/(1.+massratio),
                                delta_t=1.0/samplerate,
                                f_lower=10,
                                distance = 100,
                                spin1x=s1x,
                                spin1y=s1y,
                                spin1z=s1z,
                                spin2x=0.0,
                                spin2y=0.0,
                                spin2z=0.0,
                                inclination=incl,
                                phase_order=4,
                                amplitude_order=3)
        sp, sc = get_td_waveform(approximant='SEOBNRv3',
                                mass1=totalmass/(1.+massratio),
                                mass2=totalmass-totalmass/(1.+massratio),
                                delta_t=1.0/samplerate,
                                f_lower=10,
                                distance = 100,
                                spin1x=s1x,
                                spin1y=s1y,

```

```

        spin1z=s1z,
        spin2x=0.0,
        spin2y=0.0,
        spin2z=0.0,
        inclination=incl)

pylab.plot(sp.sample_times, sp, color='r')
pylab.plot(hp.sample_times, hp, color='b')
pylab.ylabel('Strain', fontsize = 22)
pylab.xlabel('Time (s)', fontsize = 22)
pylab.legend()
tlen = max(len(sp), len(hp))
sp.resize(tlen)
hp.resize(tlen)
f_low = 10.
delta_f = 1.0 / sp.duration
flen = tlen/2 + 1
psd = aLIGOZeroDetHighPower(flen, delta_f, f_low)
m, i = match(hp, sp, psd=psd, low_frequency_cutoff=f_low)
print 'Total mass: %1.4f' % totalmass
print 'Mass ratio: %1.4f' % massratio
print 'The match is: %1.4f \n' % m
text = '{0} {1} {2}\n'.format(totalmass, massratio, m)
output = open(name, 'a')
output.write(text)
output.close()

output = open(name, 'a')
output.write("\n")
output.close()

pylab.show()

```

B. függelék

AWK szkript

```
#!/usr/bin/awk -f

function acos(x) { return atan2(sqrt(1-x*x), x) }

BEGIN {
sor=0;
totalmass=200;
massratio=0.03;
chi1=0.7;

fstart=10;
eta=massratio/((1+massratio)^2);
c=299792458;
pi=3.14159265358979;
G=0.0000000000667408;
GCP2=7.42564845009288E-028;
omega=fstart*pi;
sunmass=1.98854695496146E+030;
m=totalmass*sunmass;
m1=sunmass*totalmass/(1+massratio);
v=(GCP2*m*omega/c)^(1/3);
romega=GCP2*m/(v^2);
```

```

LN=eta*m*romega*romega*omega;
totalspin1=G*chi1*m1*m1/c;

x0=1.0032029438774680e+01;
y0=0.0000000000000000e+00;
z0=0.0000000000000000e+00;
px0=-4.1816975187547114e-04;
py0=3.5598689774620657e-01;
pz0=-8.0307556738335277e-03;

r0=(x0*x0+y0*y0+z0*z0)^(1/2)
p0=(px0*px0+py0*py0+pz0*pz0)^(1/2)

f1= FILENAME "seobnroutput.txt"

while( sor < 59730) {
getline < "seobnr.txt"
t=$1;
x=$2;
y=$3;
z=$4;
px=$5;
py=$6;
pz=$7;
s1x=$8;
s1y=$9;
s1z=$10;
phiDMod=$11;
phiMod=$12;

r=(x*x+y*y+z*z)^(1/2);
rx=x/r;

```

$$ry=y/r;$$

$$rz=z/r;$$

$$p=(px*px+py*py+pz*pz)^{(1/2)};$$

$$pnx=px/p;$$

$$pny=py/p;$$

$$pnz=pz/p;$$

$$lx=(ry*pnz-pny*rz)*(r0/r)*(p0/p);$$

$$ly=(rz*pnx-pnz*rx)*(r0/r)*(p0/p);$$

$$lz=(rx*pny-pnx*ry)*(r0/r)*(p0/p);$$

$$lamp=(lx*lx+ly*ly+lz*lz)^{(1/2)};$$

$$LNx=lx*LN/lamp;$$

$$LNy=ly*LN/lamp;$$

$$LNz=lz*LN/lamp;$$

$$LNamp=(LNx*LNx+LNy*LNy+LNz*LNz)^{(1/2)};$$

$$sn=(s1x*s1x+s1y*s1y+s1z*s1z)^{(1/2)};$$

$$snx=s1x/sn;$$

$$sny=s1y/sn;$$

$$snz=s1z/sn;$$

$$Sx=snx*totalspin1;$$

$$Sy=sny*totalspin1;$$

$$Sz=snz*totalspin1;$$

$$Samp=(Sx*Sx+Sy*Sy+Sz*Sz)^{(1/2)};$$

$$LdotS=(LNx*Sx+LNy*Sy+LNz*Sz)/(LNamp*Samp);$$


```
kappa1=acos(LdotS);
```

```
Jx=LNx+Sx;
```

```
Jy=LNy+Sy;
```

```
Jz=LNz+Sz;
```

```
Jamp=(Jx*Jx+Jy*Jy+Jz*Jz)^(1/2);
```

```
JdotS=(Jx*Sx+Jy*Sy+Jz*Sz)/(Jamp*Samp);
```

```
beta1=acos(JdotS);
```

```
JdotL=(Jx*LNx+Jy*LNy+Jz*LNz)/(Jamp*LNamp);
```

```
alpha=acos(JdotL);
```

```
psi=phiDMod;
```

```
phin=-1*phiMod/(cos(alpha));
```

```
printf("%.16e %.16e %.16e %.16e %.16e %16.e\n", t, kappa1, beta1, alpha, phin, psi)
```

```
sor++
```

```
}
```

```
}
```

Irodalomjegyzék

- [1] J. H. Taylor, A. Wolszczan, T. Damour, and J. M. Weisberg, *Nature* **355**, 132 (1992).
- [2] B. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration), *Rept. Prog. Phys.* **72**, 076901 (2009).
- [3] G. M. Harry (for the LIGO Scientific Collaboration) *Class. Quantum Grav.* **27** 084006 (2010).
- [4] Ligo Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys.Rev.Lett.* **116**, 061102 (2016)
- [5] T. A. Prince, et al., *Bull. American Astron. Soc.* **38**, 990 (2006).
- [6] D. Talukder, S. Bose, S. Caudill, P. T. B., *Phys. Rev. D* **88**, 122002 (2013)
- [7] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou & A. N. Lasenby, *General Relativity*, CUP, Cambridge (2006).
- [8] L. E. Kidder, *Phys.Rev. D* **52** 821-847 (1995)
- [9] F. Acernese et al., *Class. Quantum Grav.* **25**, 184001 (2008).
- [10] B. Sathyaprakash, M. Abernathy, F. Acernese, P. Ajith, B. Allen ..., *Class. Quantum Grav* **29** 124013 (2012)
- [11] J. W. Conklin, et. al., arXiv:1111.5264 (2011).
- [12] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **116** 241103 (2016)
- [13] M. Tápai, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, 10.1103/PhysRevD.**86** 104045 (2012)

- [14] J. Levin, S. T. McWilliams, H. Contreras, *Class. Quant. Grav.* **28** 175001 (2011).
- [15] A. Taracchini, Y. Pan, A. Buonanno, E. Barausse, M. Boyle, et al., *Phys.Rev. D* **86**, 024011 (2012), 1202.0790.
- [16] A. Buonanno, Y. Chen, and T. Damour, *Phys.Rev. D* **74**, 104005 (2006), gr-qc/0508067.
- [17] Y. Pan, A. Buonanno, A. Taracchini, L. E. Kidder, A. H. Mroue, H. P. Pfeiffer, M. A. Scheel, B. Szilagyi, *Phys. Rev. D* **89**, 084006 (2014)
- [18] J. Levin, S. T. McWilliams, H. Contreras, *Class. Quant.Grav.* **28** 175001 (2011).
- [19] K. G. Arun et al., *Class. Quantum Grav.* **26** 094027 (2009).
- [20] B. Mikóczi, M. Vasúth, L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* **71** (2005).
- [21] L. Á. Gergely, P. L. Biermann, The typical mass ratio and typical final spin in supermassive black hole mergers (2012).
- [22] L. Á. Gergely, *Phys. Rev. D* 81 084025 (2010).

NYILATKOZAT

Alulírott Tarjányi Tamás Fizikus MSc szakos hallgató (ETR azonosító: TATUAAT.SZE) a „A fekete lyuk kettős rendszerek spin-dominált, illetve effektív egy test közelítéseiben származtatott dinamikáinak és gravitációs hullámformáinak összehasonlítása” című diplomamunka szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel. Ezen munka angol címe a modulóban: „Comparison of gravitational waveforms and dynamics obtained in the spin-dominated and effective-one-body approaches of the black hole binary systems”.

Szeged, 2017. május 19.

..... a hallgató aláírása