

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi és Informatikai Kar

ELMÉLETI FIZIKA TANSZÉK

Fizika BSc

Szakedolgozat

GALAKTIKUS DINAMIKA:

Rotációs görbék és sebességdiszperzió

GALACTIC DYNAMICS:

Rotation Curves And Velocity Dispersion

Simkó Attila Tibor

Témavezetők:

Kun Emma

Dr. Keresztes Zoltán

Szeged, 2016

Tartalomjegyzék

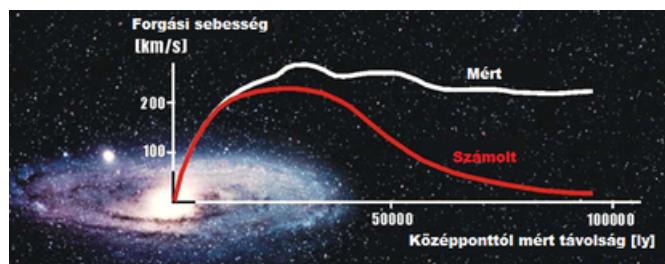
1. Bevezetés	2
2. A galaxisok forgási sebessége	4
2.1. Sebességtérkép	4
2.2. Fényességeloszlás	6
2.3. Modellezés	9
3. Ütközésmentes Boltzmann-egyenlet	12
4. A Jeans-egyenletek	14
4.1. Jeans-féle kontinuitási-, és mozgásegyenletek	14
4.2. Hengerszimmetrikus Jeans-egyenletek	15
4.3. A Jeans-egyenletek egyszerűsítése	17
5. A sebességszórás számolása	19
6. Sötét anyag modellek	21
6.1. Az illesztések kiértékelése	24
7. Összefoglalás	25
8. Mellékletek	26
9. Jövőbeli tervek	28
10. Köszönetnyilvánítás	28
11. Nyilatkozat	28

1. Bevezetés

A szakdolgozatom során feladatomban volt egy, az M104 (Sombrero) nevű galaxis szerkezetét vizsgáló cikk [1] értelmezése, az abban használt módszerek elsajátítása, használata. A téma megismerésében sokat segített Binney és Merrifield könyve [2], Željko Ivezić asztrofizika előadássorozata [3], valamint a témavezetőim által írt, hasonló témájú cikk [4].

A galaxisokat csillagok, valamint csillagközi por- és gázfelhők építik fel, alakjuk és fényességük szerint különböző csoportokba oszthatók. Az ismert galaxisok legnagyobb része elliptikus. Ebbe a csoportba tartoznak számos kisebb méretű törpe galaxisok is. Az elliptikus galaxisok általában kevés por- és gázanyagot, valamint idősebb csillagokat tartalmaznak. A spirálgalaxisok ezzel szemben sok por- és gázanyagot, számos fiatal csillagot tartalmaznak. Magjukból feltekeredett karok indulnak ki, ezeknek két változatuk van: spirálok és küllős spirálok. A többi galaxis nem rendelkezik jól meghatározott maggal és szerkezettel, ezeket irreguláris galaxisoknak nevezzük. Fényességük alapján a galaxisokat nagy és kis felületi fényességű galaxisokra, azaz High Surface Brightness és Low Surface Brightness galaxisokra oszthatjuk (a továbbiakban HSB és LSB). A szakdolgozatom során 5 db HSB és 3 db LSB spirál, valamint egy küllős LSB és egy irreguláris LSB galaxist vizsgáltam.

A vizsgált galaxisokról két kiinduló adat állt rendelkezésemre. Az egyik egy 2 dimenziós (2D) fényességeloszlás, a másik pedig egy 2D sebességtérkép, ezek a felületi fényességet és a rotációs sebességet adják meg a galaxis különböző pontjaiban, a látóirányra projektálva. Az alábbiakban a fényességeloszlásból készített rotációs görbék modellezését mutatjuk be, valamint ismertetjük az így számolt és a közvetlenül mért forgásgörbék közötti különbség (1. ábra) egy lehetséges feloldását.



1. ábra. A forgásgörbék közti különbség.

Forrás: <http://bit.ly/1PqPVaY>.

A galaxisok látható komponense a barionikus anyag, aminek az eloszlása fényességméréssel közvetlenül is mérhető. Látni fogjuk azonban, hogy a galaxisok mért forgási sebességének magyarázatához szükséges egy másik, tömeggel ugyancsak rendelkező, de nem világító anyagforma feltételezése, ezt hívjuk sötét anyagnak. A szükséges ismeretek megszerzése után elkészítettem a 10 vizsgált galaxis forgási görbáját, először kizárólag barionikus komponenseket feltételezve, majd különböző sötét anyag eloszlások bevezetésével. Az illesztéseket különböző statisztikai módszerekkel kiértékeltem.

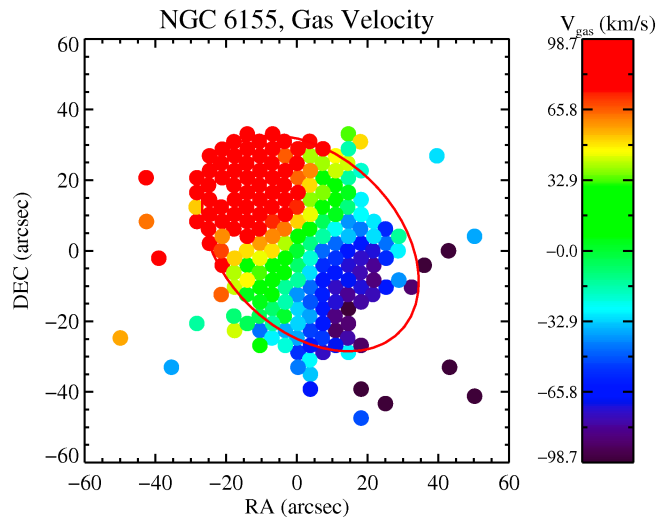
Mivel az elliptikus galaxisoknak nincs kitüntetett rotációs síkja, a rendszer átlagsebessége mellett a pekuliáris sebességét, a sebességdiszperziót is számoljuk és mérjük. Ennek vizsgálatához először ismertetem az ütközésmentes Boltzmann egyenletet, majd az abból következő Jeans-egyenletek hengersizimetrikus alakját. Az egyenletekben az ismeretlenek számának csökkentéséhez különböző feltevéseket vizsgálok. Ezután foglalkozok azzal is, hogy az így nyert térbeli sebességdiszperziót hogyan projektálhatjuk a látóirányra, hogy összehasonlíthassuk a mérésből kapott diszperzióval.

2. A galaxisok forgási sebessége

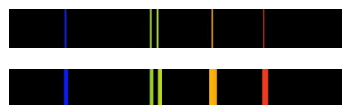
2.1. Sebességtérkép

Sebességméréshez a látóirányú galaxis különböző pontjaiból kiinduló fény spektrumát vizsgáljuk. A spektrum a galaxis összetételétől függően különböző emissziós vonalakkól áll. Ezt a jelenséget atomfizikából már jól ismerjük, ezek a vonalak a fénykibocsátó közeg sebességétől függően a Doppler-hatás miatt eltolódnak. A Doppler-eltolódott vonalakat összehasonlítva egy referenciavonallal (legtöbbször a hidrogén Balmer-alfával, $H\alpha$) kiszámolható az eltolódás mértéke, melyből meghatározhatjuk az adott pont látóirányú sebességét. Ezeket az értékeket ábrázolva egy 2D sebességtérképet (2. ábra felső része) kapunk.

A sebességdiszperzió a sebességeloszlás szerint, egy adott pontban várt sebességtől való eltérés mértékét jellemzi, ezáltal a spektrumban különböző mértékű eltolódást jelent. Mivel a mért spektrumot különböző sebességű csillagok összességéként észleljük, így a diszperzió az emissziós vonalak kiszélesedését okozza (2. ábra alsó része), a vonalak szélességéből különböző pontokban meghatározható a látóirányú sebességdiszperzió.



(Forrás: <http://bit.ly/119idcQ>).



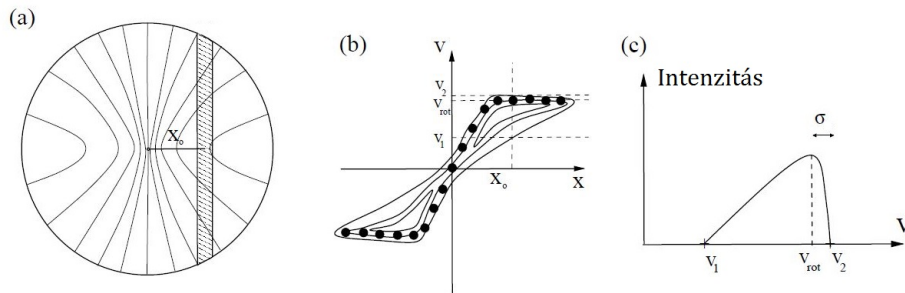
2. ábra. Egy galaxis 2D sebességtérképe (fent)
és az emissziós vonalak kiszélesedése (lent).

A galaxisok projekcióban ellipszis alakúak, ez alapján meghatározhatjuk a kis- és nagytengelyüket. A továbbiak szemléltetésében sokat segít egy, a forgásgörbék készítéséről szóló cikk [5] egyik ábrája (3. ábra). Itt az (a) résznek megfelelően különböző x_0 nagytengely-távolságokban, a tengelyre merőleges sávokban összegezzük az eltolódást. A 3. ábra (c) részében azt láthatjuk, hogy a különböző eltolódású vonalakat milyen intenzitással mérjük egy ilyen sávban. A sávon belül a legintenzívebb eltolódást jelentő sebességet rendeljük hozzá az adott nagytengely távolsághoz. A galaxis globális sebességét levonjuk ebből az értékből, hogy a rendszeren belüli sebességeket könnyebben tudjuk vizsgálni. Ez azt jelenti, hogy a kistengelyen mért eltolódáshoz tartozó sebesség általában 0 km/s-nak adódik. Ez jól látható a 2. ábra sebességtérképén is.

Egy ezzel a módszerrel készített rotációs görbét láthatunk a 3. ábra (b) részében. A mi esetünkben a forgási sebességet a galaxis két oldalán átlagoljuk. Olyan galaxisokat vizsgáltunk, ahol ez az átlagolás megtehető, bizonyos irregularitások esetében a két oldalt külön szükséges vizsgálni.

A sebességszperzió miatt a különböző sebességű csillagok különböző eltolást eredményeznek, ez a sávban mért intenzitás alapján egy v_1 és v_2 közti sebességtartományt definiál, ahol a 2. ábra (c) részén látható σ -ból a látóirányú diszperzió különböző nagytengely-távolságoknál kiszámolható. Mindkét mennyiséget km/s-ban mérjük. Távolságmérésre azonban a galaxisoknál általában kiloparsec (kpc) egységeket használunk.

A mértékegység eredete, hogy a Nap és a Föld átlagos távolsága - azaz egy csillagászati egység - 1 parsec távolságból 1 ívmásodperc (arcsec) alatt látszik. Ez alapján 1 kpc 3262 fényévnek felel meg.



3. ábra. A sebesség mérése

Forrás: García-Ruiz I. cikke [5].

2.2. Fényességeloszlás

Ebben a fejezetben bemutatom, hogyan lehet a galaxisok forgásgörbáját kiszámolni egy másik módszerrel, a galaxis mért felületi fényességprofiljából. A kiinduló adatunk egy CCD detektorokkal készített látóirányú 2D fényességeloszlás, amin a galaxis különböző pontjaiból kiinduló fény intenzitását ábrázoljuk. Elsőként ezt a fényességtérképet szeretnénk valamilyen módszerrel átlagolni, hogy 1D fényességeloszlást kapjunk.

Első körben megkaphatjuk a felületi fényességet, ha a galaxis központjától távolodva, a félnagy tengelyen mért különböző R távolságokhoz hozzárendeljük az $R^2\pi$ nagyságú körön belül mért intenzitást, leosztva a kör területéhez tartozó térszöggel. Az így kapott $I(R)$ felületi fényességet általában átváltjuk $mag/arcsec^2$ egységekre. Egy $arcsec^2$ egység megegyezik $2,350 \times 10^{-11}$ steradian-nal. A magnitúdó egy viszonyított mennyiség, skálájának viszonyítási pontja a Vega csillag, ennek a magnitúdója nulla ($\mu_0 = 0mag/arcsec^2$), felületi fényessége I_0 . Az átváltás:

$$\mu(R) - \mu_0 = -2.5 \lg \frac{I(R)}{I_0}. \quad (1)$$

Ebből jól látszik, minél nagyobb a magnitúdó, a vizsgált tárgy annál halványabb, valamint a Vega csillagnál fényesebb objektumok magnitúdója negatív. Az egyszerűség kedvéért a fényességet magnitúdó egységekben gyakran ábrázoljuk fordított tengelyen.

Ez a módszer nem veszi figyelembe a galaxis alakját, így a felületi fényesség csak egy durva közelítést ad. A legtöbb átlagolási módszernél emiatt felhasználjuk az ábrázolásakor is szemléletes izofótákat. Így nevezzük azokat a kontúrvonalakat, amelyek összekötik az azonos felületi fényességeloszlású pontokat a 2D fényességeloszlás térképén. Pontosabb eredményt ad az ekvivalens profilok használata. Ez a félnagy tengelyen mért R távolsághoz rendeli az onnan induló izofótáéval megegyező területű körön belüli fényességet, majd ennek a körnek a területéhez tartozó térszöggel oszt.

Ez ugyan pontosabb eredményt ad, mint az előző módszer, azonban sok esetben az izofóták azonban nem közelíthetők körrel, például ha a tengelyek aránya kicsi, vagy ha a galaxis inklinációja, azaz a galaktikus sík és a látóirányra merőleges sík által bezárt szög (inklinációs szög) nagy. Ilyenkor elliptikus profilokat használunk. Ez megegyezik az előző módszerrel, azonban itt körök helyett a galaxis féltengelyeinek arányával megegyező tulajdonságú ellipsziseket használunk.

Ezután a felületi fényességet szükséges átváltani L_{\odot}/kpc^2 egységekre, ahol L_{\odot} a Nap luminozitása, ez a Nap időegység alatt kibocsátott összenergiája. Az átváltás definíciója:

$$L(R) = 4.255 \times 10^{14} \times 10^{0.4(M_{\odot} - \mu(R))}, \quad (2)$$

ahol M_{\odot} a Nap abszolút magnitúdója, $L(R)$ pedig a felületi fényesség a kívánt egységben. Megadhatjuk ezután a térbeli luminozitás-eloszlását a barionikus anyagot felépítő nucleus, bulge (b), disk (d) és halo komponenseknek:

$$l(a) = l(0) \exp \left[- \left(\frac{a}{ka_0} \right)^{1/n} \right]. \quad (3)$$

Itt $l(0) = hL_0/(4\pi qa_0^3)$ a központi térbeli luminozitás sűrűség, L_0 az adott komponens központi luminozitása, a_0 az adott komponens kiterjedését jellemzi, h és k n -függő paraméterek, q a tengelyek aránya, a pedig egy, a számoláshoz nagyon fontos paraméter, $a = \sqrt{R^2 + z^2/q^2}$, itt R és z hengerkoordináták. $l(a)$ dimenziója luminozitás/térfogat, ebben az esetben L_{\odot}/kpc^3 . Ezeket a komponenseket összeadva, megkaphatjuk a teljes barionikus anyag fényességeloszlását.

Azonban, amit mi mérni tudunk, az ennek az eloszlásnak a látóirányú projekciója, a térbeli eloszlásból ez:

$$L(R) = 2 \sum_{i=1}^N q_i \int_R^{\infty} \frac{l_i(a)a}{\sqrt{a^2 - R^2}} da, \quad (4)$$

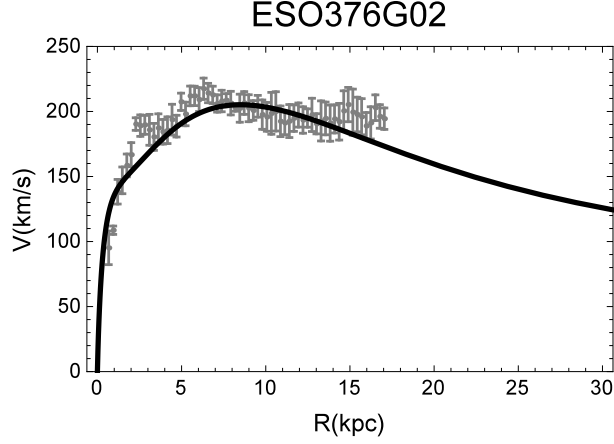
ahol i és N a komponensek indexe és száma, R pedig a látszólagos főtengelyen mért távolság. A projekció dimenziója már luminozitás/felület. Így kaptunk egy összefüggést a mért fényesség és a galaxis komponenseinek térbeli sűrűségeloszlására.

Ez az eloszlás már csak egy konstanssal tér el a barionikus anyag tömegeloszlásától. Ez a konstans a tömeg-fényesség arány (Υ), tehát a barionikus anyag tömegeloszlása:

$$\rho_{\text{bar}}(a) = \sum_{i=1}^N \Upsilon_i l_i(a), \quad (5)$$

ahol i és N a komponensek indexe és száma. A különböző komponensekre vonatkozó Υ_i értékét a spektroszkópiai úton nyert adatokra való illesztéskor határozhatjuk meg. Így megkaphatjuk illesztésekkel a térbeli tömegeloszlást M_{\odot}/kpc^3 egységben. A gravitációs potenciál és a tömegeloszlás közt a Poisson egyenlet teremt kapcsolatot:

$$\nabla^2 \Phi(R, z) = 4\pi G \rho(R, z), \quad (6)$$



4. ábra. Egy mért rotációs görbe (szürke mérési pontok) és egy barionikus komponensekből álló illesztés (piros görbe).

ahol G a gravitációs konstans, a Φ gravitációs potenciálból a forgási sebesség pedig a galaktikus síkban (azaz $z = 0$ -nál) a következőképpen adódik:

$$v^2(R) = R \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R}, \quad (7)$$

itt $v(R)$ a forgási sebesség. Ezt a forgási sebességet bármely i komponensre, a rájuk vonatkozó $e_i = \sqrt{1 - q_i^2}$ excentricitás bevezetésével, hengersizmetriát feltételezve felírhatjuk:

$$v_i^2(R) = 4\pi q_i G \int_0^R \frac{\rho_i(a) a^2}{\sqrt{R^2 - a^2 e_i^2}} da. \quad (8)$$

Ebből a galaxis forgási sebessége:

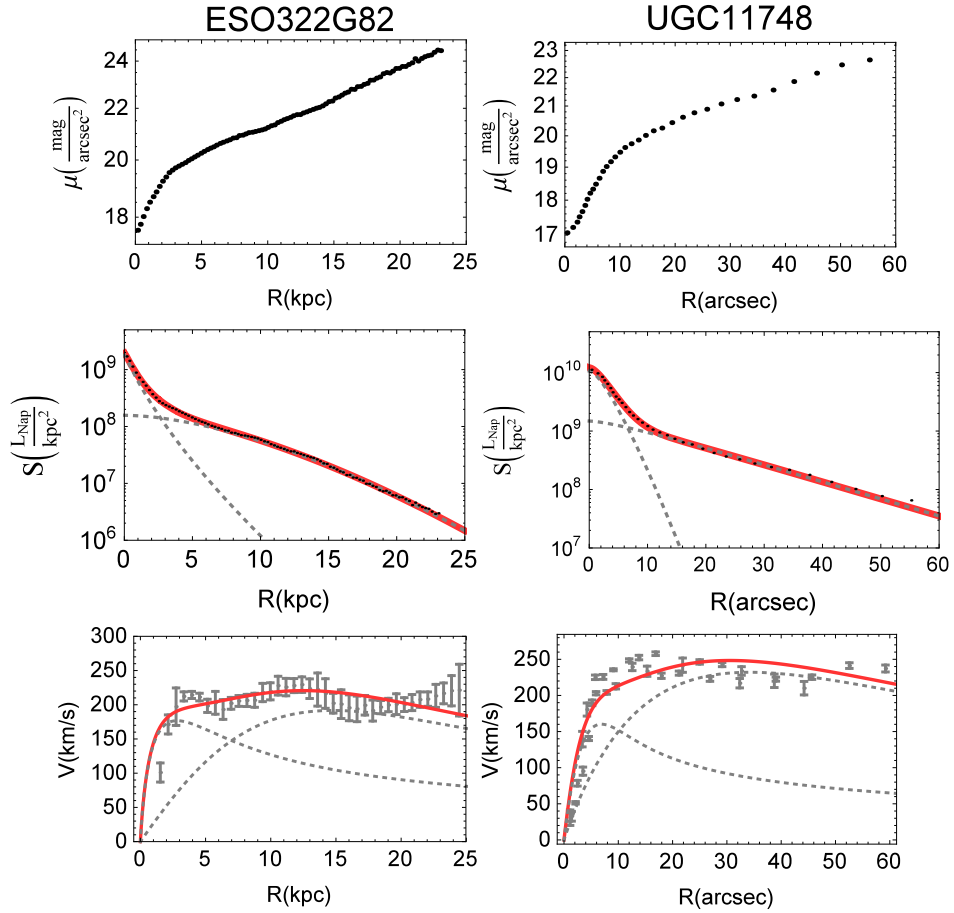
$$v^2(R) = \sum_{i=1}^N v_i^2(R). \quad (9)$$

Itt N a barionikus anyag komponenseinek a száma. Az ez alapján modellezett, valamint az előző feladat alapján mért rotációs görbékét egyszerre ábrázolva látványos különbséget láthatunk a felfutó szakasz után (4. ábra). Jól látszik, hogy a fényességeloszlásból készített forgásgörbe szerinti sebesség sokkal gyorsabban lecsökken, mint ahogy a mérési adataink alapján várnánk. A szakdolgozatomban ennek az ellentmondásnak egy lehetséges feloldását vizsgálom.

2.3. Modellezés

A kiinduló adatokat korábbi cikkekből, katalógusokból gyűjtöttem. A HSB galaxisok fényességeloszlásához és forgási sebességéhez Povilas Palunas [6] katalógusát használtam. Az LSB galaxisok fényességeloszlásait Ji Hoon Kim [7], míg a rotációs görbéit Stacy S. McGaugh [8] munkáinak köszönhetem. Ezekből $\text{mag}/\text{arcsec}^2$ -ben kapom meg a fényességet, a távolságokat a HSB galaxisoknál kpc -ben, LSB galaxisoknál pedig arcsec -ben. A modellezéshez az egyetem által biztosított Wolfram Mathematicát használtam.

Szemléltetéseként egy kiválasztott HSB és LSB galaxis kiinduló fényességadatait láthatjuk az 5. ábra felső sorában. Először ezt átváltom (2) alapján. Így megkapom a térbeli fényességeloszlás látóirányú projekcióját L_{\odot}/kpc^2 egységekben. Ezután az 5. ábra második sorában az illesztett fényességet láthatjuk már átváltott egységekben, amely a (3) térbeli eloszlás, (4) alapján látóirányra integrált alakja. Itt $k \times a_0$ szorzatot illeszttem, ugyanígy



5. ábra. Egy HSB (bal) és LSB (jobb) illesztései. A fekete pontok a mért fényességadatok, a szürke, hibahatárokkal ellátott pontok a forgási sebesség mért értékei, a piros görbék az illesztett modellek, a pontozott szürke görbék pedig a bulge és a disk komponensek illesztései.

$l_0 \times q$ -nak is csak a szorzatát kapom meg.

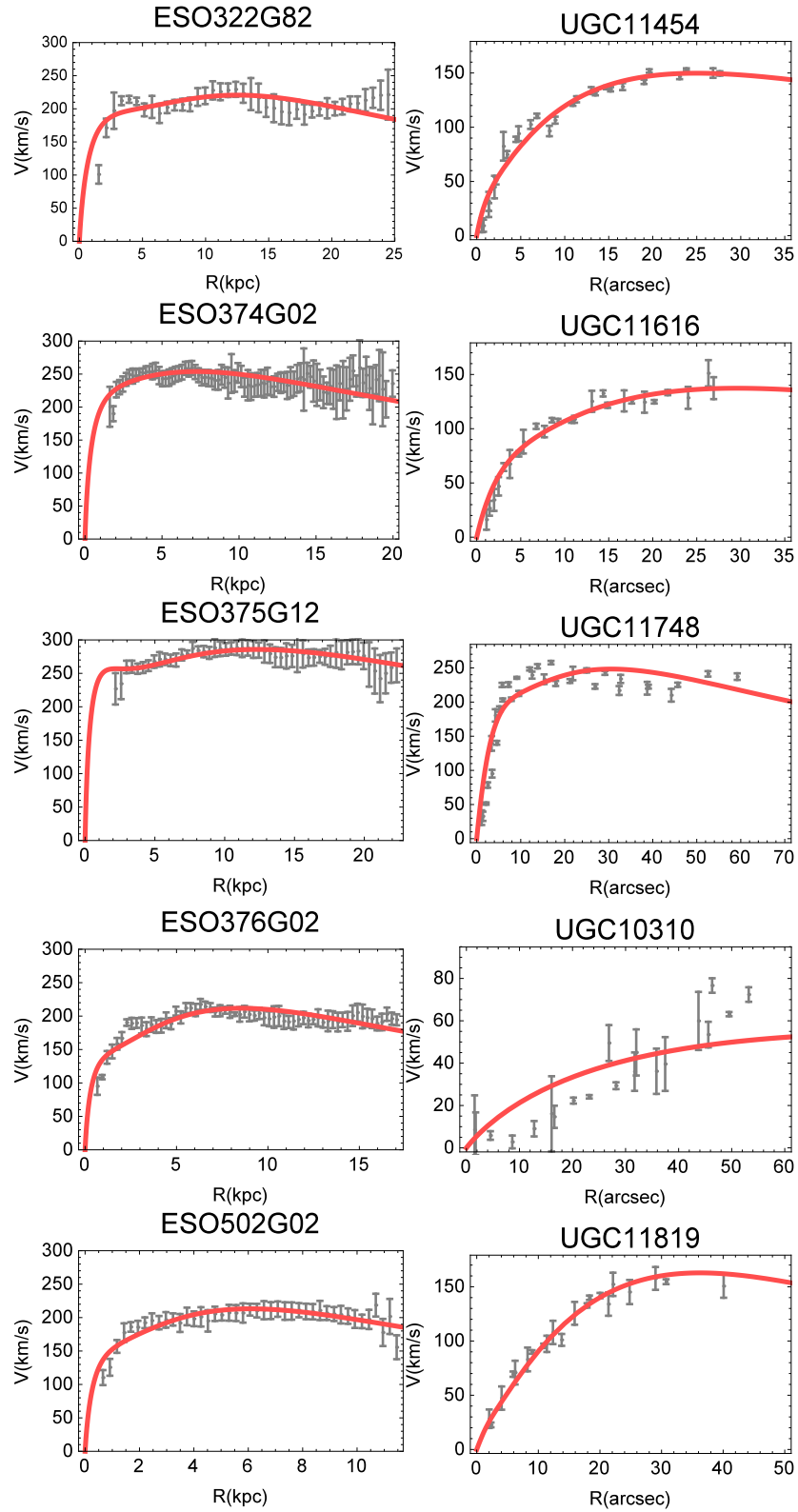
Egy illesztés pontosságát χ^2 módszerrel vizsgáltam. Eszerint egy modell, a kiinduló adatoktól való eltérését az alábbi módon adhatjuk meg:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - y(x_i))^2}{\sigma_i^2}, \quad (10)$$

ahol y_i az i -edik adat értéke, $y(x_i)$ az illesztés, az i -edik adat helyén felvett értéke, σ_i pedig az adat hibája. Az illesztés során minél kisebb χ^2 értékeket vártam.

Az illesztéskor két barionikus komponenst, a bulge-ot és a disk-et illesztettem, a paraméterek b és d indexei a továbbiakban ezekre a komponensekre vonatkoznak. A modellenél korlátokat adtam a különböző paramétereknek, hogy leegyszerűsítsem az illesztést és kiszűrjem a fizikailag nem lehetséges eredményeket. A két galaxis eredményét a 5. ábra középső sorában láthatjuk.

Az így nyert két barionikus komponens paramétereiből már rotációs görbét tudok készíteni, (8) illesztésével. Az illesztést a hibák figyelembevételével súlyozom. Az így nyert forgási sebességet és a komponensek hozzájárulását láthatjuk a 5. ábra alsó sorában. Ezzel elkészítettem kizárólag barionikus komponensek felhasználásával az összes vizsgálandó galaxis rotációs görbéjét. Az eredményeket a 6. ábrán láthatjuk, az illesztések paramétereit pedig a melléklet 1. táblázatában találjuk, a hozzájuk tartozó χ^2 értékekkel.



6. ábra. A barionikus rotációs görbék. A szürke, hibahatárokkal ellátott pontok a forgási sebesség mért értékei, a piros görbék pedig az illesztett modellek.

3. Ütközésmentes Boltzmann-egyenlet

A galaxist felépítő csillagok és más anyagok helyzetének és mozgásának az időbeli változását az $f(\mathbf{w}, t) \equiv f$ eloszlásfüggvény bevezetésével vizsgáljuk, a 6 dimenziós fázistér ($\mathbf{w} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$) segítségével. Az alábbiakban egy galaxisok esetében érvényes megmaradási törvényt fogok átrendezni, hogy a következő fejezetben ebből ki tudjam fejezni a sebesség, valamint a sebességszperzió komponenseit. Azt feltételezzük, hogy a galaxison belül nem keletkeznek és nem tűnnek el csillagok. Ez alapján az eloszlásfüggvény stacionárius, azaz időben állandó, ami alapján felírhatjuk:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial f \dot{w}_i}{\partial w_i} = 0. \quad (11)$$

Az utolsó tagot felbontva,

$$\frac{\partial f \dot{w}_i}{\partial w_i} = \dot{w}_i \frac{\partial f}{\partial w_i} + f \frac{\partial \dot{w}_i}{\partial w_i} = \dot{w}_i \frac{\partial f}{\partial w_i} + f \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + f \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i}. \quad (12)$$

v_i és x_i független egymástól, így az utolsó két tag nulla, valamint mivel a csillagütközések elhanyagolhatóak, $\dot{v}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$, ahol Φ nem függ a sebességtől. Felírható a leegyszerűsített alak, az ütközésmentes Boltzmann-egyenletet (CBE):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

További alakjai:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right] = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f - \nabla \Phi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (14)$$

A továbbiakban az összegzési konvencióval a szummákat nem jelölöm, azonban a későbbiekben az i -re való összegzésre még visszatérek.

Felírható CBE hengerkoordinátákban ($\mathbf{w} = (R, \phi, z, \dot{R}, \dot{\phi}, \dot{z})$):

$$\dot{R} \frac{\partial f}{\partial R} + \dot{\phi} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \dot{z} \frac{\partial f}{\partial z} + v_R \frac{\partial f}{\partial v_R} + v_\phi \frac{\partial f}{\partial v_\phi} + v_z \frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

Vektorkalkulusból a hengerkoordinátákban kifejezett sebességre ismert, hogy

$$\mathbf{v} = \dot{R} \hat{e}_R + R \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{z} \hat{e}_z = v_R \hat{e}_R + v_\phi \hat{e}_\phi + v_z \hat{e}_z. \quad (16)$$

Az egységvektorok deriváltjaira a tengelyszimmetria miatt felírhatjuk, hogy $\dot{\hat{e}}_R = \dot{\phi} \hat{e}_\phi$, $\dot{\hat{e}}_\phi = -\dot{\phi} \hat{e}_R$ és $\dot{\hat{e}}_z = 0$, így ebből:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \ddot{R} \hat{e}_R + \dot{R} \dot{\hat{e}}_R + \dot{R} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + R \ddot{\phi} \hat{e}_\phi + R \dot{\phi} \dot{\hat{e}}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z + \dot{z} \dot{\hat{e}}_z = \\ &= \dot{R} \hat{e}_R + v_\phi \hat{e}_\phi + \frac{1}{R} v_R v_\phi \hat{e}_\phi - \frac{1}{R} v_\phi^2 \hat{e}_\phi + v_z \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (17)$$

Másrészt a potenciál gradiensére ismert, hogy:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{e}_R - \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{e}_\phi - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{e}_z. \quad (18)$$

A sebességkomponensek időderiváltjaira ezek alapján felírható:

$$\dot{v}_R = \frac{v_\phi^2}{R} - \frac{\partial\Phi}{\partial R}, \quad (19)$$

$$\dot{v}_\phi = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} - \frac{v_R v_\phi}{R}, \quad (20)$$

$$\dot{v}_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (21)$$

Galaxisok vizsgálatakor, hengersizmetrikus esetben a $\frac{\partial}{\partial\phi}$ tagok nullát adnak, így ezeket behelyettesítve (15)-ba, a hengersizmetrikus Jeans-egyenlet:

$$v_R\frac{\partial f}{\partial R} + v_z\frac{\partial f}{\partial z} + \left[\frac{v_\phi^2}{R} - \frac{\partial\Phi}{\partial R}\right]\frac{\partial f}{\partial v_R} - \frac{v_R v_\phi}{R}\frac{\partial f}{\partial v_\phi} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial v_z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (22)$$

A Jeans-tétel szerint ha az eloszlásfüggvény stacionárius, akkor kifejezhető a mozgás első integráljainak függvényében. A továbbiakban ilyen mozgásállandókat, momentumokat fogunk keresni. A CBE n-edik momentuma:

$$\int \mathbf{v}^n \frac{df}{dt} d^3\mathbf{v} = 0. \quad (23)$$

4. A Jeans-egyenletek

4.1. Jeans-féle kontinuitási-, és mozgásegyenletek

A 0. momentum segítségével kifejezhető a kontinuitási-, míg az 1. momentum segítségével a mozgásegyenlet. Írjuk fel a (23) momentumot (14) alakban $n = 0$ esetre, ez a 0. momentum:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3\mathbf{v} + \int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \int \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0. \quad (24)$$

A $\rho = \int f d^3\mathbf{v}$ számsűrűség bevezetésével az első tag a Leibnitz-szabály értelmében:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (25)$$

A közepes sebesség definiálásával,

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho} \int \mathbf{v} f d^3\mathbf{v}, \quad (26)$$

valamint a koordináták függetlensége miatt felírható a második tag:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} &= \int \frac{\partial \mathbf{v} f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} = \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \int \mathbf{v} f d^3\mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\int \mathbf{v} f d^3\mathbf{v}}{\int f d^3\mathbf{v}} \int f d^3\mathbf{v} \right) = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}} \rho}{\partial x_i} = \nabla(\rho \bar{\mathbf{v}}). \end{aligned} \quad (27)$$

A divergenciatétel segítségével:

$$\int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = \int f d^2\mathbf{S} = 0, \quad (28)$$

mivel ha $v \rightarrow \infty$, akkor $f \rightarrow 0$. Így a harmadik tag nulla. A 0. momentum így kapott alakját hívjuk a Jeans-féle kontinuitási egyenletnek:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (29)$$

Az 1. momentumot (23)-ból $n = 1$ esetben:

$$\int \mathbf{v} \frac{df}{dt} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int f v_j d^3\mathbf{v} + \int v_j v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\mathbf{v} = 0. \quad (30)$$

Itt emlékezzünk vissza, hogy (30) három egyenletet jelent ($j = 1, 2, 3$). Az első tagot (27.)-hoz hasonlóan átírva:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_j d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t}, \quad (31)$$

valamint a $\overline{v_i v_j} = \frac{1}{\rho} \int v_i v_j f d^3\mathbf{v}$ bevezetésével a második tag:

$$\int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \rho \overline{v_i v_j}}{\partial x_i}. \quad (32)$$

A harmadik tag második felénél a divergenciatétel felhasználásával:

$$\begin{aligned} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} &= \int \frac{\partial v_j f}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} - \int f \frac{\partial v_j}{\partial v_i} d^3 \mathbf{v} = \\ &= \int v_j f d^2 \mathbf{S} - \int \delta_{ij} f d^3 \mathbf{v} = -\delta_{ij} \rho, \end{aligned} \quad (33)$$

amiből összegezve rögtön felírható a Jeans-féle mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0. \quad (34)$$

Következő feladatomban, hogy ezekből eljussak a sebességszperziókkal kifejezett Jeans-egyenletekhez. A (34) egyenleteket kivonom a \bar{v}_j -vel megszorozott (29) egyenletből.

Megszorozva a kontinuitási egyenletet \bar{v}_j -vel, majd azt átrendezve máris:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = \quad (35)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} - \rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_i} - \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (36)$$

Ezt kivonva a mozgásegyenletből azonnal megkapjuk:

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} - \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_i} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = \quad (37)$$

$$\frac{\partial \rho \sigma_{ij}^2}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = 0, \quad (38)$$

ahol $\sigma_{ij}^2 = \bar{v}_i \bar{v}_j - \bar{v}_i \bar{v}_j$ a sebességszperzió tenzor, ami a csillagok random sebességét jellemzi. Ez a tenzor a galaxis minden pontjában egy sebesség ellipszoidot definiál, melynek főtengelyeit a σ_{ij}^2 sajátvektorai határozzák meg, a tengelyek hosszai pedig arányosak a hozzájuk tartozó sajátértékek négyzetgyökével.

4.2. Hengerszimmetrikus Jeans-egyenletek

Ha a (22) egyenletet \mathbf{v} szerint integráljuk, megkapjuk az egyenlet nulladik momentumát, ahol a Boltzmann-egyenletben szereplő, sebesség szerint derivált tagok nullát adnak, így:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \mathbf{v} + \int v_R \frac{\partial f}{\partial R} d^3 \mathbf{v} + \int v_z \frac{\partial f}{\partial z} d^3 \mathbf{v} = \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial R \rho \bar{v}_R}{\partial R} + \frac{\partial \rho \bar{v}_z}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

ez a hengerkoordinátákban kifejezett Jeans-féle kontinuitási egyenlet.

Ezután (22)-t megszorozva v_R -rel, majd integrálva \mathbf{v} szerint, megkapható a radiális Jeans-egyenlet. Ez az egyenlet tagonként egyszerűbb alakra hozható:

- Az első tag:

$$\int v_R^2 \frac{\partial f}{\partial R} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial R} \int v_R^2 f d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial R} \int v_R^2 f d^3\mathbf{v} \frac{\int f d^3\mathbf{v}}{\int f d^3\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial R} (\rho \overline{v_R^2}). \quad (40)$$

- A második tag:

$$\int v_R v_z \frac{\partial f}{\partial z} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial z} \int v_R v_z f d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial z} \int v_R v_z f d^3\mathbf{v} \frac{\int f d^3\mathbf{v}}{\int f d^3\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial z} (\rho \overline{v_R v_z}). \quad (41)$$

- A harmadik tag:

$$\begin{aligned} & \int v_R \left[\frac{v_\phi^2}{R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right] \frac{\partial f}{\partial v_R} d^3\mathbf{v} = \\ & \int v_R \frac{v_\phi^2}{R} \frac{\partial f}{\partial v_R} d^3\mathbf{v} - \int v_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\partial f}{\partial v_R} d^3\mathbf{v} = \\ & \frac{1}{R} \int v_R v_\phi^2 \frac{\partial f}{\partial v_R} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \int v_R \frac{\partial f}{\partial v_R} d^3\mathbf{v} = \\ & \frac{1}{R} \left[\int \frac{\partial v_R v_\phi^2 f}{\partial v_R} d^3\mathbf{v} - \int \frac{\partial v_R v_\phi^2}{\partial v_R} f d^3\mathbf{v} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \left[\int \frac{\partial v_R f}{\partial v_R} d^3\mathbf{v} - \frac{\partial v_R}{\partial v_R} \int f d^3\mathbf{v} \right] = \\ & -\frac{1}{R} \int v_\phi^2 f d^3\mathbf{v} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \int f d^3\mathbf{v} = -\frac{1}{R} \rho \overline{v_\phi^2} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \end{aligned} \quad (42)$$

- A negyedik tag:

$$\int \frac{v_R^2 v_\phi}{R} \frac{\partial f}{\partial v_\phi} d^3\mathbf{v} = \frac{1}{R} \int v_R^2 v_\phi \frac{\partial f}{\partial v_\phi} d^3\mathbf{v} = -\frac{1}{R} \rho \overline{v_R^2}. \quad (43)$$

- Az ötödik tag:

$$\int v_R \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left[\int \frac{\partial v_R f}{\partial v_z} d^3\mathbf{v} - \int \frac{\partial v_R f}{\partial v_z} f d^3\mathbf{v} \right] = 0. \quad (44)$$

- A hatodik tag:

$$\int v_R \frac{\partial f}{\partial t} d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int v_R f d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \int v_R f d^3\mathbf{v} \frac{\int f d^3\mathbf{v}}{\int f d^3\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \overline{v_R}). \quad (45)$$

Így a radiális hengersizmetrikus Jeans-féle mozgásegyenlet:

$$\frac{\partial \rho \overline{v_R}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{v_R^2}}{\partial R} + \frac{\partial \rho \overline{v_R v_z}}{\partial z} + \rho \left[\frac{\overline{v_R^2} - \overline{v_\phi^2}}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right] = 0. \quad (46)$$

Hasonló módon megkapható a ϕ -irányú:

$$\frac{\partial \rho \overline{v_\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{v_R v_\phi}}{\partial R} + \frac{\partial \rho \overline{v_\phi v_z}}{\partial z} + 2\rho \frac{\overline{v_R v_\phi}}{R} = 0, \quad (47)$$

valamint a z-irányú mozgásegyenletet is:

$$\frac{\partial \rho \overline{v_z}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{v_R v_z}}{\partial R} + \frac{\partial \rho \overline{v_z^2}}{\partial z} + \rho \left[\frac{\overline{v_R v_z}}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = 0. \quad (48)$$

Ez a három egyenlet 9 db ismeretlent tartalmaz ($\overline{v_i}$, $\overline{v_i^2}$, és $i \neq j$ -re $\overline{v_i v_j}$), A továbbiakban különböző összefüggéseket fogok vizsgálni, hogy csökkentsem ezeknek a számát.

4.3. A Jeans-egyenletek egyszerűsítése

Galaxisok esetében gyakran elhagyjuk a $\frac{\partial}{\partial t}$ tagokat, stacionárius rendszert feltételezve. Sokszor feltételezünk diagonális mátrixot, azaz $i \neq j$ esetre $\overline{v_i v_j} = 0$, valamint meridionális izotrópiát, azaz $\overline{v_R^2} = \overline{v_z^2} = \sigma^2$. Ezekkel rögtön lecsökken az ismeretlenek száma 3-ra, azonban az egyenletek száma pedig kettőre.

Az alábbiakban kizárólag a stacionárius esetet fogom felhasználni, a további egyszerűsítéseket más úton érjük el. A galaxis minden pontjához hozzá tudjuk rendelni a már korábban ismertett sebességszperziós tenzort, amely egyértelműen meghatározható a három tengely menti sebességszperzióval (σ_R^2 , σ_z^2 és σ_ϕ^2), valamint egy irányszöggel (α), amit az $R-z$ síkban értelmezhetünk. Ez a tenzor definiálja a sebesség ellipszoidot, ennek a három tengelyét a szperziók határozzák meg, az irányát pedig az α irányszög. A tenzor többi tagjára felírhatjuk:

$$\sigma_{Rz}^2 = \gamma(\sigma_R^2 - \sigma_z^2), \quad (49)$$

$$\sigma_{R\phi}^2 = \sigma_{z\phi}^2 = 0, \quad (50)$$

itt $\gamma = \frac{1}{2} \tan(2\alpha)$. Ezután bevezetjük a szperziós relációkat:

$$k_z \equiv \frac{\sigma_z^2}{\sigma_R^2}, \quad (51)$$

$$k_\phi \equiv \frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_R^2}. \quad (52)$$

Ezekkel ismét felírva a Jeans-egyenleteket, amiből (47) a tengelyszimmetria miatt eltűnik, már csak öt ismeretlenünk lesz (σ_R^2 , σ_z^2 , k_z , k_ϕ és γ):

$$\frac{\partial \rho \sigma_R^2}{\partial R} + \left(\frac{1 - k_\phi}{R} + \frac{\partial \gamma (1 - k_z)}{\partial z} \right) \rho \sigma_R^2 + \gamma (1 - k_z) \frac{\partial \rho \sigma_R^2}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} - \beta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = 0, \quad (53)$$

$$\frac{\partial \rho \sigma_z^2}{\partial z} + \left(\frac{\gamma (1 - k_z)}{R k_z} + \frac{1}{k_z} \frac{\partial \gamma (1 - k_z)}{\partial R} \right) \rho \sigma_z^2 + \frac{\gamma (1 - k_z)}{k_z} \frac{\partial \rho \sigma_z^2}{\partial R} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (54)$$

hiszen a tömegeloszlást, a gravitációs potenciált és a forgási sebességet (v_ϕ) meghatározhatjuk a korábban vizsgált felületi fényességeloszlásból, a Poisson-egyenletből és a mért rotációs görbéből, β a különböző komponensekre egy-egy ismert konstans. A σ_R^2 és σ_z^2 sebességszperziókat ebből a két egyenletből szeretnénk kiszámolni. Azonban az egyenletekben még mindig van három ismeretlen, k_z , k_ϕ és γ . További egyszerűsítésekre van szükség, hogy ezeket eltüntessük. Ehhez áttérhetünk elliptikus koordinátákra (x_1, x_2, x_3).

A hengerkoordináták közti kapcsolatot nagyon jól szemlélteti a 7. ábra, a koordinátatranszformációkra felírhatjuk:

$$x_1^2 = \frac{1}{2} [\Omega + (\Omega^2 - 4z^2 z_0^2)^{1/2}], \quad (55)$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2} [\Omega - (\Omega^2 - 4z^2 z_0^2)^{1/2}], \quad (56)$$

$$x_3 = \phi, \quad (57)$$

ahol $\Omega = R^2 + z_0^2 + z^2$. Az átváltással lett egy újabb z_0 ismeretlenünk, amely a fókuszpont helyzetét adja meg. Az (x_1, x_2, x_3) helykoordinátákhoz hasonlóan megadhatjuk a sebességdiszperziót is $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ formában. Ezután kifejezzük a diszperziós relációkat elliptikus koordinátákban:

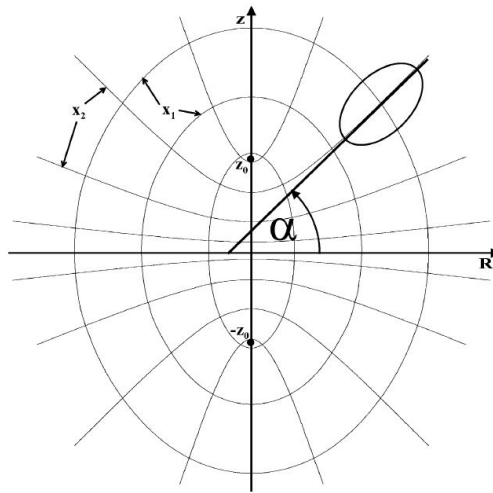
$$k_z = \frac{\sin^2 \alpha + k_{12} \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + k_{12} \sin^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + k_{12}}{1 + k_{12} \tan^2 \alpha}, \quad (58)$$

$$k_\phi = \frac{k_{13}}{\cos^2 \alpha + k_{12} \sin^2 \alpha} = \frac{k_{13}(1 + \tan^2 \alpha)}{1 + k_{12} \tan^2 \alpha}. \quad (59)$$

Itt a diszperziós relációk hasonló módon $k_{ij} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2}$, valamint a diszperziós ellipszoid irányát meghatározó, a 7. ábra alapján könnyen értelmezhető α -ra, valamint az alapján γ -ra felírhatjuk:

$$\alpha = \frac{z^2 - x_2^2}{Rz}, \quad (60)$$

$$\gamma = \frac{Rz}{R^2 + z_0^2 - z^2}. \quad (61)$$



7. ábra. Az elliptikus- és hengerkoordináták

Forrás: [1].

További egyszerűsítésképp bevezetjük a Kuzmin-relációt, amely lemez-szerű rendszerek esetében helytálló, így ez a galaktikus síktól távolodva egy lehetséges hibaforrás. Az ansatz:

$$\frac{1}{k_{12}} = 1 + \frac{1}{k_{13}}. \quad (62)$$

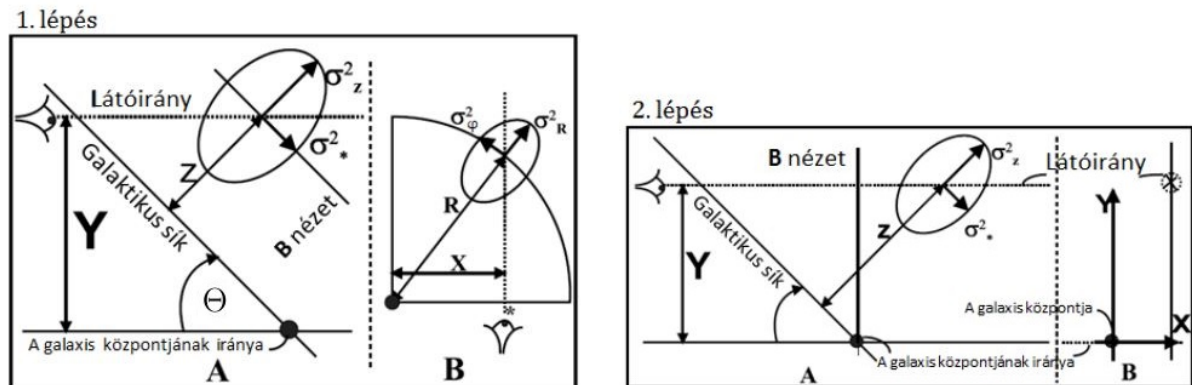
Kuzmin számolásai alapján az ellipszoid irányát így meghatározó z_0 -ra a galaktikus síkban ($z = 0$):

$$z_0^2(R) = -R \left[4\rho_c(R) \left(\frac{\partial \rho_c(R)}{\partial R} \right)^{-1} + R \right], \quad (63)$$

ahol $\rho_c(R)$ a galaxis teljes tömegsűrűsége. Ezt meghatározhatjuk az illesztésekből, így egyetlen feltételezéssel, hogy a rendszerünk lemez-szerű, kiszámolható z_0 , melynek a segítségével kiszámolhatóak a diszperziók.

5. A sebességszórás számolása

A megfelelő egyszerűsítésekkel megkapva a galaxis pontjaihoz tartozó σ_R^2 , σ_ϕ^2 és σ_z^2 sebességszórásokat, még mindig nem tudjuk azokat összehasonlítani a spektroszkópai úton mért értékekkel, hiszen azokat a látóirány mentén mértük. Ahelyett, hogy a mért értékeket próbálnám átszámolni, hogy megkapjam a diszperziók térbeli eloszlását, inkább a számolt értékeket fogom projektálni. Ez két lépésben történik. Először egy olyan síkra szükséges vetíteni, amely párhuzamos a galaktikus síkkal, majd a látóirányra (8. ábra). Ezután a látóirány menti integrálással, a mérési eredményeinket már összehasonlíthatjuk a diszperziókkal.



8. ábra. Egy galaxisra való rálátásunk a galaktikus síkhoz viszonyítva. A látóirányt A és B nézetekre bontva látjuk az ábrán. Forrás: [1]

Az első lépéssel képzett diszperzióra az ábra segítségével felírhatjuk:

$$\sigma_{\star}^2 = \sigma_{\phi}^2 \frac{X^2}{R^2} + \sigma_R^2 \left(1 - \frac{X^2}{R^2}\right). \quad (64)$$

Ezután a látóirány és a galaktikus sík által bezárt Θ szög bevezetésével a második lépésre:

$$\sigma_1^2 = \sigma_{\star}^2 \cos^2 \Theta + \sigma_z^2 \sin^2 \Theta. \quad (65)$$

A következő lépésben a látóirány mentén mért értékeket szeretném összeadni, azonban ahelyett, hogy a látóirány mentén integrálnék, Ψ és $z_{1,2}$ bevezetése után átírható az egyenlet R menti integrálásra:

$$\Psi = l(R, z_1)\sigma_1^2(R, z_1) + l(R, z_2)\sigma_1^2(R, z_2), \quad (66)$$

$$z_{1,2} = \left(\frac{Y}{\sin \Theta} \pm \sqrt{R^2 - X^2}\right) \tan \Theta, \quad (67)$$

$$\sigma_{int}^2(X, Y) = \frac{1}{L(X, Y)} \int_X^{\infty} \Psi \frac{R}{\cos \Theta \sqrt{R^2 - X^2}} dR, \quad (68)$$

$L(X, Y)$ ebben az esetben egy komponens fényesség-eloszlása, az égbolt síkjában mérve (8. ábra). Ebből, az i komponensekre összegezve:

$$\sigma_{obs}(X, Y) = \left[\frac{\sum_i L_i(X, Y) (\sigma_{int,i}^2)}{\sum_i L_i(X, Y)} \right]^{1/2}. \quad (69)$$

Az így kapott eredményekkel és a fentiekben szemléltetett módszerrel tudjuk összehasonlítani a mért sebességszóróást a fényességeloszlásból nyert értékekkel.

6. Sötét anyag modellek

A spektroszkópiai modell konstans szakasza arra enged következtetni, hogy ha a klasszikus mechanikai megfontolásaink helyesek, $M(r) \sim r$, azaz a galaxis tömege sokkal tovább növekszik, mint ahogyan ezt a fényességéből következtetnénk.

Erre a látszólagos ellentmondásra ad egy lehetséges megoldást egy újabb, fotometriai módszerekkel mérhetetlen komponens bevezetése. Ezt hívjuk sötét anyagnak, így a galaxis tömegeloszlása:

$$\rho_{\text{bar}}(a) = \sum_{i=1}^4 \Upsilon_i l_i(a) + \rho_{\text{DM}} \quad (70)$$

Itt ρ_{DM} a sötét anyag tömegeloszlása. A komponens paramétereinek az illesztés során olyan értékeket keresünk, amelyek minél jobban illeszkednek a spektroszkópiai modellre, valamint a lehető legpontosabban adják vissza a mért sebességdiszperziókat.

Megismerkedtem három sötét anyag modellel, a Bose-Einstein kondenzátummal (BEC), a Navarro-Frenk-White modellel (NFW), valamint egy pszeudo-izotermikus sötét anyag halo modellel (P-I), majd ezután újabb rotációs görbéket készítettem, a barionikus anyagot kiegészítve egy-egy sötét anyag komponenssel. Ezekhez a modellekhez tartozik egy-egy sűrűségprofil is.

Az NFW modell sűrűségprofilja:

$$\rho_{\text{NFW}}(a) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{a}{r_s}\right)\left(1 + \frac{a}{r_s}\right)^2}, \quad (71)$$

ahol ρ_0 és r_s a karakterisztikus sűrűség és távolság. Az NFW modell sebességprofilját is megadhatjuk:

$$v_{\text{NFW}}^2(R) = \frac{4\pi G \int_0^R \rho_{\text{NFW}}(a) a^2 da}{R} = 4\pi G \rho_s \frac{r_s^3}{R} \left[\ln \left(1 + \frac{R}{r_s} \right) - \frac{R}{r_s} \left(\frac{1}{1 + \frac{R}{r_s}} \right) \right]. \quad (72)$$

Az egyik HSB galaxis eredménye az alábbi 9. ábra első illesztésén látszik. Az ábrákon szürke pontozott vonalakkal ábrázoltam a bulge és disk komponensek, szürke szaggatottal pedig a sötét anyag hozzájárulását. Itt jól látszik az egyes modellek eloszlása közti különbség.

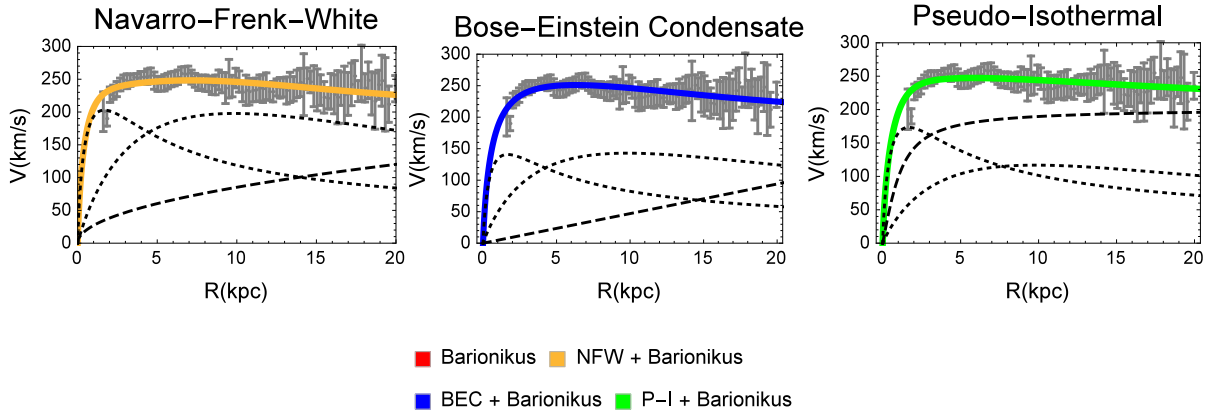
A BEC modell sűrűségprofiljára felírhatjuk:

$$\rho_{\text{BEC}}(a) = \rho_0 \frac{\sin(ka)}{ka}. \quad (73)$$

Itt ρ_0 a központi sűrűség, k pedig egy konstans, a modell kiterjedése $\frac{1}{k}$ -val arányos. A modell sebessége:

$$v_{\text{BEC}}^2(R) = \frac{4\pi\rho_0}{k^2} \left(\frac{\sin(kR)}{kR} - \cos(kR) \right) \quad (74)$$

Erre egy példa a 9. ábra második eredménye.



9. ábra. Az ESO347G02 HSB galaxis sötét modell komponensekkel kiegészített illesztései. A szakdolgozatom során a különböző modellekre az ábra alján látható színekkel használtam. Vörös színnel jelölöm a barionikus modelleket, a barionikus és NFW komponenseket használó illesztéseket narancssárga, a barionikus és BEC komponensek összege kék, a barionikus és PI modellek felhasználásával készített illesztések pedig zöld színűek.

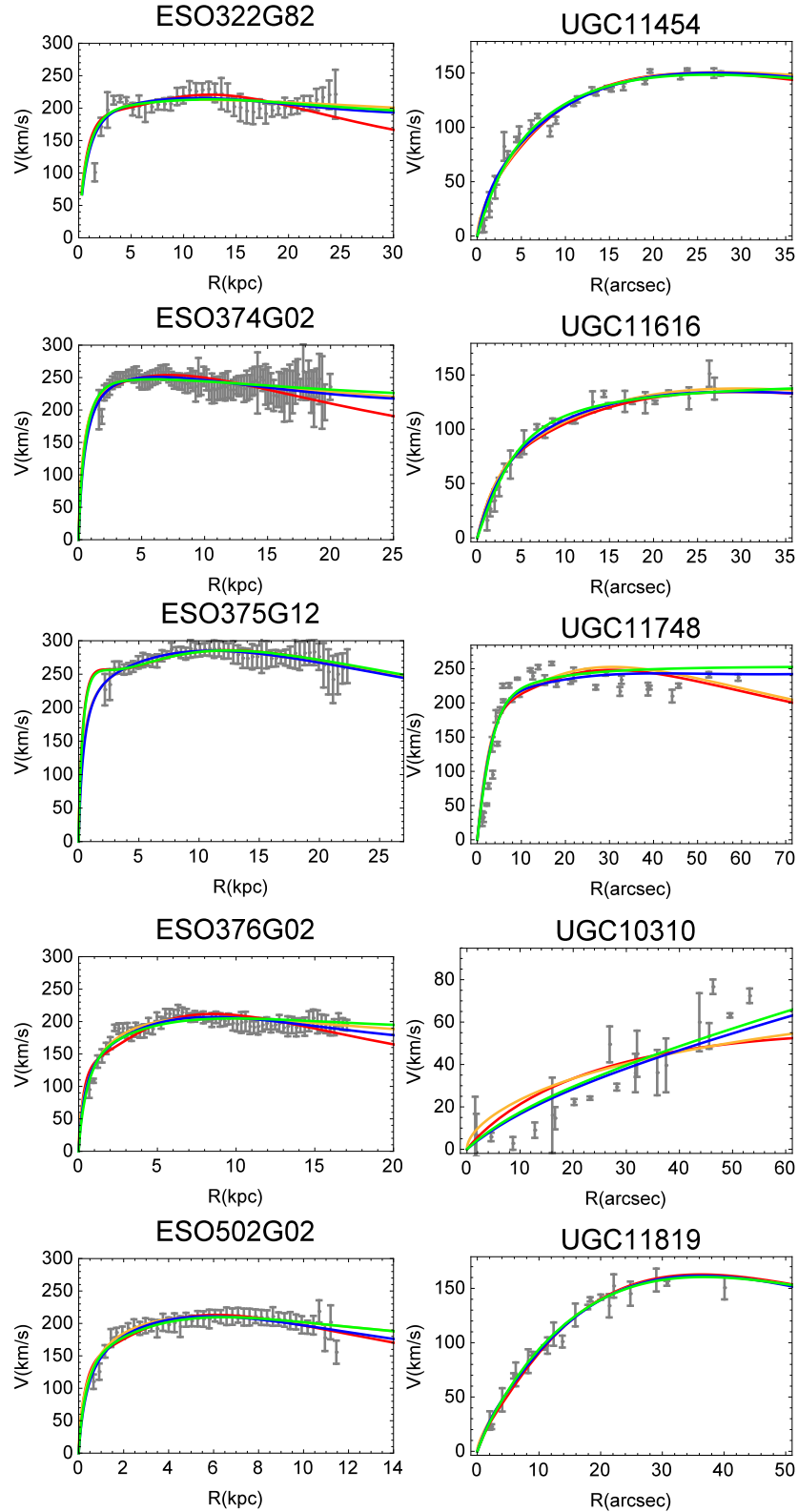
Végül a P-I modell sűrűségprofilja:

$$\rho_{\text{P-I}}(a) = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{a}{r_c}\right)^2} \quad (75)$$

Itt ρ_0 a központi sűrűség, r_c pedig a karakterisztikus távolság. Az ehhez tartozó sebesség:

$$v_{\text{P-I}}^2(R) = 4\pi G \rho_0 r_c^2 \left[1 - \frac{r_c}{R} \arctan\left(\frac{R}{r_c}\right) \right] \quad (76)$$

Egy ilyen illesztés eredménye látható a 9. ábra jobb oldalán. A három illesztés eredményét a 2. táblázatban foglaltam össze. Ezzel elkészítettem 10 db galaxis rotációs görbét először barionikus komponenseket feltételezve, majd három különböző sötét anyag modell felhasználásával. Ezeket egyszerre ábrázolva láthatjuk a 10. ábrán.



10. ábra. Szintén a korábbi színkódot használtam. Vörös színnel jelölöm a barionikus modellel készített illesztéseket, a barionikus és NFW komponenseket használó illesztések narancssárga, a barionikus és BEC komponensek összege kék, a barionikus és PI modellek felhasználásával készített illesztések pedig zöld színűek.

6.1. Az illesztések kiértékelése

Az alábbiakban az illesztéskor nyert χ^2 értékek jelentőségéről, jelentéséről fogok beszélni. Az érték megadja a modell eltérésének négyzetét, azonban a modellek különböző paraméterek bevezetésével járnak, így kizárólag ez alapján nem lehet következtetést levonni a sötét anyag szükségességéről. Először elvégeztem egy valószínűségi hányados tesztet, ahol a sötét anyag modelleket külön-külön összehasonlítottam a barionikus modellel. Ez a teszt megadja egy null-hipotézis valószínűségét. A feltételezésem, hogy a sötét anyag modellek nem fogják jelentősen javítani az illesztések pontosságát. Ez azt jelenti, hogy ha a $p = 1 - F(2\ln(\chi^2/\chi_b^2))$ érték nagyobb, mint a választott 0.05 vagy 0.1 határérték, elfogadjuk a null-hipotézist, azaz elegendő a barionikus modell használata. A p érték definíciójában χ^2 az adott sötét anyag modellhez tartozik, χ_b^2 a barionikus illesztés értéke, F pedig a χ^2 eloszlásfüggvénye az $(N-2)$ értéknél, ahol N a modell által használt paraméterek száma.

Az így kapott p értékeket megtalálhatjuk a 3. táblázatban. Mikor megkaptam az eredményeket, eldöntöttem, a legszigorúbb határértéket választom. Mind a 10 galaxisra találtam legalább egy olyan modellt, amely 0.05-alatti p -értéket ad. Ez alapján elvetjük a null-hipotézist, miszerint a barionikus komponensek elegendőek a rotációs görbe pontos megszerkesztéséhez. A rotációs görbék alapján egy sötét anyag komponens jogosan feltételezhető.

A HSB galaxisoknál 5 esetből 4-szer a BEC profil adta a legpontosabb illeszkedést, egyszer pedig az NFW. Az LSB galaxisoknál pedig 5 esetből 3-szor a P-I profil, 2-szer pedig a BEC profil volt a legpontosabb.

Ezek alapján levonhatóak a következtetések a sötét anyag modellek használatának jelentőségéről, ezután a sötét anyag modelleket szeretném összehasonlítani. A legjobb modell kiválasztásakor az Akaike információs kritérium módszert alkalmaztam, miszerint egy $AIC = 2N + \chi^2$ érték az összes modellre megadható, itt N a modell által használt paraméterek száma. A szakdolgozatomban vizsgált sötét anyag profilok mind 4 paramétert használnak, azonban vizsgáltunk 5 változós (Spherical-Isotermal) modellt is. A legkisebb AIC érték megadja a legpontosabban illeszkedő modellt, ezeket a 3. táblázatban félkövérrel jelöltem.

A modellek és a legpontosabb modell AIC értéke különbségeként képzett Δ értékeket is a 3. táblázatban láthatjuk. Ez az érték $\Delta \leq 2$ esetben hasonló pontosságú modellt, $2 \geq$

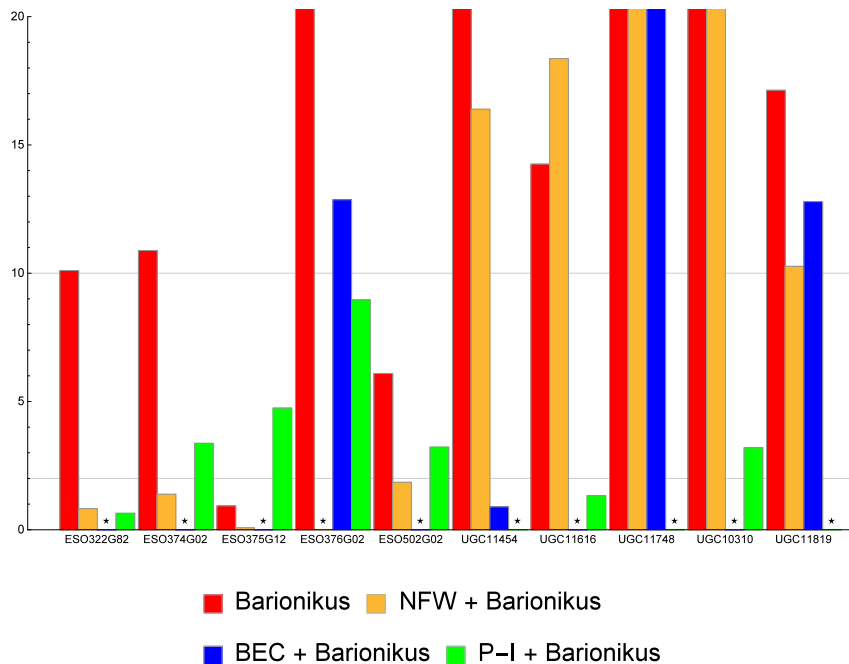
$\Delta \geq 10$ esetben már jelentős különbséget jelent, míg $\Delta > 10$ esetén egyértelműen rosszabb az adott modell a legpontosabb illesztéshez képest. Ezeket a Δ értékeket láthatjuk az alábbi 11. ábrán.

7. Összefoglalás

Az eredményeim alapján a 10 vizsgált galaxis mindegyikére legalább egy olyan sötét anyag modellt találtam, amely jelentősen feljavitja a rotációs görbék pontosságát, a barionikus görbékhez képest.

A Δ értékek alapján az 5 HSB galaxisból 3-nál a barionikus illesztés jelentősen rosszabb, mint a legjobb sötét anyag modell. 3 esetben találtunk legalább egy hasonló pontosságú modellt, egy esetben pedig kettőt is.

Az LSB galaxisoknál pedig mind az ötször a barionikus és NFW profil összehasonlíthatatlanul rosszabb eredményt adott a legjobb illeszkedéshez képest. Két esetben kettő hasonló pontosságú modellt kaptunk. Ezek alapján elmondhatjuk, hogy az LSB galaxisoknál az NFW profil csak kis mértékben javított a pontosságon. Az összes vizsgált galaxisnál a BEC modell adta a legpontosabb eredményt.



11. ábra. Az illesztések Δ -értékei.

A legpontosabb illesztéseket csillaggal jelölöm.

8. Mellékletek

		ESO322G82	ESO374G02	ESO375G12	ESO376G02	ESO502G02	
Fényesség	Bulge	$l_0(L_\odot/kpc^3)$	$3,20 \times 10^9 \pm 0,00$	$4,06 \times 10^{10} \pm 0,00$	$4,33 \times 10^{10} \pm 0,00$	$2,10 \times 10^{10} \pm 0,00$	$1,98 \times 10^{10} \pm 0,00$
		$ka_0(kpc)$	$0,21 \pm 0,01$	$0,07 \pm 0,00$	$0,08 \pm 0,00$	$0,10 \pm 0,00$	$0,09 \pm 0,00$
		n	$1,66 \pm 0,02$	$1,92 \pm 0,04$	$1,80 \pm 0,03$	$1,64 \pm 0,02$	$1,60 \pm 0,01$
		q	$0,88 \pm 1,63$	$0,95 \pm 0,06$	$0,85 \pm 0,07$	$0,90 \pm 1,33$	$0,95 \pm 1,59$
	Disk	$l_0(L_\odot/kpc^3)$	$2,40 \times 10^7 \pm 0,00$	$3,18 \times 10^8 \pm 0,00$	$7,08 \times 10^8 \pm 0,00$	$4,06 \times 10^8 \pm 0,00$	$1,34 \times 10^9 \pm 0,00$
		$ka_0(kpc)$	$8,58 \pm 0,06$	$1,48 \pm 0,04$	$2,70 \pm 0,03$	$3,20 \pm 0,09$	$2,16 \pm 0,02$
		n	$0,66 \pm 0,01$	$1,40 \pm 0,02$	$1,33 \pm 0,01$	$1,01 \pm 0,02$	$1,06 \pm 0,01$
		q	$0,42 \pm 0,48$	$0,40 \pm 0,19$	$0,10 \pm 0,10$	$0,10 \pm 0,17$	$0,06 \pm 0,23$
Illesztés	Υ_{bulge}	2,80	1,20	2,20	1,12	1,62	
	Υ_{disk}	2,70	3,10	2,30	2,89	2,70	
	χ^2	69,86	46,06	12,75	183,49	30,78	
		UGC11454	UGC11616	UGC11748	UGC10310	UGC11819	
Fényesség	Bulge	$l_0(L_\odot/kpc^3)$	$3,38 \times 10^8 \pm 0,00$	$1,68 \times 10^8 \pm 0,00$	$2,16 \times 10^9 \pm 0,00$	$2,77 \times 10^6 \pm 0,00$	$2,57 \times 10^8 \pm 0,00$
		$ka_0(arcsec)$	$0,71 \pm 0,03$	$1,70 \pm 0,16$	$2,68 \pm 0,03$	$7,17 \pm 0,76$	$1,77 \pm 0,08$
		n	$1,05 \pm 0,05$	$0,99 \pm 0,11$	$0,85 \pm 0,01$	$0,95 \pm 0,12$	$0,60 \pm 0,06$
		q	$0,89 \pm 0,04$	$0,94 \pm 0,200$	$0,97 \pm 0,06$	$0,94 \pm 0,11$	$0,88 \pm 0,13$
	Disk	$l_0(L_\odot/kpc^3)$	$4,74 \times 10^8 \pm 0,00$	$3,59 \times 10^8 \pm 0,00$	$7,19 \times 10^8 \pm 0,00$	$8,05 \times 10^6 \pm 0,00$	$1,36 \times 10^8 \pm 0,00$
		$ka_0(arcsec)$	$5,36 \pm 0,14$	$7,00 \pm 0,45$	$9,74 \pm 0,46$	$8,67 \pm 0,65$	$17,90 \pm 0,22$
		n	$1,27 \pm 0,03$	$1,24 \pm 0,06$	$1,12 \pm 0,04$	$1,62 \pm 0,05$	$0,81 \pm 0,02$
		q	$0,08 \pm 0,02$	$0,09 \pm 0,06$	$0,10 \pm 0,03$	$0,40 \pm 0,02$	$0,11 \pm 0,05$
Illesztés	Υ_{bulge}	0,25	0,31	0,1	0,01	0,02	
	Υ_{disk}	0,38	0,23	0,19	0,13	0,21	
	χ^2	142,90	85,67	2727,96	85,38	65,37	

1. táblázat. A barionikus illesztések eredményei

		ESO322G82	ESO374G02	ESO375G12	ESO376G02	ESO502G02
NFW	Υ_{bulge}	1,30	0,69	0,28	0,05	0,18
	Υ_{disk}	0,02	0,01	1,46	0,37	0,72
	$\rho_s(M_\odot/kpc^3)$	$5,41 \times 10^7$	$2,21 \times 10^8$	$1,16 \times 10^9$	$2,25 \times 10^8$	$5,10 \times 10^8$
	$r_s(kpc)$	7,93	4,54	1,78	3,75	2,36
	χ^2	56,58	32,56	7,90	94,58	22,53
BEC	Υ_{bulge}	1,93	0,67	0,86	0,58	0,72
	Υ_{disk}	0,73	1,28	1,41	1,51	1,53
	$\rho_0(M_\odot/kpc^3)$	$1,85 \times 10^5$	$2,45 \times 10^5$	$1,90 \times 10^5$	$1,85 \times 10^5$	$2,14 \times 10^5$
	$ka_0(kpc^{-1})$	0,00	0,00	0,08	0,06	0,16
	χ^2	55,75	31,18	7,82	107,44	20,68
PI	Υ_{bulge}	2,47	1,02	2,08	0,50	1,07
	Υ_{disk}	0,89	0,86	2,10	0,89	1,57
	$\rho_0(M_\odot/kpc^3)$	$3,69 \times 10^7$	$3,48 \times 10^7$	$5,38 \times 10^7$	$3,73 \times 10^8$	$4,55 \times 10^8$
	$r_c(kpc)$	3,08	1,17	1,16	0,99	0,71
	χ^2	56,39	34,55	12,57	103,54	23,90

		UGC11454	UGC11616	UGC11748	UGC10310	UGC11819
NFW	Υ_{bulge}	0,01	0,32	0,10	0,01	0,01
	Υ_{disk}	0,27	0,23	0,20	0,03	0,20
	$\rho_s(M_\odot/kpc^3)$	$9,58 \times 10^5$	$3,22 \times 10^4$	$3,21 \times 10^5$	$2,82 \times 10^3$	$3,47 \times 10^5$
	$r_s(arcsec)$	25,60	8,03	16,20	574,00	19,10
	χ^2	126,37	85,78	2724,74	680,26	54,51
BEC	Υ_{bulge}	0,07	0,09	0,06	0,01	0,01
	Υ_{disk}	0,29	0,16	0,06	0,02	0,19
	$\rho_0(M_\odot/kpc^3)$	$2,16 \times 10^4$	$1,38 \times 10^3$	$8,00 \times 10^4$	$2,61 \times 10^4$	$3,87 \times 10^3$
	$ka_0(arcsec^{-1})$	0,07	0,02	0,01	0,00	0,07
	χ^2	110,87	67,42	2355,14	312,92	57,04
PI	Υ_{bulge}	0,01	0,03	0,07	0,01	0,01
	Υ_{disk}	0,26	0,00	0,01	0,06	0,18
	$\rho_0(M_\odot/kpc^3)$	$8,09 \times 10^6$	$1,14 \times 10^7$	$2,34 \times 10^7$	$2,02 \times 10^4$	$1,37 \times 10^6$
	$r_c(arcsec)$	3,33	4,72	5,74	224,00	5,69
	χ^2	109,97	68,75	2174,71	316,12	44,25

2. táblázat. A sötét anyag modellek illesztéseinek eredményei

	ESO322G82	ESO374G02	ESO375G12	ESO376G02	ESO502G02
$p_{bar,NFW}$	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00
$p_{bar,BEC}$	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00
$p_{bar,PI}$	0,00	0,00	0,83	0,00	0,00
AIC_{bar}	73,86	50,06	16,75	187,49	34,78
AIC_{NFW}	64,58	40,56	15,90	102,58	30,53
AIC_{BEC}	63,75	39,18	15,82	115,44	28,68
AIC_{PI}	64,39	42,55	20,57	111,54	31,90
Δ_{bar}	10,10	10,88	0,93	84,92	6,09
Δ_{NFW}	0,82	1,39	0,08	0,00	1,85
Δ_{BEC}	0,00	0,00	0,00	12,86	0,00
Δ_{PI}	0,64	3,37	4,74	8,96	3,22

	UGC11454	UGC11616	UGC11748	UGC10310	UGC11819
$p_{bar,NFW}$	0,00	0,41	0,04	0,01	0,00
$p_{bar,BEC}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$p_{bar,PI}$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
AIC_{bar}	146,90	89,67	2731,96	689,38	69,37
AIC_{NFW}	134,37	92,79	2732,74	688,26	62,51
AIC_{BEC}	118,87	75,42	2363,14	320,92	65,04
AIC_{PI}	117,97	76,75	2182,70	324,12	52,25
Δ_{bar}	28,93	14,25	549,26	368,45	17,13
Δ_{NFW}	16,39	17,36	550,04	367,34	10,27
Δ_{BEC}	0,89	0,00	180,44	0,00	12,79
Δ_{PI}	0,00	1,33	0,00	3,20	0,00

3. táblázat. Statisztikai eredmények

9. Jövőbeli tervek

Ugyanilyen módszerrel további galaxisok rotációs görbéit fogom modellezni a továbbiakban. Más sötét anyag profilokat is megismerek, hogy pontosabb modelleket tudjak szerkeszteni. Ezekkel további forgásgörbéket illesztetek, és a fentiekhez hasonló módon összehasonlítom őket. A sebességdiszperzió illesztését megismerve ezt az eljárást is alkalmazom különböző galaxisokon!

10. Köszönetnyilvánítás

A szakdolgozat nem készülhetett volna el Dr. Szabó Gábor speciális relativitás jegyzete, valamint Kun Emma határtalan segítőkészsége és türelme nélkül. Hálás vagyok továbbá Zuba Viktornak és a Pizzatoronynak a segítségért és a támogatásért.

11. Nyilatkozat

Alulírott Simkó Attila Tibor, Fizika BSc szakos hallgató (ETR azonosító: SIAVAAT.SZE), a Galaktikus Dinamika: Rotációs görbék és sebességdiszperzió című szakdolgozat szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel. Tudomásul veszem azt, hogy szakdolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában, a kölcsönözhető könyvek között helyezik el.

Szeged, 2016. 05. 10.

aláírás

Hivatkozások

- [1] Tempel E., Tenjes P., 2003, MNRAS, 371, 1269
- [2] Binney J., Merrifield M., 1998, Galactic Astronomy, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ
- [3] Ivezić, B., 2005, Astrophysics III: Stellar Dynamics [PowerPoint slides]. Retrieved from <http://www.astro.washington.edu/users/ivezic/Astr509>
- [4] Kun E., Szűcs G., Keresztes Z., Gergely L. Á., 2016, Astronomy and Astrophysics
- [5] García-Ruiz I., Sancisi R., Kuijken K., 2002, Astronomy and Astrophysics, 394, 769
- [6] Palunas P., Williams T. B., 2000, The Astronomical Journal, 120, 2884-2903
- [7] Kim J., 2007, The Star Formation History of Low Surface Brightness Galaxies, Ph.D, University of Maryland.
- [8] McGaugh S. S., Rubin V. C., DeBlok W. J. G., 2001, The Astronomical Journal, 122, 2381-2395