SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
ELMÉLETI FIZIKAI TANSZÉK
KÍSÉRLETI FIZIKAI TANSZÉK

TDK dolgozat

Szupermasszív fekete lyuk kettősök által sugárzott gravitációs hullámformák

Tápai Márton
Fizika MSc szakos hallgató

Témavezetők:
Dr. Gergely Árpád László, egyetemi docens
Keresztes Zoltán, tudományos segédmunkatárs

Szeged, 2010

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Szupermasszív fekete lyukak és környezetük

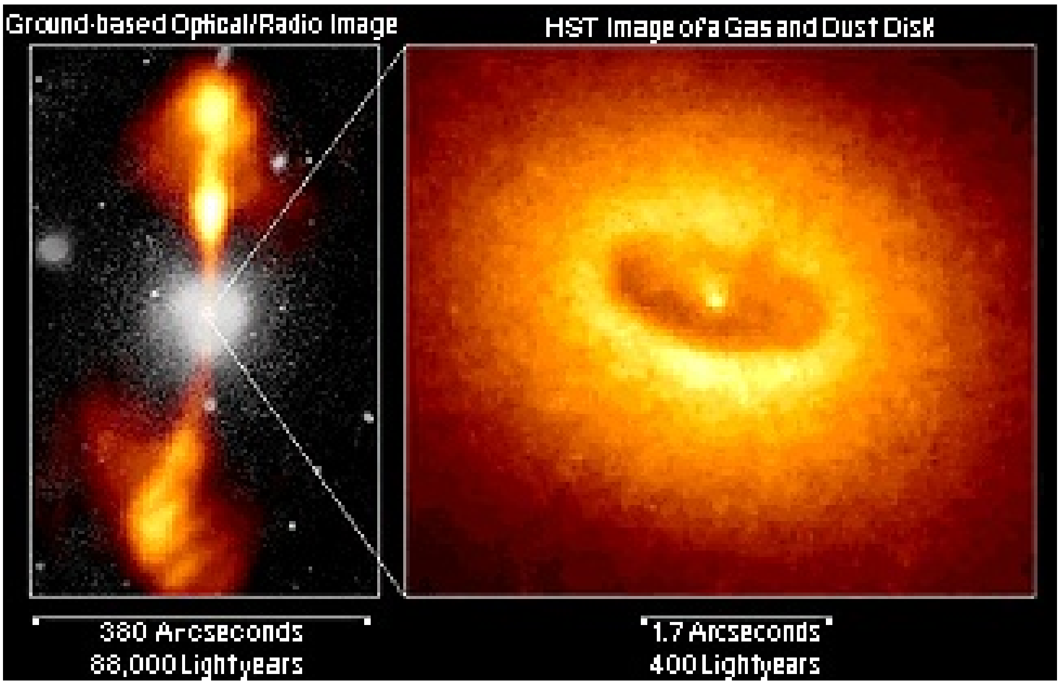
A fekete lyukak definíció szerint láthatatlanok, viszont ha környezetükben gáz található, a behulló anyag sugárzása megfigyelhetővé teszi őket. A spirálpályán keringő, akkretáló anyag plazma állapotú, így mágneses mezőt hoz létre, melynek poloidális szerkezete a pólusoknál nagy energiájú sugárzás kibocsátását teszi lehetővé. Az ily módon keletkező nyalábok szintén megfigyelhetők az elektromágneses sugárzás rádió tartományában, Very Long Baseline Interferometry (VLBI) technikákkal.

A fekete lyukakat tömegük szerint két csoportba soroljuk. Az első csoportba a $4 \div 40$ naptömegű ($M_{\odot}$) fekete lyukak tartoznak, ezek főként a galaxisunkon belül figyelhetők meg. Az ebben a tömegtartományban található ún. asztrofizikai fekete lyukak ütközése és összeolvadása során keletkező gravitációs sugárzás kimutatására épültek a földfelszíni, interferometrikus alapon működő detektorok, a 4km karhosszúságú LIGO két berendezése Luisiana és Washington államokban, illetve a 3km karhosszúságú Virgo Pisa mellett. A gravitációs sugárzás detektálása nehéz feladat, hiszen a hullámok által okozott hosszúság változások $10^{-21} \div 10^{-22}\ m$ nagyságrendűek (a kvark méretének felső határa $10^{-17}\ m$). A rendszer vákuumban van, ez csökkenti a lézer fény szóródását. A lézer fényt a karokon sokszor visszaverik az effektív karhossz növelése céljából. A mérés során az interferenciaképet folyamatosan fenntartják a karok végén lévő tükrök precíz mozgatásával, és a mozgatások során kifejtett erőt mérik.

Az elméleti úton meghatározott gravitációs hullámformákat a matched filtering technikával keresik a zajos mérési adatokban (A jel amplitúdója összemérhető a zajjal). Bár az elmúlt év adatainak kiértékelése még nem fejeződött be, eddig mindössze a különböző gravitációs hullám-források előfordulási gyakoriságára sikerült felső határokat megállapítani. Ez nem meglepő ugyanis a jelenlegi műszerek érzékenységét véve alapul, mindössze néhány évenként érkező erős gravitációs hullám detektálására lehetett számolni. Folyamatban van viszont a LIGO berendezések teljes átépítése az érzékenység 1-2 nagyságrenddel való növelése céljából (új optika; új, aktív szeizmikus szigetelés; stb). Az Advanced LIGO berendezések várhatóan 2013 környékén kezdenek üzemelni [1]. Szintén tervezik a Virgo berendezés átépítését is.

A második csoportba a $10^6 \div 10^9$ naptömegű ún. szupernehéz fekete lyukak tartoznak. Ezek a legtöbb galaxis középpontjában megtalálhatók, aktív vagy „csendes” állapotban. Egy ilyen aktív galaxis magról készült felvételt láthatunk az 1.1 ábrán.

Az aktív galaxis magokat az össztömeg, az akkréció mértéke, forgási paraméter és a forgástengely és a látóirány által bezárt szög alapján lehet csoportosítani [2]. A rádióban halk kvazárok és a Seyfert 1 típusú galaxisok egy osztályba tartoznak, csak a luminozitásuk különbözteti meg őket. Nagyon aktív akkréció és lassú forgás jellemző rájuk. A Seyfert 2 típusú galaxisok hasonlók, a különbség abban áll, hogy gáz vagy akkréciós korong takarja el a forrást. Ezeket közel az egyenlítői síkból látjuk. A rádióban hangos kvazárokat két csoportra oszthatjuk a megfigyelés szöge alapján: meredek spektrumú, kiterjedt forrásokra illetve lapos spektrumú, kompakt forrásokra. Spektrumukban széles vonalak vannak, és relativisztikus jetjük, ami gyors



1.1. ábra. Aktív galaxis magról készített felvételek, a bal oldali földfelszíni távcsővel, a jobb oldalit a Hubble Űrtávcsővel készítették. [4]

forgásra és akkrécióra utal. Rádió galaxisoknak hasonló tulajdonságaik vannak. A jet sebessége alapján fényes peremű (relativisztikus sebességű jet) és sötét peremű (alacsony sebességű jet) rádió galaxisokra bontjuk szét őket. A blazárok és BL Lac objektumok kis szög alatt megfigyelt rádió galaxisok, a relativisztikus jet anyaga elnyomja a forrás emissziós vonalait.

Szupernehéz fekete lyukak ütközése során keletkező gravitációs hullámok mérésére szolgál majd a 2020-ra tervezett LISA űrteleszkóp. A projektnek az előfutára a LISA Pathfinder misszió, amit 2011-ben fognak fellőni. A műhold célja bebizonyítani, hogy a kidolgozott technológiák biztosítani tudják a precíz pozicionálást az űrben[3]. A misszió feladata lesz még a berendezések teherbírásának tesztelése, az interferométerek pontosságának meghatározása és a LISA mérési elvének tesztelése. Ha sikerül kellő pontosságot elérni és megbizonyosodni a mérési módszerek működőképességéről, akkor fogják elindítani a LISA projektet. A National Research Council of the National Academy of Sciences 2010-es jelentése alapján a LISA projekt magas prioritású[5].

2. fejezet

Szupernehéz fekete lyuk kettősök

A galaxisok fejlődését kialakulásuk után az összeolvadások határozzák meg. Galaxisok összeütközése során kezdetben a galaxisok anyaga közötti dinamikai súrlódás a fő disszipatív effektus. A fekete lyukak közeledésének dinamikája jól leírható amíg a köztük lévő távolság megközelítőleg 1 pc-re nem csökken. Sokáig fennállt az utolsó pc probléma, mely szerint a két szupernehéz fekete lyuk nem közelítheti meg egymást 1 pc-nél jobban. Azonban már napvilágot láttak olyan elméletek, melyek lehetővé teszik, hogy a két fekete lyuk elég közel kerüljön egymáshoz, és a gravitációs sugárzás vegye át a fő disszipatív effektus szerepét. Az egyik elmélet szerint az ütköző rendszerben 3 akkréciós korong található (mindkét fekete lyuk körül egy és a kettős körül egy nagyobb). Ez az utóbbi akkréciós korong visz el pályaimpulzus momentumot, ezzel csökken a szeparáció. Egy másik elmélet szerint 2 fekete lyuk önmagában nem elég az összeolvadáshoz, hanem kell egy harmadik ütközés, ami összelöki a két egymás körül forgó fekete lyukat, és egy új kettős alakul ki. A gravitációs sugárzás 0.005 pc-nél veszi át a fő disszipatív folyamat szerepét, ez a távolság nagyon gyengén függ a rendszer teljes tömegétől és a fekete lyuk körüli csillagok eloszlásától, illetve egyáltalán nem függ a tömeg-aránytól [6].

A galaxis ütközésekkor a központi fekete lyukak tipikus tömeg-aránya $0.03 \div 0.3$ között van[6]. Ezen tömegarány esetén a nagyobb tömegű fekete lyuk spinje domináns, ezért a kisebb spint elhanyagolhatjuk. Ekkor megfigyelhető a spin-átfordulás jelensége is, mely magyarázata a 2.1 ábrán látható.

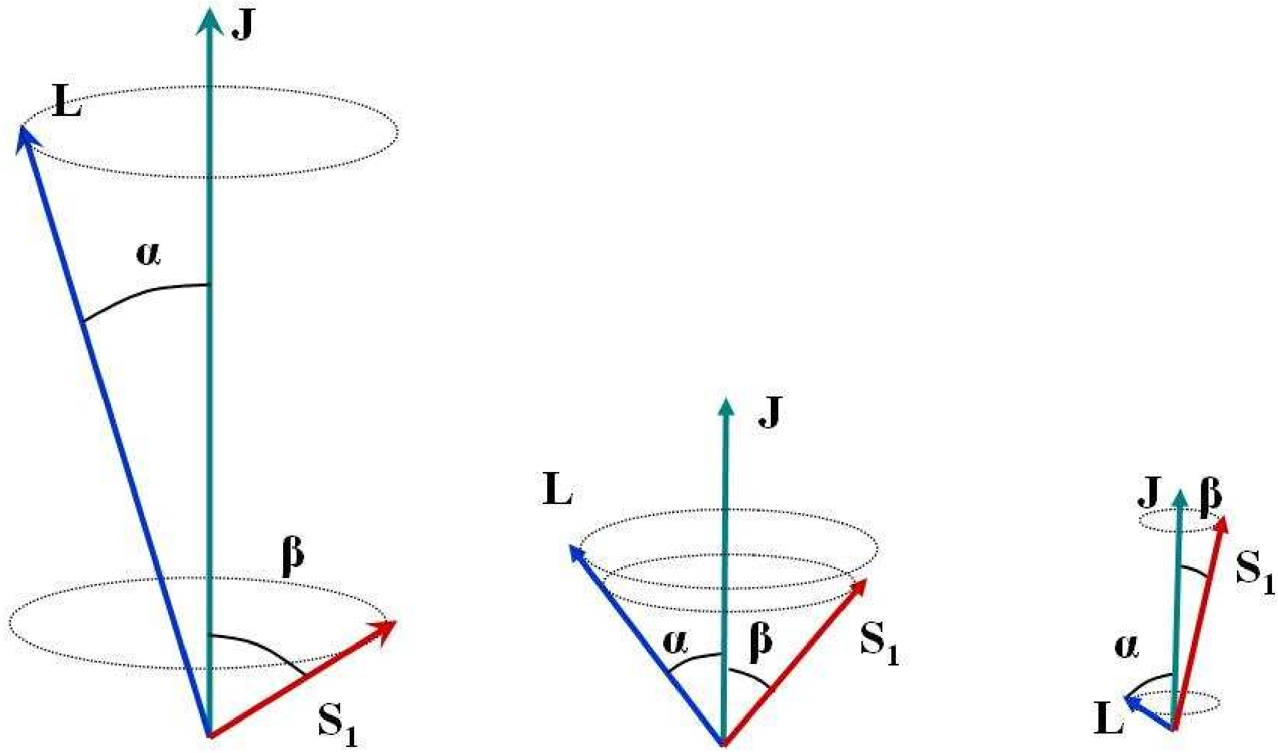
Amikor a gravitációs sugárzás veszi át a fő disszipatív effektus szerepét, a rendszert jól le tudjuk írni a poszt-newtoni formalizmussal. Ebben a formalizmusban a gravitációs hullámokat a sík Minkowski metrika kis perturbációiként kezeljük. A poszt-newtoni kifejtést az

$$\varepsilon \approx \frac{Gm}{c^2 r} \approx \frac{\mathrm{v}^2}{c^2} \tag{2.1}$$

kisparaméter szerint végezzük. Itt $m = m_1 + m_2$ a rendszer össztömege, r a két fekete lyuk közötti $\mathbf{r}$ szeparáció hossza, G a gravitációs állandó, c a fénysebesség, v pedig a szeparáció deriváltjának a hossza. Formuláinkban megjelennek $\frac{\mathrm{v}}{c}$ rendű tagok is, ezért a felbontás során feles és egész rendű tagjaink vannak. A kisparaméter a 0.005 pc határnál 10^{-3} körüli. A poszt-newtoni közelítés $\varepsilon \approx 0.1$-ig tekinthető érvényesnek. Thorne megmutatta, hogy a h^{ij} gravitációs hullámformát a szimmetrikusan spur mentes radiatív multipólus momentumokkal a következő módon lehet számolni másfeles poszt-newtoni rendig[7] :

$$h^{ij} = \frac{G2}{c^4 D}\{\overset{(2)}{I^{ij}} + \frac{1}{3}\frac{\overset{(3)}{I^{ijk}}}{c}N^k + \frac{1}{12}\frac{\overset{(4)}{I^{ijkl}}}{c^2}N^k N^l + \frac{1}{60}\frac{\overset{(5)}{I^{ijklm}}}{c^3}N^k N^l N^m \tag{2.2}$$

$$+\epsilon^{kl(i}[\frac{4}{3}\frac{\overset{(3)}{J^{j)k}}}{c}N^l + \frac{1}{2}\frac{\overset{(3)}{J^{j)km}}}{c^2}N^l N^m + \frac{2}{15}\frac{\overset{(4)}{J^{j)kmn}}}{c^3}N^l N^m N^n]\}_{TT}\ , \tag{2.3}$$



2.1. ábra. Az ábrán a spin-átfordulás folyamata látható. Az idős jet a kezdeti spin irányába mutat. Ahogy a két fekete lyuk egymáshoz közeledik a spin és a pályaimpulzus momentum a teljes impulzus momentum körül precesszál. A gravitációs sugárzás energiát és impulzus momentumot **L** visz el a rendszerből úgy hogy a teljes impulzus momentum **J** iránya meg marad. A folyamat során **L** nagysága csökken, még a spiné nem változik. Még a legbelső stabil körpálya elérése előtt a spin közel a **J** irányába áll be és egy új jet alakul ki [6].

ahol D a megfigyelő és a forrás távolsága, az I^{ij}... kifejezések a tömeg multipólus momentumok, a J^{ij}... pedig az áram multipólus momentumok. Az N^i-k az $\hat{\mathbf{N}}$ egységvektor elemei, ami a rendszer tömegközéppontjából a megfigyelő felé mutat. A TT a transzverzális trace mentesítést jelöli.

3. fejezet

Gravitációs hullámformák 1.5 poszt-newtoni rendig, a vezető rendű spin-pálya kölcsönhatás figyelembe vételével

A mozgásegyenleteket másfeles rendig a következő egyenlet határozza meg:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_{PN} + \mathbf{a}_{SO} \ , \tag{3.1}$$

ahol

$$\mathbf{a}_N = -\frac{Gm}{r^3}\mathbf{r} \ , \tag{3.2}$$

$$\mathbf{a}_{PN} = -\frac{Gm}{c^2r^3}\left\{\mathbf{r}\left[(1+3\eta)\mathbf{v}^2 - 2(2+\eta)\frac{Gm}{r} - \frac{3}{2}\eta\dot{r}^2\right] - 2(2-\eta)r\dot{r}\mathbf{v}\right\} \ , \tag{3.3}$$

$$\mathbf{a}_{SO} = \frac{G}{c^2r^3}\left[\frac{6}{r^2}\mathbf{r}[(\mathbf{r}\times\mathbf{v})(\mathbf{S}+\sigma)] - \mathbf{v}\times(4\mathbf{S}+3\sigma) + 3\frac{\dot{r}}{r}\mathbf{r}\times(2\mathbf{S}+\sigma)\right] \ , \tag{3.4}$$

itt $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m}$, $\nu = \frac{m_2}{m_1}$, $\eta = \frac{\mu}{m}$, $\sigma = \nu\mathbf{S}_1 + \nu^{-1}\mathbf{S}_2$.

A számolások során a [11] cikkben bevezetett koordináta rendszereket és változókat használjuk. A gyorsulások kifejezéseit a [10] és [9] cikkekből vesszük. A 3.2 a newtoni gyorsulás, a 3.3 az első poszt-newtoni rendje a gyorsulásnak, a 3.4 kifejezés pedig a spin-pálya kölcsönhatás tagja a gyorsulásnak. Ez utóbbi másfeles post-newtoni rendű tag. A 2.2 képletben bevezetett momentumokat a 3.5-3.14 kijezések adják meg. Ezeket a [8] cikkből vesszük annyi kiegészítéssel, hogy nem használjuk a $G = c = 1$ konvenciót, hanem SI mértékegység rendszerben számolunk.

$$\begin{aligned} I^{ij} \;=\; & \mu(x^i x^j)^{STF}[1 + \frac{29}{42}(1-3\eta)\frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{7}(5-8\eta)\frac{Gm}{c^2r}] && (3.5)\\ & -\frac{4}{7}(1-3\eta)\mu r\dot{r}(x^i v^j)^{STF} + \frac{11}{21}(1-3\eta)\mu r^2(v^i v^j)^{STF} \\ & +\frac{8}{3}\eta[x^i(\mathbf{v}\times\sigma)^j]^{STF} - \frac{4}{3}\eta[v^i(\mathbf{r}\times\sigma)^j]^{STF} \ , && (3.6)\end{aligned}$$

$$I^{ijk} = -\mu\frac{1-\nu}{1+\nu}\{(x^i x^j x^k)^{STF}[1+\frac{1}{6}(5-19\eta)\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{6}(5-13\eta)\frac{Gm}{c^2 r}] \quad (3.7)$$

$$-(1-2\eta)r\dot{r}\frac{(x^i x^j v^k)^{STF}}{c^2}+(1-2\eta)r^2\frac{(x^i v^j v^k)^{STF}}{c^2}\}\ , \quad (3.8)$$

$$I^{ijkl} = \mu(1-3\eta)(x^i x^j x^k x^l)^{STF}\ , \quad (3.9)$$

$$I^{ijklm} = -\mu\frac{1-\nu}{1+\nu}(1-2\eta)(x^i x^j x^k x^l x^m)^{STF}\ , \quad (3.10)$$

$$J^{ij} = -\mu\frac{1-\nu}{1+\nu}\{[x^i(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^j]^{STF}[1+\frac{1}{28}(13-68\eta)\frac{v^2}{c^2}+\frac{1}{14}(27+30\eta)\frac{Gm}{c^2 r}] \quad (3.11)$$

$$+\frac{5}{28}(1-2\eta)\frac{r\dot{r}}{c^2}[x^i(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^j]^{STF}\}-\frac{3}{2}\eta\frac{1+\nu}{1-\nu}(x^i\sigma^j)^{STF}\ , \quad (3.12)$$

$$J^{ijk} = \mu(1-3\eta)[x^i x^j(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^k]^{STF}+2\eta(x^i x^j\sigma^k)^{STF}\ , \quad (3.13)$$

$$J^{ijkl} = -\mu\frac{1-\nu}{1+\nu}(1-2\eta)[x^i x^j x^k(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^l]^{STF}\ . \quad (3.14)$$

A h^{ij} tenzor számolása során minden deriválás után a sebesség deriváltjai helyére behelyettesítjük a 3.1 teljes gyorsulást. A kapott hullámforma a követkző alakú:

$$h^{ij} = \frac{2G\mu}{c^4 D}\left[Q^{ij}+P^{0.5}Q^{ij}+PQ^{ij}+PQ^{ij}_{SO}+P^{1.5}Q^{ij}+P^{1.5}Q^{ij}_{SO}+P^{1.5}Q^{ij}_{tail}\right]_{TT}\ , \quad (3.15)$$

ahol Q^{ij} a newtoni járulék, $P^{0.5}Q^{ij}$ feles post newtoni rendű tag, PQ^{ij}ésPQ^{ij}_{SO} az első posztnewtoni rendű és a spin-pálya kölcsönhatásból származó tag ebben a rendben. Másfeles rendben hasonló a jelölés az első rendhez, itt a plusz tag a $P^{1.5}Q^{ij}_{tail}$ az úgy nevezett tail(uszáj)-tag ez a gravitációs hullám önmagára hatásával kapcsolatos tag.

A kettős pályája a gravitációs sugárzás következményeként körpályává simul az összeolvadás előtt, így használhatjuk a közel-körpálya közelítést. A mozgásegyenleteket a következő azonosságok segítségével át lehet írni:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{a} &= \ddot{r}-r\omega^2\\ \hat{\lambda}\cdot\mathbf{a} &= r\dot{\omega}+2\dot{r}\omega\\ \hat{\mathbf{L}}_N\cdot\mathbf{a} &= -r\omega(\hat{\lambda}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{L}}_n}{dt})\ ,\end{aligned} \quad (3.16)$$

ahol $\hat{\lambda}=\hat{\mathbf{L}}_N\times\frac{\mathbf{r}}{r}$, $\hat{\mathbf{L}}_N=\frac{\mathbf{L}_N}{|\mathbf{L}_N|}$, $\mathbf{L}_N$ a newtoni pálya-impulzusmomentum. A pályaszögsebességet a $\mathbf{v}=\dot{r}\frac{\mathbf{r}}{r}+r\omega\hat{\lambda}$ egyenlet határozza meg. A közel-körpálya közelítésben a szeparációt állandónak tekintjük, de megengedjük a pályasík precesszióját. Ezekből a feltételekből levezethető a következő összefüggés[8]:

$$r\omega = \left(\frac{Gm}{r}\right)^{1/2}\left\{1-\frac{1}{2}(3-\eta)\frac{Gm}{c^2 r}-\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\left[\frac{G\chi_i}{c}\cos\kappa_i\left(\frac{2}{(1+\nu)^2}+3\eta\right)\right]\right\}\ , \quad (3.17)$$

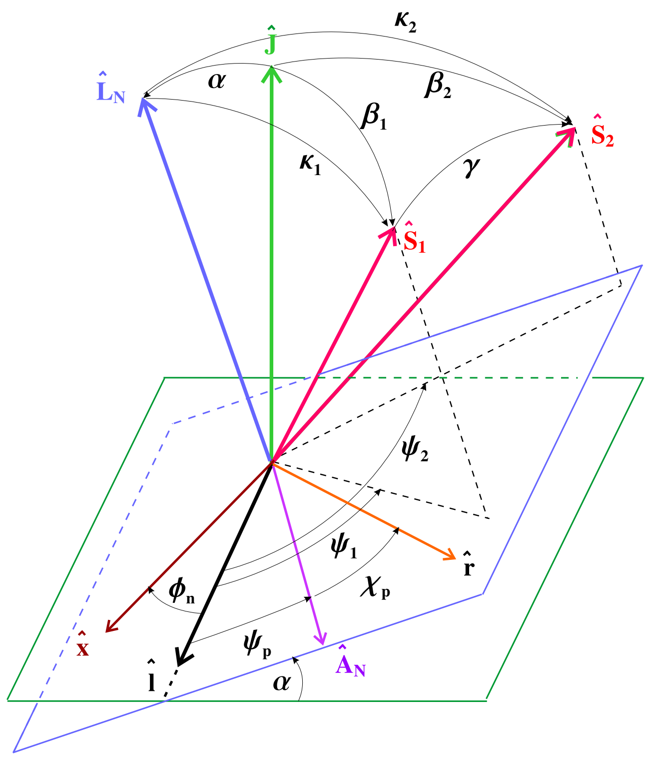
A $\mathbf{v} = r\omega\hat{\lambda}$ helyettesítéssel kapjuk a hullámforma közel-körpálya közelítését.

A gravitációs sugárzásnak két polarizációja van. A polarizációs állapotokat a h^{ij} tenzor komponenseinek lineáris kombinációjaként fejezzük ki. Olyan koordinátarendszert választunk, ahol a z tengely a $\mathbf{J}$ teljes impulzus momentum irányába mutat, definiáljuk a $\theta = \arcsin(\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{J}}_0)$ szöget és az x és y irányokat úgy választjuk meg, hogy ekkor a $\hat{\mathbf{N}} = \cos\theta\hat{\mathbf{z}} + \sin\theta\hat{\mathbf{x}}$ az x-z síkban van. Ekkor a h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotokat a következő egyenletekkel számolhatjuk ki:

$$h_+ = \frac{1}{2}\{\cos^2\theta h^{xx} - h^{yy} + \sin^2\theta h^{zz} - \sin(2\theta)h^{xz}\}\ , \tag{3.18}$$

$$h_\times = \cos\theta h^{xy} - \sin\theta h^{yx}\ . \tag{3.19}$$

A 3.1 ábrán bevezetett szögek segítségével felírjuk a $\mathbf{r}$ és $\hat{\lambda}$ vektorokat:



3.1. ábra. Az ábrán láthatók a teljes impulzus momentum $J\hat{\mathbf{J}}$, a newtoni pálya-impulzus momentum $L_N\hat{\mathbf{L}}_\mathbf{N}$, és a spinek $S_{1,2}\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{1,2}}$ által bezárt szögek. A ϕ_n szög az $\hat{\mathbf{l}}$ és $\hat{\mathbf{x}}$ tengely által bezárt szög melyet a $\hat{\mathbf{J}}$-re merőleges síkban mérünk. A spinek és a newtoni Laplace-Runge-Lenz vektor azimutális szögeit(ψ_1, ψ_2, ψ_p) az $\hat{\mathbf{l}}$-től mérjük az $\hat{\mathbf{L}}_\mathbf{N}$-re merőleges síkban. A valódi anomália χ_p a $\hat{\mathbf{A}}_\mathbf{N}$ és a $r\hat{\mathbf{r}}$ által bezárt szög. [11]

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}_x}{r} &= -\sin(\frac{3\pi}{2} - \phi_n)\cos(\psi) - \cos\alpha\cos(\frac{3\pi}{2} - \phi_n)\sin(\psi)\ , \\
\frac{\mathbf{r}_y}{r} &= \cos(\frac{3\pi}{2} - \phi_n)\cos(\psi) - \cos\alpha\sin(\frac{3\pi}{2} - \phi_n)\sin(\psi)\ , \\
\frac{\mathbf{r}_z}{r} &= \sin\alpha\sin(\psi)\ ,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\lambda}_x &= \sin(\frac{3\pi}{2} - \phi_n)\sin(\psi) - \cos\alpha\cos(\frac{3\pi}{2} - \phi_n)\cos(\psi) \, , \\
\hat{\lambda}_y &= -\cos(\frac{3\pi}{2} - \phi_n)\sin(\psi) - \cos\alpha\sin(\frac{3\pi}{2} - \phi_n)\cos(\psi) \, , \\
\hat{\lambda}_y &= \sin\alpha\cos(\psi) \, ,
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Itt $\psi_p + \chi_p = \psi$. A [8] cikk eredményein a következő javításokat kell elvégezni: A (B2c) egyenletben Q_+-t $-Q_+$-re kell cserélni, a (B3c) egyenletben egy zárójel hiányzik a $(\cos^2(\iota)\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha))$ tagban. A (B3j) egyenletben a cd helyett $-cd$-t kell írni. A kijavított képletek teljes összhangban vannak az eredményeinkkel.

Eredményeimet a REDUCE szimbolikus programnyelvben írt saját fejlesztésű programmal állítottam elő. A hullámformák közel-körpálya közelítése az A függelékben található.

A detektor által mért jelet a

$$
h(t) = F_+ h_+(t) + F_\times h_\times(t) \tag{3.22}
$$

kifejezés adja, ahol F_+ és $F_\times$ az úgy nevezett antenna függvények. Ezek megmutatják a detektor érzékenységét a megfelelő polarizációs állapotra.

$$
F_+ = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\bar{\theta})\cos(2\bar{\phi})\cos(2\bar{\psi}) - \cos\bar{\theta}\sin(2\bar{\phi})\sin(2\bar{\psi}) \, , \tag{3.23}
$$

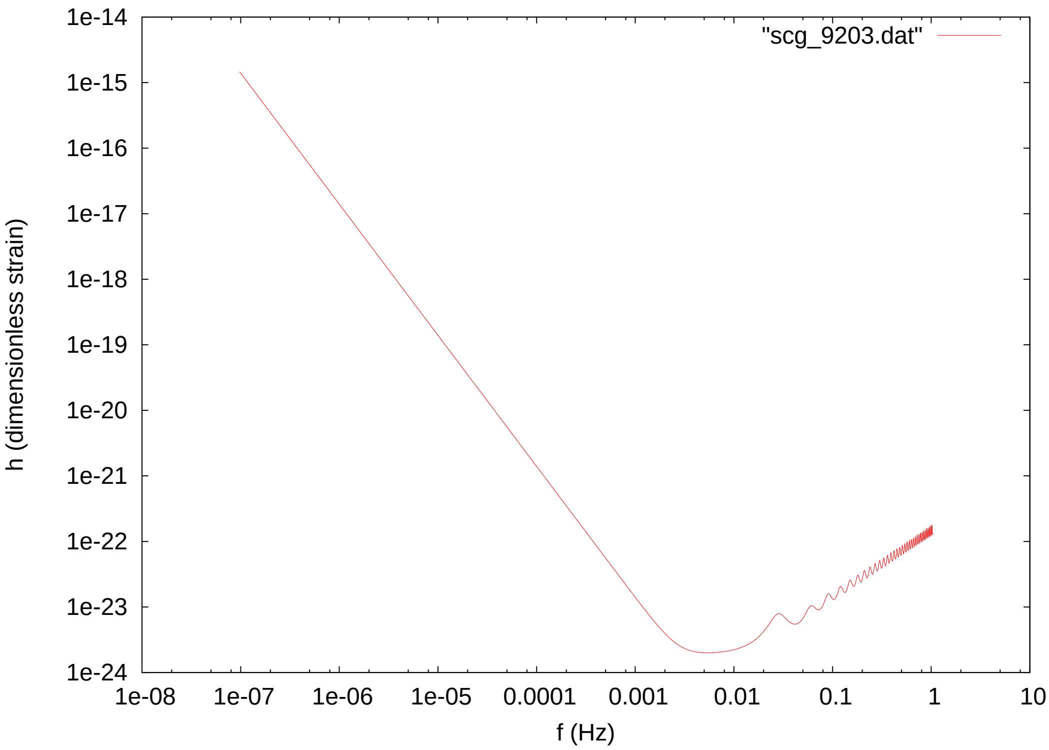
$$
F_\times = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\bar{\theta})\cos(2\bar{\phi})\sin(2\bar{\psi}) + \cos\bar{\theta}\sin(2\bar{\phi})\cos(2\bar{\psi}) \, . \tag{3.24}
$$

Itt $(\bar{\theta}, \bar{\phi})$ szögek határozzák meg a forrás helyzetét a detektorhoz képest úgy, hogy a detektor karjai mutatnak az x és y tengely mentén, a z tengely pedig függőleges. A $\bar{\psi}$ szög a konstans azimut és a gravitációs hullám polarizációs tengelye által bezárt szög.

4. fejezet

Szupernehéz fekete lyuk kettősök gravitációs sugárzásának jellemzői a LISA paramétertartományában

A LISA detektor érzékenységét a frekvencia függvényében mutatja a 4.1 ábra.



4.1. ábra. Általános LISA érzékenységi görbe. A dimenziótlan terhelést (h) ábrázoljuk a frekvencia függvényében [15]. Az ábra a [14] honlapon található érzékenységi görbe generátorral készült.

A frekvencia, tömeg és a szeparáció között a

$$T_N = 2\pi G m \left(\frac{r}{Gm}\right)^{3/2} = \frac{2}{f} \tag{4.1}$$

kifejezésből levezethető a következő összefüggés.

$$\frac{m}{M_\odot} = \frac{c^3}{\pi G M_\odot f}\left(\frac{Gm}{c^2 r}\right)^{3/2} = \frac{c^3}{\pi G M_\odot f}\varepsilon^{3/2} \tag{4.2}$$

Körpálya közelítés esetén a gravitációs sugárzásban megjelenik egy karakterisztikus frekvencia, mely a forrás távolságától a 4.3 egyenlet szerint függ[16]. Az egyenletben z a vöröseltolódás.

$$f_c = \frac{2f}{1+z} \tag{4.3}$$

A 4.2 egyenletből ki tudjuk fejezni a szeparációt a frekvencia függvényében.

$$f = \frac{c^3}{\pi G m}\frac{1+z}{2}\varepsilon^{3/2} \tag{4.4}$$

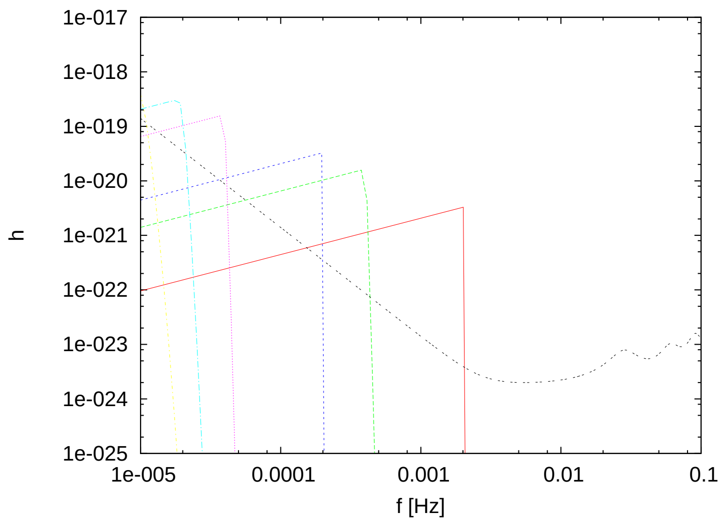
Ezt behelyettesítve a 3.22 egyenletbe megkapjuk a gravitációs hullám amplitúdójának frekvenciafüggését. Vezető rendben ez a következő:

$$h = C\frac{f_c^{2/3} G^{5/3} m^{5/3}}{c^4 D(z)}\frac{\nu}{(1+\nu)^2}\ , \tag{4.5}$$

ahol C a kettős helyzetétől függő konstans. A $D(z)$-t a 4.6 egyenlet határozza meg [17].

$$D(z) = \frac{(1+z)c}{H_0}\int\limits_{(1+z)^{-1}}^{1} \frac{dx}{(\Omega_m x + \Omega_\Lambda x^4)^{1/2}}\ , \tag{4.6}$$

ahol $\Omega_m = 0.274$ és $\Omega_\Lambda = 0.726$ kozmológiai konstansok, H_0 a Hubble paraméter jelenlegi értéke [18].



4.2. ábra. A fekete vonal jelenti a LISA detektor érzékenységét. A többi vonal fentről lefele $2\times10^8, 10^8, 5\times10^7, 10^7, 5\times10^6, 10^6\ M_\odot$ fekete lyuk kettősből származó gravitációs hullám amplitúdójának frekvenciafüggése. A tömegarány $\nu = 0.1$,a távolság $z = 6$.

A körfrekvencia időfejlődését vezető rendben a 4.7 egyenlet határozza meg[13].

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{96\eta m^{5/3}\omega^{11/3}}{5} \tag{4.7}$$

4.1. táblázat. Szupernehéz fekete lyukak által kibocsátott gravitációs sugárzás jellemzői a LISA űrdetektor $10^{-5} \div 1$ Hz frekvenciatartományában. Az idők $z = 6$ távolságú rendszerre számlt értékek. Első sor: a rendszer össztömege. Második sor: a gravitációs hullám frekvenciája a poszt-newtoni korszak végén ($\varepsilon = 0.1$). Harmadik sor: a $10^{-5} - \omega_f$ frekvenciatartományában töltött idő. Negyedik sor: a LISA érzékenységi küszöbe fölött eltöltött idő.

m/M_{nap}	10^6	5×10^6	10^7	5×10^7	10^8	2×10^8
$\omega_f[Hz]$	1.2×10^{-2}	2.5×10^{-3}	1.2×10^{-3}	2.5×10^{-4}	1.2×10^{-4}	6.4×10^{-5}
$t_f - t_{10^{-5}}$	$84 év$	$5.7 év$	$1.8 év$	$45 nap$	$14 nap$	$4 nap$
$t_f - t_{küszöb}$	$19 nap$	$20 nap$	$20 nap$	$17 nap$	$14 nap$	$4 nap$

Átrendezve az egyenletet és integrálva az idő kifejezésére kapjuk:

$$\Delta t = -\frac{15}{768}\eta^{-1}\left(\frac{Gm}{c^3}\right)^{-5/3}\left[\frac{1}{\omega_{final}^{-8/3}} - \frac{1}{\omega_{start}^{-8/3}}\right] \tag{4.8}$$

Itt figyelembe kell itt venni, hogy a képletben körfrekvenciával kell számolni, nekünk pedig csak frekvencia értékeink vannak, ezért az $f = \frac{\omega}{2\pi}$ összefüggéssel át kell még írni a frekvenciaértékeket. A minimum frekvencia értékhez a $10^{-5} Hz$-hez tartozó körfrekvenciát választottuk. A maximum frekvencia értékhez a 4.2 képletből $\varepsilon = 0.1$ értékhez számolt frekvenciát írjuk, így kapjuk a 4.1 táblázatban azt az időt, melyet a kettős rendszer gravitációs sugárzással tölt $10^{-5} Hz$-től a poszt-newtoni leírás végéig. A 4.5 képlet és a 4.1 ábrán látható érzékenységi görbe segítségével meghatároztató hogy mekkora frekvenciától lesz az amplitúdó az érzékenységi küszöb fölött, ezt a 4.2 ábrán láthatjuk.

5. fejezet

Kis tömegarányú fekete lyuk kettősök gravitációs hullámformái

A [12] cikkben meghatározták az közel-körpálya közelítés képleteit 1.5-ös rendig, ez után az α szög szerint sorfejtettek. Ez a sorfejtés $S \ll L$ esetben érvényes, ekkor a fekete lyukak tömegaránya közel 1. Mi kis tömegarányra akarunk közelítést adni, ekkor a folyamat végén(amikor a gravitációs sugárzás amplitúdója elég nagy, hogy észleljük) ahogy már korábban is beláttuk a β_1 szög lesz kicsi. Ezt a szöget a következő kifejezésekkel tudjuk felülről becsülni:

$$\begin{aligned} \cos\beta_1 &\leq \frac{S_1}{J} = \frac{1}{(1+\varepsilon^{-1/2}\nu)^{1/2}} \\ \sin\beta_1 &\leq \frac{L_N}{J} = \frac{1}{(1+\varepsilon^{1/2}\nu^{-1})^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

A számolások során ki kell használni azt, hogy $\frac{S_1}{L_N} \approx \varepsilon^{1/2}\nu^{-1}$ és $J = (L_N^2 + S_1^2)^{1/2}$. Ezekből a ν tömegarányra tudunk becslést adni.

$$\begin{aligned} \nu &\leq \varepsilon^{1/2} \times ((\frac{1}{\cos\beta_1})^2 - 1) \\ \nu^{-1} &\leq \varepsilon^{-1/2} \times ((\frac{1}{\sin\beta_1})^2 - 1) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ekkor vesszük β_1 szögfüggvényeinek sorfejtéseit 4. rendig, és minden rendre megállapítjuk hogy milyen értékekre ad még 2 tizedes jegy pontos becslést a sorfejtés.

$$\begin{aligned} \cos\beta_1 &\approx 1 - \frac{\beta_1^2}{2} + \frac{\beta_1^4}{24} \\ \sin\beta_1 &\approx \beta_1 - \frac{\beta_1^3}{6} \end{aligned} \quad (5.3)$$

A 5.1 táblázat tartalmazza rendenként a maximális szöget ameddig elég pontos a sorfejtés, és az ehhez az értékhez tartozó maximális tömegarányt.

A táblázat eredményei alapján a másod rendű sorfejtés esetén a maximális tömegarány $\nu = 8.3 \times 10^{-3}$. Ebben az esetben a β_1 szög a bespirálozás folyamata során végig kicsi. Ez a tömegarány nem tipikus érték, ez egy nagy és egy kis tömegű szupermasszív fekete lyuk ütközése esetén lehetséges. Másik lehetőség egy kis tömegű ($3 \times 10^6 M_\odot$) szupermasszív fekete lyuk és egy közepes tömegű fekete lyuk ütközése lehet. Ha detektálunk ilyen típusú gravitációs hullámot, az utalhat ilyen közepes tömegű fekete lyukak létezésére.

A sorfejtés elvégzéséhez először be kell vezetnünk a β_1 szöget a képletekbe. A folyamat

5.1. táblázat. Tömegarány becslés β_1 nagysága szerint. Első sor: a sorfejtés rendje. Második sor: a maximális szög melyre a szögfüggvények sorfejtése még 2 tizedes jegy pontosan megegyzik a pontos értékkel. Harmadik sor: A tömegarányok $\varepsilon = 0.1$ esetén.

rend	1	2	3	4
$\beta_1[°]$	5	9	14	20
ν	3×10^{-3}	8.3×10^{-3}	1.98×10^{-2}	4.16×10^{-2}

során a $\mathbf{L}_N$ és $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{J}$ körül precesszál, ekkor a következő összefüggések érvényesek [6].

$$\cos\alpha = \cos(\kappa_1 - \beta_1) \tag{5.4}$$

$$\sin\alpha = \sin(\kappa_1 - \beta_1) \tag{5.5}$$

Ezeket a képleteket kell behelyettesíteni a h_+ és $h_\times$ képleteinkbe. A végső képletekhez még az $\mathbf{S}_1$ komponenseit meg kell adni. Ezt a [11] cikkben bevezetett inerciarendszerben egyszerű kifejteni:

$$\begin{aligned} S_{1x} &= S_1 \sin\beta_1 \cos(\phi_1 - \phi_n) \\ S_{1y} &= S_1 \sin\beta_1 \sin(\phi_1 - \phi_n) \\ S_{1z} &= S_1 \cos\beta_1 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Itt $S_1 = \frac{G}{c} m^2 \eta \nu^{-1} \chi_1$[11]. Elvégezzük a behelyettesítéseket és sorfejtünk β_1-ben másod rendig. A behelyettesítések megnövelik az általános formula hosszát, amit a sorfejtés közel felére csökkent. Az eredményeket a dolgozat korlátozott terjedelme miatt csak első poszt-newtoni rendig a B függelék tartalmazza.

6. fejezet

Összegzés

A dolgozat célja a kis tömegarányú fekete lyuk kettősök gravitációs hullámformáinak meghatározása volt. Először sikeresen reprodukáltam a [8] cikk eredményeit a REDUCE szimbolikus programnyelvben írt saját fejlesztésű programmal.

A választott koordináták között olyan szöget kerestünk mely kis tömegarány esetén kicsi lesz, és lehet benne sorfejteni (ez a szög a β_1). A sorfejtés pontosságát 4. rendig meghatároztam, ezek után úgy döntöttünk hogy másod rendig érdemes elmenni a sorfejtésben.

A programom a megadott radiatív multipólus momentumokból és a mozgásegyenletekből kiszámolja a h^{ij} tenzort, elvégzi a közel-körpálya közelítést, meghatározza a h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotokat, elvégzi a megfelelő behelyettesítéseket és a sorfejtést. Ezzel megkaptam a kis tömegarányú fekete lyuk kettősök gravitációs hullámformáit.

A formulák hossza fontos, mert a hatalmas mennyiségű mérési adatból ki kell szűrni a jelet. Minél nagyobb a formula, annál tovább tart a kiértékelés. A kapott általános eredmények a koordinátáinkban hosszabb eredményeket adtak mint Kidder ereményei [8], a sorfejtés viszont jelentősen csökkentette az eredményeim hosszát. Ez csökkenteni fogja a mérési adatok kiértékelésének idejét.

Meghatároztam a gravitációs hullám amplitúdjának frekvencia függését. A detektor várható érzékenységének ismeretében kiszámoltam az időt amelyet a gravitációs hullám a detektor érzékenységi küszöb fölött tölt.

7. fejezet

Köszönetnyílvánítás

Köszönöm Dr. Gergely Árpád Lászlónak hogy a kutatásba bekapcsolódhattam, és a sok hasznos instrukciót és tanácsot. Köszönöm Keresztes Zoltánnak a munkám gyakorlati részében nyújtott segítséget. Köszönettel tartozom Drownik Mareknek is.

A. Függelék

A gravitációs hullámformák közel-körpálya közelítésben

A közel-körpálya közelítés eredményei 1.5-es poszt-newtoni rendig:

$$
\begin{aligned}
h^{ij} &= \frac{2G\mu}{c^4 D}\left(\frac{Gm}{r}\right)\Bigg[Q_c^{ij} + P^{0.5}Q_c^{ij}\left(\frac{Gm}{c^2 r}\right)^{1/2} \\
&\quad + PQ_c^{ij}\left(\frac{Gm}{c^2 r}\right) + \left(P^{1.5}Q_c^{ij}\right)\left(\frac{Gm}{c^2 r}\right)^{3/2}\Bigg]_{TT}, \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}
$$

ahol

$$
Q_c^{ij} = 2\left[\lambda^i\lambda^j - \hat{r}^i\hat{r}^j\right], \qquad \text{(A.2a)}
$$

$$
P^{0.5}Q_c^{ij} == \frac{1-\nu}{1+\nu}\left\{6(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{r}^{(i}\lambda^{j)} + (\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\lambda})\left[\hat{r}^i\hat{r}^j - 2\lambda^i\lambda^j\right]\right\}, \qquad \text{(A.2b)}
$$

$$
\begin{aligned}
PQ_c^{ij} &= \frac{2}{3}(1-3\eta)\Bigg\{(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{r}})^2\left[5\hat{r}^i\hat{r}^j - 7\lambda^i\lambda^j\right] - 16(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\lambda})\hat{r}^{(i}\lambda^{j)} \\
&\quad + (\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\lambda})^2\left[3\lambda^i\lambda^j - \hat{r}^i\hat{r}^j\right]\Bigg\} + \frac{1}{3}(19-3\eta)(\hat{r}^i\hat{r}^j - \lambda^i\lambda^j) \\
&\quad + \frac{2c}{Gm^2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\hat{r}^{(i}((\sigma - \mathbf{S})\times\hat{\mathbf{N}})^{j)}, \qquad \text{(A.2c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P^{1.5}Q_c^{ij} &= \frac{1-\nu}{1+\nu}\Bigg\{(1-2\eta)\Bigg[\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\lambda})^3\left(\hat{r}^i\hat{r}^j - 4\lambda^i\lambda^j\right) + \frac{1}{4}(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{r}})^2(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\lambda})\left(58\lambda^i\lambda^j - 37\hat{r}^i\hat{r}^j\right) \\
&\quad - \frac{65}{6}(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{r}})^3\hat{r}^{(i}\lambda^{j)} + 15(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\lambda})^2\hat{r}^{(i}\lambda^{j)}\Bigg] - (\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\lambda})\Bigg[\frac{1}{12}(101-12\eta)\hat{r}^i\hat{r}^j \\
&\quad - \frac{1}{2}(19-4\eta)\lambda^i\lambda^j\Bigg] - \frac{1}{6}(149-36\eta)(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{r}^{(i}\lambda^{j)}\Bigg\} \\
&\quad - \frac{2c}{m^2 G}\Bigg\{\lambda^i\lambda^j\left[\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}\cdot(2\mathbf{S}+3\sigma)\right] \\
&\quad - 6\hat{r}^i\hat{r}^j\left[\hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{N}}\cdot(\mathbf{S}+\sigma)\right] + 2\lambda^{(i}\left[\hat{\mathbf{r}}\times(\sigma)\right]^{j)} + \hat{r}^{(i}\left[\hat{\lambda}\times(4\mathbf{S}+5\sigma)\right]^{j)} \\
&\quad + 2(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\lambda})\left[(\sigma)\times\hat{\mathbf{N}}\right]^{(i}\hat{r}^{j)} + 2(\hat{\mathbf{N}}\cdot\hat{\mathbf{r}})\left[(\sigma)\times\hat{\mathbf{N}}\right]^{(i}\lambda^{j)}\Bigg\}, \qquad \text{(A.2d)}
\end{aligned}
$$

Itt $\hat{\mathbf{r}}$ az $\mathbf{r}$ irányú egységvektor. A h^{ij}-t behelyettesítve a 3.18-3.19 képletekbe kapjuk a polarizációs állapotokat. Ezek explicit kifejezése megtalálható a [12] cikk A appendixében. A [12] cikk eredményeiben (ahol $G = c = 1$) α helyére $\frac{3}{2}\pi - \phi_n$-t, ι helyére α-t kell helyettesíteni, továbbá a polarizációs vektorok $\frac{\pi}{2}$-vel való elforgatása miatt a képletek -1-el szorzódnak.

B. Függelék

Gravitációs hullámforma kis tömegarány esetén

Kis tömegarányra a gravitációs hullámformát 1. poszt-newtoni rendig a következő kifejezés adja:

$$h_{\substack{+\\\times}} = \frac{2G\mu}{c^4 D}\left(\frac{Gm}{r}\right)\left\{h^0_{\substack{+\\\times}} + \left(\frac{Gm}{c^2 r}\right)^{1/2}\frac{1-\nu}{1+\nu}h^{0.5}_{\substack{+\\\times}}\right. \tag{B.3}$$

$$\left. + \left(\frac{Gm}{c^2 r}\right)(h^1_{\substack{+\\\times}} + \frac{1+\nu}{\nu}h^{1SO}_{\substack{+\\\times}})\right\} \tag{B.4}$$

Minden poszt-newtoni tagot a β_1 hatványai szerint rendezve adom meg($k = 0;\ 0.5;\ 1$):

$$h^k_{\substack{+\\\times}} = h^{k\ 0}_{\substack{+\\\times}} + h^{k\ 1}_{\substack{+\\\times}}\beta_1 + h^{k\ 2}_{\substack{+\\\times}}\beta_1^2 \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
h^{0\ 0}_{+} = {} & (-4\cos\kappa_1\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) - 12\cos\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +3\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta) - 3\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi) \\
& -\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta) + 3\cos(2\psi) \\
& -3\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta) - 9\cos(2\phi_n)\cos(2\psi) \\
& -3\cos(2\psi)\cos(2\theta) - 3\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi) \\
& -4\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n + 8\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta))/4 \qquad \text{(B.6a)}\\
h^{0\ 1}_{+} = {} & (-4\cos\kappa_1\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) + 4\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& -\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1) - 3\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1) \\
& +3\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1) - 3\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1) \\
& -2\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) - 6\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi))/2 \qquad \text{(B.6b)}\\
h^{0\ 2}_{+} = {} & (\cos\kappa_1\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) + 3\cos\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta) + 3\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi) \\
& +3\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi) - 3\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta) \\
& +4\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n - 2\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta))/2 \qquad \text{(B.6c)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{0\,0} &= -4\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi)+\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&\quad -2\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta+3\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&\quad -4\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \qquad \text{(B.7a)}\\
h_{\times}^{0\,1} &= 2(2\cos\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta+2\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta\\
&\quad -2\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)+\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)) \qquad \text{(B.7b)}\\
h_{\times}^{0\,2} &= 2(\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi)-\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&\quad +2\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta+\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta) \qquad \text{(B.7c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_+^{0.5\ 0} = {} & (9\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +27\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -5\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -15\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -63\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -9\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta+45\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& +35\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +5\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta-37\cos\kappa_1\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +63\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +189\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -31\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -93\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta-25\cos(2\kappa_1)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +99\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta-35\cos(2\phi_n)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +117\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta+9\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& -51\cos\kappa_1\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta-39\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& -27\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& +27\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -81\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& +9\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -13\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& -15\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -5\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1-69\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& +81\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& -45\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +63\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta+45\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +39\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta+25\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -45\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& +81\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -135\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta+27\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -23\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta-41\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -45\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta+45\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +54\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin\psi \\
& +18\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin\psi-23\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& -21\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1-45\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +26\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin\psi+23\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& +21\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1-2\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin\psi)/16 \qquad \text{(B.8a)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_+^{0.5\;1} \;=\; & (-81\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta \\
& -27\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta \\
& +45\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta \\
& +15\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\psi\cos\theta+75\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos\psi\cos\theta \\
& +135\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta \\
& -135\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta \\
& -75\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta+25\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\psi\cos\theta \\
& -27\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta \\
& -9\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta+71\cos\kappa_1\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta \\
& +11\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta-71\cos\kappa_1\cos\psi\cos\theta \\
& -135\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta+135\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta \\
& +27\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& +81\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -15\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -45\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -189\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -108\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)\sin\psi \\
& -27\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -36\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\sin\psi+4\cos(2\kappa_1)\cos\theta\sin(2\phi_n)\sin\psi \\
& +105\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -52\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)\sin\psi+15\cos(2\kappa_1)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -54\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\psi\sin\theta \\
& +81\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -162\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\psi\sin\theta \\
& +243\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -26\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\psi\sin\theta \\
& -41\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& -78\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\psi\sin\theta-123\cos(2\phi_n)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& +162\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\psi\sin\theta \\
& -27\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& +126\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\psi\sin\theta+99\cos(2\psi)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& +78\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\psi\sin\theta-27\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta \\
& +19\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\theta+18\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\psi\sin\theta)/16
\end{aligned}
\tag{B.9a}
$$

$$
\begin{aligned}
h_+^{0.5\,2} \;=\; & (-81\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -243\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +45\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +135\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +567\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +81\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -315\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -45\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta+33\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -27\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -81\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +11\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta+57\cos\kappa_1\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -351\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& -153\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta+191\cos\kappa_1\cos(2\theta)\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta \\
& +108\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& -243\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +324\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& -81\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +52\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta+55\cos(2\phi_n)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +135\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +156\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta+45\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -324\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta \\
& +405\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -252\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta-405\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -156\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta-225\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -36\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta+225\cos(2\kappa_1)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -189\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -63\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1+101\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +135\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1-135\cos(2\psi)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -216\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin\psi \\
& -72\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin\psi-79\cos(2\theta)\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& -104\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin\psi+79\cos\psi\cos\theta\sin\kappa_1 \\
& +8\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin\psi)/32
\end{aligned}
\tag{B.10a}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{0.5\ 0} &= (9\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&-5\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&-27\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&+15\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta)+23\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi \\
&+63\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&-31\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta)-4\sin(2\kappa_1)\sin\psi \\
&-9\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta)+9\cos\kappa_1\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&+27\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi \\
&+13\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi+\cos(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi \\
&-18\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n) \\
&-9\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi-4\cos(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\sin\psi \\
&+10\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n) \\
&+36\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin\psi \\
&+45\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi+4\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin\psi \\
&+16\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin\psi+23\cos(2\phi_n)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi \\
&-54\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)+8\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n) \\
&+45\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi+30\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n))/8 \quad \text{(B.11a)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{0.5\ 1} &= (54\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin(2\phi_n) \\
&-30\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\psi\sin(2\phi_n) \\
&+18\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin(2\phi_n) \\
&-10\cos\kappa_1\cos(2\theta)\cos\psi\sin(2\phi_n)-8\cos\kappa_1\cos\psi\sin(2\phi_n) \\
&-72\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\psi \\
&+27\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\theta) \\
&-32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin\psi+8\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin\psi \\
&-15\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\theta) \\
&-81\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\theta) \\
&-8\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin\psi+45\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\theta) \\
&+8\cos(2\kappa_1)\sin\psi+81\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\theta) \\
&+54\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi \\
&-41\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\theta) \\
&+26\cos(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi \\
&-63\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\theta) \\
&-18\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi \\
&+39\cos\phi_n\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\theta)+2\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi)/8 \quad \text{(B.11b)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_\times^{0.5\;2} \;=\;& (-81\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&+45\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&+243\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&-135\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) - 16\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin\psi \\
&-27\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&+11\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) - 99\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) \\
&+51\cos\kappa_1\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta) - 108\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi \\
&-52\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi - 8\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n) \\
&+162\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n) + 16\sin(2\kappa_1)\sin\psi \\
&+36\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi - 90\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n) \\
&-4\cos(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi - 144\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin\psi \\
&-64\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin\psi + 16\cos(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\sin\psi \\
&+126\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n) \\
&-70\cos(2\theta)\cos\psi\sin\kappa_1\sin(2\phi_n))/16
\end{aligned} \tag{B.12a}
$$

$$
\begin{aligned}
h_+^{1\,0} \;=\;& ((1-3\eta)(-64\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-128\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+192\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+4\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+8\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-12\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)-44\cos^2(2\kappa_1)\\
&+448\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+128\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-64\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+8\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\\
&-28\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-104\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+4\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-192\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-384\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+576\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)-12\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\\
&-4\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+156\cos\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-8\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+12\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-448\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+88\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\\
&-128\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+64\cos\kappa_1\cos(2\psi)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+12\cos\kappa_1\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+24\cos\kappa_1\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-8\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)-3\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\\
&-16\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)+24\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\\
&+\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)+2\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\\
&+4\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\theta)+8\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\\
&+112\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)+2\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\\
&+32\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)-16\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\\
&-14\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)-4\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\\
&-56\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)-16\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\\
&-136\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)+48\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\\
&+17\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)-6\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\\
&-11\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)+68\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\theta)-24\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\theta)\\
&-112\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&-224\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\\
&+336\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)-32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\\
&+2\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&+4\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)-6\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\\
&+56\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\theta)+112\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\\
&-168\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)+224\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&-64\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+64\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\\
&-64\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-4\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&+384\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+8\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-116\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)-16\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\\
&+384\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+8\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+40\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)-112\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\\
&-24\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)+408\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\\
&-72\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+16\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\\
&+336\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)-168\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\theta)\\
&+192\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+32\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)-64\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-368\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)-6\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&-640\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-24\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-40\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)-272\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\\
&-128\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+8\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+46\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\\
&+40\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-96\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+184\cos(2\kappa_1)\\
&+152\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+32\cos(2\kappa_1)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n-136\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&-3\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)-6\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\\
&+9\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)+68\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\theta)+136\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\\
&-204\cos^2(2\phi_n)-336\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&-448\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-96\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)-448\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+48\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)+2\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&+640\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+8\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+40\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)+640\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+104\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+118\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\\
&+168\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)-8\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+224\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+48\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\\
&-152\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)-24\cos(2\phi_n)\\
&+224\cos(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n-72\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&-448\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+176\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\\
&-192\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n-104\cos^2(2\psi)-11\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&+128\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+8\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+46\cos(2\psi)\cos(2\theta)\\
&-384\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)+24\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-35\cos(2\psi)+36\cos^2(2\theta)+24\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&+224\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n-88\cos(2\theta)\\
&+8\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)+96\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+52))/96\\
&+(3(4\cos\kappa_1\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+12\cos\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)+3\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\\
&-3\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)+3\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)+3\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\\
&+9\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)+3\cos(2\psi)\cos(2\theta)+4\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-3\cos(2\psi)-8\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)))/4
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

$$
\begin{aligned}
h_+^{1\,1} \;=\; & ((1-3\eta)(-288\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& -288\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +18\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +54\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +480\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +96\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& -30\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& -114\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +32\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +32\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& -10\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +2\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta)-8\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& -352\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +32\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +14\cos\kappa_1\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta)+74\cos\kappa_1\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta) \\
& +64\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& +64\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& -8\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& -8\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\ \phi_N \\
& -32\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& -32\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& -192\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& +64\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n-32\cos^2(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& +24\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& +96\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n-12\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\sin(2\kappa_1) \\
& -8\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1) \\
& -16\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1) \\
& +24\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1) \\
& +\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1) \\
& +2\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1) \\
& -3\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1) \\
& +4\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)+8\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1) \\
& +112\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1) \\
& +32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1) \\
& +224\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& -16\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1) \\
& +224\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n \\
& -48\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-14\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&-96\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-4\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&-4\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+144\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+2\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\\
&-52\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+3\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-56\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+6\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-16\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&-112\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-9\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+8\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\\
&-112\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-136\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+48\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+224\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n+88\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\\
&+96\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+336\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+17\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+96\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-6\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)-4\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-48\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)-11\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\\
&-12\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-21\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+68\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&-78\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)-24\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&-112\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n+3\cos(2\kappa_1)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-44\cos(2\kappa_1)\sin(2\kappa_1)-48\cos(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-56\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&-112\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)+168\cos^2(2\phi_N)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\\
&+\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)+2\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&-3\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)+28\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+56\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)-84\cos^2(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\\
&+112\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)+32\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&-32\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n-16\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\\
&-32\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n-2\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&-80\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-160\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-58\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+4\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+240\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+20\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)+4\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-56\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)-16\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+2\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+16\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n+8\cos(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\\
&-3\cos(2\phi_n)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+16\cos(2\phi_n)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+168\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)+16\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+96\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n-184\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\\
&-32\cos^2(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n-20\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+112\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-3\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)-12\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+32\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-16\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)+23\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\\
&+4\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n-11\cos^2(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-84\cos^2(2\theta)\sin(2\kappa_1)-46\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)-\\
&8\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)-48\cos(2\theta)\sin(2\theta)\sin\phi_n+41\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+92\sin(2\kappa_1)+16\sin(2\theta)\sin\phi_n))/24+(3(4\cos\kappa_1\cos\phi_n\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-4\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\theta)\sin\phi_n+\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+3\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)-3\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\\
&+3\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)+2\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&+6\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)))/2
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

$$
\begin{aligned}
h_+^{1\,2} \;=\; & ((1-3\eta)(144\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +288\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -432\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -9\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -18\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +27\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -1008\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -288\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +144\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +63\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +234\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -9\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)-15\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -16\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -32\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +48\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +5\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +10\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +560\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +160\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -80\cos\kappa_1\cos(2\psi)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)-31\cos\kappa_1\cos^2(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& -110\cos\kappa_1\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)-35\cos\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi) \\
& +32\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta) \\
& +64\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)+48\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n) \\
& -96\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)-4\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta) \\
& -8\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)+12\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi) \\
& -16\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\theta)-32\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta) \\
& -448\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta) \\
& -128\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)+64\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi) \\
& +56\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta) \\
& +16\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)-8\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi) \\
& +224\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)+64\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta) \\
& -32\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)+544\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta) \\
& -192\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)-352\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi) \\
& -68\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)+24\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta) \\
& -272\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\theta)+96\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\theta)+176\cos^2(2\kappa_1) \\
& +112\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)+44\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi) \\
& +224\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta) \\
& -2\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)-336\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)
\end{aligned}
$$

$$-4\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)+6\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)$$
$$-56\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\theta)-112\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)$$
$$+168\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)-224\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)$$
$$+256\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$-64\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)$$
$$+256\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$+32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)+4\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)$$
$$-864\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)$$
$$-32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$+116\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)$$
$$-864\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)$$
$$-32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$-40\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)+112\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)$$
$$+54\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)$$
$$-128\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$+32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)-16\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)$$
$$+162\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)$$
$$-128\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$-336\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)-32\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)$$
$$-768\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$+256\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$+368\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)+6\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)$$
$$+1440\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)$$
$$+96\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$+40\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)-46\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)$$
$$+288\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)$$
$$-32\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$+168\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\theta)+16\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)$$
$$-90\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)$$
$$+384\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$
$$-342\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)$$
$$-128\cos(2\kappa_1)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n-6\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)$$
$$-184\cos(2\kappa_1)-16\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)$$
$$-32\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)+48\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\psi)$$
$$+2\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)+4\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)$$
$$+16\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)-24\cos^2(2\phi_n)$$
$$+224\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)+8\cos^2(2\phi_n)\cos^2(2\theta)$$
$$+448\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n$$

$$
\begin{aligned}
&+64\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)-8\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\\
&+448\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-32\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)-28\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)\\
&-544\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-8\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&-544\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-104\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+4\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\\
&-112\cos(2\phi_n)\cos^2(2\theta)-32\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\\
&+26\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-224\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+110\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-224\cos(2\phi_n)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+16\cos(2\phi_n)\\
&-272\cos^2(2\psi)\cos^2(2\theta)+96\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\\
&+448\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+192\cos^2(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+176\cos^2(2\psi)\\
&+34\cos(2\psi)\cos^2(2\theta)-12\cos(2\psi)\cos(2\theta)\\
&+608\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-8\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n\\
&+224\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-24\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n-22\cos(2\psi)+136\cos^2(2\theta)\\
&-46\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)\\
&-224\cos(2\theta)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n-48\cos(2\theta)\\
&-154\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)-96\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n-88))/48\\
&+(3(-\cos\kappa_1\cos(2\theta)\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)-3\cos\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin(2\psi)\\
&-\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)-3\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\\
&+3\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)-3\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\\
&-4\cos(2\psi)\sin(2\kappa_1)\sin(2\theta)\sin\phi_n+2\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin(2\theta)))/2
\end{aligned}
\tag{B.15}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{1\,0} \;=\; & ((1-3\eta)(-64\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +64\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +4\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -4\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +224\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -96\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -32\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +32\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -32\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +28\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -28\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos\theta\sin(2\psi)+4\cos\kappa_1\cos^2(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -192\cos\kappa_1\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +192\cos\kappa_1\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -4\cos\kappa_1\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -224\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +96\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +48\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi)-96\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +96\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -28\cos\kappa_1\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi)+28\cos\kappa_1\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +8\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -8\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -4\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +4\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -56\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +24\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +7\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -3\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +28\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)-12\cos^2(2\kappa_1)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -48\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta \\
& +112\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -16\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta \\
& -112\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +6\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta \\
& -2\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -288\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
& +2\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-96\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&+24\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&-56\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&+24\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&+8\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+56\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&+24\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&+80\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&-112\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&+48\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+48\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-10\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+26\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-32\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&-6\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&-6\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)-24\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+32\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&-40\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+56\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)-24\cos(2\kappa_1)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-40\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&-8\cos(2\kappa_1)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&-336\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+136\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-112\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&-136\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&+18\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+3\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-480\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&+38\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&-3\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)-72\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-160\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&+168\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+24\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&+56\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta+68\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&+56\cos(2\phi_n)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&+112\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+168\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+16\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta \\
&-68\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
&-38\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta \\
&-\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
&-352\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&-2\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta-39\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
&-160\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&-56\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta-84\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
&-8\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta-8\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta \\
&+36\cos\theta\sin(2\phi_n)+72\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta))/24 \\
&+3(4\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi) \\
&-\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
&+2\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta-3\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
&+4\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta)
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

$$
\begin{aligned}
h_\times^{1\,1} \;=\;& ((1-3\eta)(216\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&+72\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&-18\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&-18\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&+24\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&-24\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&+30\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&+6\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&-24\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&-8\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&+6\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&-2\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&+72\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&+56\cos\kappa_1\cos(2\psi)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&-18\cos\kappa_1\cos(2\theta)\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta-22\cos\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta \\
&+48\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta \\
&+16\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta \\
&-6\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta \\
&-2\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta \\
&-24\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta \\
&-8\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\theta+24\cos^2(2\kappa_1)\cos\phi_n\sin\theta \\
&-80\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta \\
&-48\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta \\
&+10\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta \\
&+6\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta+40\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta \\
&-48\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi) \\
&+48\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi) \\
&+3\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi) \\
&-3\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi) \\
&+168\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta \\
&+8\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n) \\
&+56\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta \\
&-8\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n) \\
&-9\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta \\
&+168\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi) \\
&-\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n) \\
&-19\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta \\
&-72\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&-84\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta\\
&-24\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&-4\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&-28\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\theta\\
&+4\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&-56\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta\\
&-56\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&-8\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta\\
&+24\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&+19\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta\\
&+24\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&+7\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&+\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta+4\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\sin\theta\\
&+28\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta\\
&-24\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&-3\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&+21\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&+28\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&-21\cos(2\kappa_1)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)-\cos^2(2\phi_n)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&-12\cos(2\kappa_1)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&-80\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&+80\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&+\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&-24\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta\\
&+56\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&-8\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta\\
&-56\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&+3\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta\\
&+56\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&-\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&+\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta\\
&-24\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&+\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&+12\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta\\
&-16\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&-28\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&+4\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin\theta+12\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+28\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&+40\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta\\
&-56\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&+24\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta+24\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&-5\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta-3\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta\\
&+40\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&+13\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)\\
&-40\cos(2\psi)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)-12\cos\phi_n\sin\theta\\
&-3\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)-20\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin\theta\\
&+7\cos(2\theta)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)-7\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)\\
&+28\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)-12\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n)))/6\\
&+6(-2\cos\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta-2\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin\theta\\
&+2\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\psi)-\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\kappa_1)\sin(2\phi_n))
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{1\,2} \;=\;& ((1-3\eta)(144\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -144\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -9\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +9\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -504\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +216\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +72\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -72\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +72\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -63\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +63\cos\kappa_1\cos(2\kappa_1)\cos\theta\sin(2\psi)+48\cos^2(2\kappa_1)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -16\cos\kappa_1\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +16\cos\kappa_1\cos^2(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +5\cos\kappa_1\cos^2(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -5\cos\kappa_1\cos^2(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +280\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -120\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -32\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -12\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi)-35\cos\kappa_1\cos\theta\sin(2\psi) \\
& +8\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -8\cos\kappa_1\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\psi)+35\cos\kappa_1\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\psi) \\
& -32\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +32\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +4\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -4\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +16\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -16\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +224\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -96\cos^2(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -28\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +12\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -112\cos^2(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +192\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta \\
& -112\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& +64\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta \\
& +112\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n) \\
& -24\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta \\
& +2\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)
\end{aligned}
$$

$+648\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$-8\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$-2\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$+216\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$-96\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$+56\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$-54\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$-32\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$-56\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$-54\cos(2\kappa_1)\cos(2\phi_n)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$-320\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$+112\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$-192\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$-48\cos(2\kappa_1)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$+40\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$-26\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$+72\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$+24\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$+6\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$-72\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$+160\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$-56\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$+90\cos(2\kappa_1)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$+96\cos(2\kappa_1)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta+24\cos(2\kappa_1)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$+18\cos(2\kappa_1)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$+336\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$+16\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$+112\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$-16\cos(2\phi_n)\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$-18\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$-2\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$+408\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$-38\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$+2\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$+136\cos(2\phi_n)\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$
$-168\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta$
$-8\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)$
$-30\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta$

$$
\begin{aligned}
&-56\cos(2\phi_n)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta+8\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-38\cos(2\phi_n)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&-112\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&-112\cos^2(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-16\cos^2(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta+48\cos^2(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&+38\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+14\cos(2\psi)\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&+120\cos(2\psi)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&+2\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta-6\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&+8\cos(2\psi)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta+56\cos(2\theta)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&+56\cos(2\theta)\cos\theta\sin(2\phi_n)+42\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta\\
&+8\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta-24\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-10\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta))/12\\
&+6(-\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\theta\sin(2\psi)\\
&+\cos(2\kappa_1)\cos(2\psi)\cos\theta\sin(2\phi_n)-2\cos(2\psi)\cos\phi_n\sin(2\kappa_1)\sin\theta\\
&-\sin\kappa_1\sin(2\psi)\sin\phi_n\sin\theta) \qquad \text{(B.18)}
\end{aligned}
$$

$$
h_+^{1SO\ 0}=(2\sin\theta\eta(\cos\kappa_1\cos\phi_n\sin\psi-\cos\psi\sin\phi_n)) \qquad \text{(B.19)}
$$

$$
\begin{aligned}
h_+^{1SO\ 1} = {} & (2\eta(-\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos\phi_1\cos\theta\sin\psi\\
&-\cos\kappa_1\cos\theta\sin(2\phi_n)\sin\phi_1\sin\psi+\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin\psi\sin\theta\\
&-\cos(2\phi_n)\cos\psi\cos\theta\sin\phi_1+\cos\phi_1\cos\psi\cos\theta\sin(2\phi_n)\\
&-\cos\phi_1\sin\kappa_1\sin\phi_n\sin\psi\sin\theta+\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin\phi_1\sin\psi\sin\theta)) \qquad \text{(B.20)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_+^{1SO\ 2} = {} & (\eta(2\cos\kappa_1\cos\phi_1\sin\phi_n\sin\psi\sin\theta-2\cos\kappa_1\cos\phi_n\sin\phi_1\sin\psi\sin\theta\\
&-2\cos\kappa_1\cos\phi_n\sin\psi\sin\theta-2\cos(2\phi_n)\cos\phi_1\cos\theta\sin\kappa_1\sin\psi\\
&+\cos\psi\sin\phi_n\sin\theta-2\cos\theta\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin\phi_1\sin\psi)) \qquad \text{(B.21)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_\times^{1SO\ 0} = {} & (\eta(-\cos\kappa_1\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi-\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin\psi\\
&-\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta)+\sin\kappa_1\sin\psi)) \qquad \text{(B.22)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_\times^{1SO\ 1} = {} & (\eta(-\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin\phi_1\sin\psi\\
&-3\cos\kappa_1\cos(2\phi_n)\sin\phi_1\sin\psi\\
&+\cos\kappa_1\cos(2\theta)\cos\phi_1\sin(2\phi_n)\sin\psi\\
&+\cos\kappa_1\cos(2\theta)\sin\phi_1\sin\psi+2\cos\kappa_1\cos(2\theta)\sin\psi\\
&+3\cos\kappa_1\cos\phi_1\sin(2\phi_n)\sin\psi-\cos\kappa_1\sin\phi_1\sin\psi\\
&-2\cos\kappa_1\sin\psi+\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\cos\phi_1\cos\psi\\
&+3\cos(2\phi_n)\cos\phi_1\cos\psi+\cos(2\theta)\cos\phi_1\cos\psi\\
&+\cos(2\theta)\cos\psi\sin(2\phi_n)\sin\phi_1+3\cos\psi\sin(2\phi_n)\sin\phi_1\\
&-2\cos\phi_1\cos\phi_n\sin\kappa_1\sin(2\theta)\sin\psi-\cos\phi_1\cos\psi\\
&-2\sin\kappa_1\sin(2\theta)\sin\phi_1\sin\phi_n\sin\psi-2\sin\kappa_1\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi))/2 \qquad \text{(B.23)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{1SO\ 2} \;=\;& (\eta(2\cos\kappa_1\cos\phi_1\cos\phi_n\sin(2\theta)\sin\psi \\
&+2\cos\kappa_1\sin(2\theta)\sin\phi_1\sin\phi_n\sin\psi \\
&+2\cos\kappa_1\sin(2\theta)\sin\phi_n\sin\psi+2\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin\psi \\
&-\cos(2\phi_n)\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin\phi_1\sin\psi \\
&-3\cos(2\phi_n)\sin\kappa_1\sin\phi_1\sin\psi \\
&+\cos(2\theta)\cos\phi_1\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin\psi \\
&+\cos(2\theta)\sin\kappa_1\sin\phi_1\sin\psi+3\cos\phi_1\sin\kappa_1\sin(2\phi_n)\sin\psi \\
&+\cos\phi_n\cos\psi\sin(2\theta)-\sin\kappa_1\sin\phi_1\sin\psi-2\sin\kappa_1\sin\psi))/2 \qquad \text{(B.24)}
\end{aligned}
$$

Irodalomjegyzék

[1] http://www.ligo.caltech.edu

[2] R. D. Blandford, H. Netzer, L. Woltjer, Active Galactic Nuclei: Saas-Fee Advanced Course 20. Lecture Notes 1990. Swiss Society For Astrophysics And Astronomy, Springer (2008).

[3] http://www.esa.int/esaSC/120397_index_0_m.html

[4] http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/know_l2/active_galaxies.html

[5] http://lisa.nasa.gov/

[6] L. Á. Gergely, P. L. Biermann, *Astrophys. J.* **697**, 1621 (2009).

[7] K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 299 (1980).

[8] L. Kidder, *Phys. Rev.* D **52**, 821 (1995).

[9] L. Á. Gergely, Z. I. Perjés, M. Vasúth, *Phys .Rev.* D **58** 124001 (1998).

[10] Z. Keresztes, B. Mikóczi, L. Á. Gergely, M. Vasúth, *J. Phys. Conf. Ser.* **228**,012053 (2010).

[11] L. Á. Gergely, *Phys. Rev.* D **81**, 084025 (2010).

[12] K. G. Arun, A. Buonanno, G. Faye, E. Ochsner, *Phys. Rev.* D **79**, 104023 (2009).

[13] B. Mikóczi, M. Vasúth, L. Á. Gergely, *Phys. Rev.* D **71**, 124043 (2005).

[14] http://www.srl.caltech.edu/~shane/sensitivity/MakeCurve.html

[15] http://www.slac.stanford.edu/econf/C0507252/papers/T023.PDF

[16] J. Stuart B. Wyithe, A.Loeb, *Astrophys. J.* **590**, 691 (2003).

[17] V. Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology, Cambridge Univ. Press (2005).

[18] E. Komatsu, J. Dunkley, M. R. Nolta, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. Limon, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, S. S. Meyer, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, E. L. Wright, *Astrophys .J. Suppl.* **180**, 330 (2009).