

Gravitációs dinamika kétszeresen fóliázható téridőkben

Tudományos Diákköri Konferencia dolgozat

Nagy Cecília

Fizika BSc szakos hallgató

Témavezető:

Dr. Keresztes Zoltán

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

2017

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés: A téridő 2+1+1-es felbontásai	1
2. A nemortogonális kettős fóliázás	3
2.1. Az $n^a, m^a, \Sigma_{t\chi}$ felbontás	4
2.1.1. Az $e^{\mathbf{B}}$ és $f^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolata	4
2.1.2. Az \mathcal{S}_t felületsereg létezése és n^a örvénymentessége	6
2.1.3. Az $f_{\mathbf{B}}$ bázis algebrája és m^a örvényessége	7
2.2. Az $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok közötti Lorentz-forgatás	10
2.3. A $k^a, l^a, \Sigma_{t\chi}$ felbontás	12
2.3.1. Az $e^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolata	12
2.3.2. Az \mathfrak{M}_χ felületsereg létezése és l^a örvénymentessége	13
2.3.3. A $g_{\mathbf{B}}$ bázis algebrája és k^a örvényessége	13
2.4. Az \mathcal{S}_t és \mathfrak{M}_χ hiperfelület-normálisok örvénymentességének következményei .	15
2.5. A k^a és m^a bázisvektorok 2-dimenziós örvénymentessége	17
2.6. A k^a és m^a bázisvektorok 3-dimenziós örvényei	18
3. A kovariáns deriváltak 2+1+1 felbontásai	21
3.1. A $\Sigma_{t\chi}$ felületen indukált kovariáns derivált	21
3.2. A $\Sigma_{t\chi}$ felület külső görbületei, normális fundamentális formái és skalárjai . .	22
3.3. A k_a és m_a kovariáns deriváltjainak felbontása	23
3.4. Összefoglalás	24
4. A bevezetett geometriai mennyiségek közötti kapcsolat	25
4.1. A \mathcal{K}_a és \mathcal{L}_a normális fundamentális formák kapcsolata	25
4.2. A \mathcal{K}^* és \mathcal{L}^* normális fundamentális skalárok kapcsolata \mathcal{K} és \mathcal{L} normális fun- damentális skalárokkal	25
4.3. Az \mathfrak{a}_a^* és \mathfrak{b}_a^* gyorsulások kapcsolata \mathfrak{a}_a és \mathfrak{b}_a gyorsulásokkal	27
4.4. A \mathcal{K}_a^* és \mathcal{L}_a^* mennyiségek kapcsolata \mathcal{K}_a és \mathcal{L}_a normális fundamentális formákkal	28
4.5. Az $\mathfrak{a}_a^*, \mathfrak{b}_a^*$ gyorsulások és $\mathcal{K}_a^*, \mathcal{L}_a^*$ mennyiségek végső kifejezései	29
4.6. A k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvényeinek kifejezése geometriai mennyisé- gekkel	30
4.7. A K_{ab}^* és L_{ab}^* külső görbületek kapcsolata K_{ab} és L_{ab} külső görbületekkel . . .	31
4.8. Összefoglalás	32

5. A geometriai és kinematikai mennyiségek kapcsolata	33
5.1. A geometriai mennyiségek és Lie-deriváltak kapcsolata	33
5.2. Az indukált metrika t és χ deriváltjai	35
5.3. A $\tilde{g}(f_A, \tilde{\nabla}_{f_B} f_C)$ és $\tilde{g}(g_A, \tilde{\nabla}_{g_B} g_C)$ mennyiségek 2+1+1 felbontása	37
5.3.1. A gyorsulások és normális fundamentális skalárok kapcsolata a koordinátaderiváltakkal	37
5.3.2. A normális fundamentális formák kapcsolata a koordinátaderiváltakkal	39
5.4. A normális fundamentális vektorok kapcsolata a koordinátaderiváltakkal	40
5.5. Összefoglalás	41
6. Gravitációs dinamika	43
6.1. A Gauss-azonosság	43
6.2. A kétszer kontrahált Gauss-azonosság	44
6.3. Az Einstein-Hilbert hatás 2+1+1 felbontása	47
7. Összefoglalás és kitekintés	49
Köszönetnyilvánítás	51
1. Függelék: A kutatási feladatok	53
2. Függelék: A Frobenius-tétel és duális alakja	55
Irodalomjegyzék	59

1. fejezet

Bevezetés: A téridő 2+1+1-es felbontásai

A speciális relativitáselmélet egyesíti a teret és az időt, egyetlen téridőbe. Az általános relativitáselmélet abban lép tovább, hogy megengedi a téridő görbültségét is. Ez nem más, mint a gravitáció, melyhez tartozó newtoni potenciált a 10 független komponenssel rendelkező \tilde{g}_{ab} metrikus tenzor általánosít.

A tér és idő egységes kezelése ellenére vitathatatlan az idő kiválasztott szerepe, hiszen az időfejlődés jövőirányba történik. Ezért már az általános relativitáselmélet korai éveiben vizsgálták a téridő 3+1 felbontását, a gravitáció ún. Arnowitt-Deser-Misner (ADM) formalizmusát [1]. A 3-dimenziós hiperfelületek serege egy fóliázást alkot. Hiperfelületről hiperfelületre folytonosan változik az időparaméter értéke, míg egy hiperfelületen belül azonos. Ebben a formalizmusban a 4-dimenziós metrika helyét a 3-dimenziós hiperfelületeken indukált metrika (6 változó) és azok külső görbülete (6 változó) veszi át, melyek kanonikus párokat határoznak meg. Az Einstein egyenletek helyére ezeknek a pároknak a hamiltoni fejlődésegyenlete lép. A változókra ezenkívül minden időpontban teljesülő kényszeregyenletek is vonatkoznak. Ezek a Hamiltoni- és a Diffeomorfizmus- (impulzus-) kényszerek. A 3+1 felbontás azért nem triviális, mert általános esetben nincs kiválasztott idő, így az összes választható időfüggvényre alkalmazható kell legyen („many-fingered time” formalizmus [2, 3]). Az ADM felbontást a közelmúltban általánosították f(R) gravitációelméletekre is [4].

Olyankor, ha a tér rendelkezik egy (általában szimmetria által) kiválasztott iránnyal, indokolt lehet a tér további felbontása, így a téridő 2+1+1 felbontása állhat elő. Ezt a legáltalánosabb esetben úgy dolgozták ki, hogy mindkét kiválasztott irány rendelkezik, expanzióval, nyírással és örvénnyel is [5]. Ezt alkalmazták gömbszimmetrikus téridők perturbációira [6], illetve az anizotróp Kantowski-Sachs téridő perturbációira is [7].

Ismert a téridő olyan sokkal egyszerűbb 2+1+1 felbontása is, mely két, egymásra *merőleges* fóliázáson alapul [8, 9]. Ilyenkor az egyik hiperfelület-sereg \mathcal{S}_t hiperfelületeit állandó t idő jellemzi, így ez a hiperfelület-sereg térszerű, n^a normálisa pedig időszerű és normált, $n_a n^a = -1$. A második hiperfelület-sereg \mathfrak{M}_χ hiperfelületeit pedig állandó χ koordináta jellemzi, ez a hiperfelület-sereg időszerű, l^a normálisa térszerű és normált, $l_a l^a = 1$. A Frobenius tétel értelmében ekkor mindkét vektormező örvénymentes (ennek bizonyítását a 2.

Függelékben fogjuk látni). Ugyancsak teljesül, hogy a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a &\equiv Nn^a + N^a, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a &\equiv Ml^a + M^a, \end{aligned}$$

fejlődési vektorok az \mathfrak{M}_χ , illetve \mathcal{S}_t hiperfelületek érintői. A hiperfelületek metszete a $\Sigma_{t\chi}$ 2-dimenziós felület, melyen az indukált metrika g_{ab} . Az N^a és M^a shift-vektorok $\Sigma_{t\chi}$ érintői, N és M pedig lapse-függvények. Összesen tehát 9 metrikus változó van: a g_{ab} metrika 3 független komponense; az N^a és M^a shift vektorok 2+2 komponense; valamint az N , M lapse függvények. A metrikus változók számának csökkenése problémát jelentett az ún. módosított gravitációelméletek effektív térelméleti tárgyalásában [10]. A változók számának 10-ről 9-re csökkenése egy koordináta megválasztásával, azaz gravitációs mérték-transzformáció elhasználásával egyenértékű, így a mérték-rögzítés után is marad a megoldásban tetszőleges időfüggvény, azaz olyan nem-fizikai mérték-módus, mely a perturbációk fizikai értelmezését zavarja.

A probléma kiküszöböléséhez kívánatos lenne egy olyan módosított 2+1+1 felbontás, melyben a gravitációs változók száma legalább 10, de jóval kisebb az általános (kinematikai mennyiségek használatán alapuló) 2+1+1 felbontás változóinak számánál [5]. Ezt a [8, 9] forrásokban, dupla fóliázás feltevése mellett kidolgozott formalizmus olyan általánosításával fogjuk elérni, amelyben a fóliázások merőlegességét nem követeljük meg.

A dolgozat második fejezetében bevezetjük azt a két ortogonális bázist, melyek egyenként a két hiperfelülethez illeszkednek. Megvizsgáljuk a bázisok kapcsolatát egymással és a koordinátabázissal, valamint tárgyaljuk a bázisvektorok örvényességét. Szintén itt adjuk meg a bázisvektorok algebráját. Két független értelmezést adunk a tizedik metrikus függvényre, megmutatjuk, hogy egyrészt a bázisok közötti Lorentz-forgatással, másrészt a bázisvektorok örvényességével függ össze. A harmadik fejezetben a bázisvektorok kovariáns deriváltjainak 2+1+1 felbontását dolgozzuk ki és ezzel kapcsolatos geometriai mennyiségeket (külső görbületek, normális fundamentális formák, normális fundamentális skalárok) vezetünk be. A negyedik fejezetben összefüggéseket állapítunk meg a geometriai mennyiségek között. Az ötödik fejezetben a geometriai mennyiségek és a metrikus függvények idő-, illetve térderiváltjai közötti kapcsolatot vizsgáljuk. Ennek segítségével kiválasztjuk a Lagrange-értelemben sebességeknek, illetve hamiltoni értelemben impulzusoknak tekinthető geometriai mennyiségeket. A hatodik fejezetben elvégezzük az Einstein-Hilbert hatás 2+1+1 felbontásához szükséges számolásokat és megadjuk a hatást a hamiltoni képre történő áttéréshez alkalmas alakban. A hiperfelületek létezésével kapcsolatos Frobenius-tételt és duális alakját a 2. Függelékben tárgyaljuk.

A dolgozatban a következő jelöléseket használjuk: a latin- illetve görög indexek absztrakt indexek 4, illetve 3 dimenzióban (azaz csupán a tenzor-jelleget jelölik), a vastag kis- és nagybetűs latin indexek pedig (például \mathbf{i} , illetve \mathbf{A}) 2, illetve 4-dimenziós bázisvektorok nevében jelennek meg.

2. fejezet

A nemortogonális kettős fóliázás

A [8, 9] cikkekben kidolgozott formalizmust úgy általánosítjuk, hogy az állandó t által meghatározott \mathcal{S}_t és az állandó χ által meghatározott \mathfrak{M}_χ fóliázások ne legyenek merőlegesek egymásra. A kétszeresen fóliázható \mathcal{B} téridő érintőterén bevezetjük az $e_{\mathbf{A}} = \{\partial/\partial t, \partial/\partial\chi, E_i\}$ bázist (itt E_i a $\Sigma_{t\chi}$ érintőterének ortonormált elemei) és ennek duális $e^{\mathbf{B}} = \{dt, d\chi, E^j\}$ bázisát az 1-formák terén.

Legyen az \mathcal{S}_t normálisa továbbra is n^a , a rá (így a $\Sigma_{t\chi}$ -re is) merőleges térszerű normális pedig m^a . Az \mathcal{S}_t hiperfelülethez adaptált ortonormált bázis így $f_{\mathbf{A}} = \{n, m, F_i\}$, a duális bázis az 1-formák terén pedig $f^{\mathbf{B}} = \{\bar{n}, \bar{m}, F^j\}$. Az \mathfrak{M}_χ normálisa pedig továbbra is l^a , a rá (így a $\Sigma_{t\chi}$ -re is) merőleges időszerű normális pedig k^a . Az \mathfrak{M}_χ hiperfelülethez adaptált ortonormált bázis $g_{\mathbf{A}} = \{k, l, F_i\}$, a duális bázis az 1-formák terén pedig $g^{\mathbf{B}} = \{\bar{k}, \bar{l}, F^j\}$.

A 4-dimenziós metrika tehát két ekvivalens módon is felbontható

$$\tilde{g}_{ab} = -n_a n_b + m_a m_b + g_{ab} , \quad (2.1)$$

$$\tilde{g}_{ab} = -k_a k_b + l_a l_b + g_{ab} . \quad (2.2)$$

(Míg a \tilde{g}_{ab} metrika vegyes indexű alakja a Kronecker-szimbólummal azonos, a g_{ab} vegyes indexű alakja a $\Sigma_{t\chi}$ -re vetítő projektor.)

Megjegyezzük még, hogy választhatunk

$$E_i = F_i = G_i = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad (2.3)$$

koordinátabázist.

Könnyen belátható a vektorok időszerű vagy térszerű jellegéből és a dualitási relációkból, hogy:

$$\begin{aligned} \bar{n}_a &= -n_a , & \bar{m}_a &= m_a , \\ \bar{k}_a &= -k_a , & \bar{l}_a &= l_a . \end{aligned}$$

A koordinátavektorok [8, 9] cikkekben bevezetett felbontását következőképpen általánosítjuk:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = Nn^a + N^a + \mathcal{N}m^a , \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a = Mm^a + M^a + \mathcal{M}n^a . \quad (2.5)$$

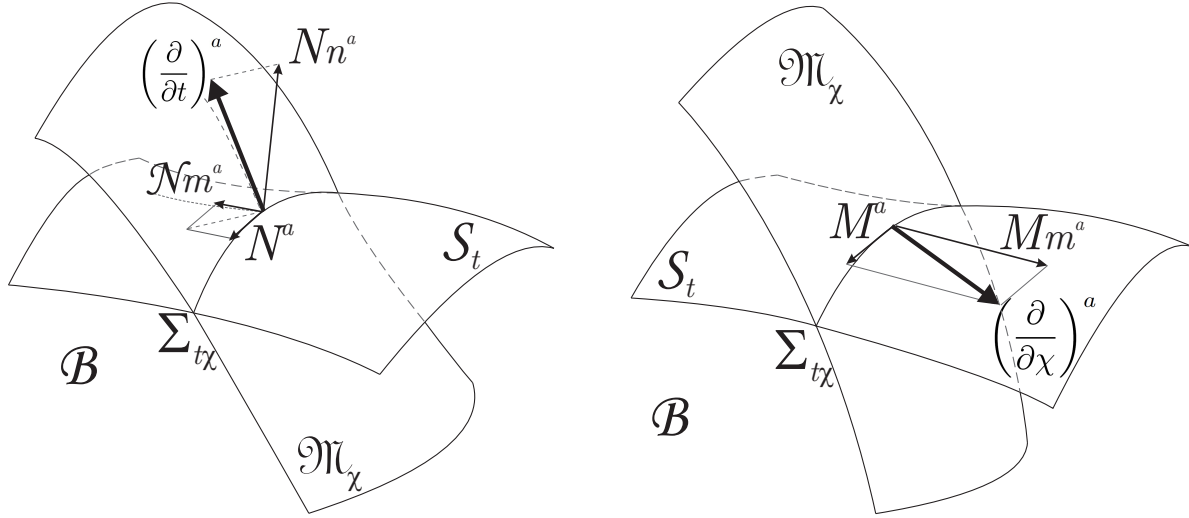
Itt \mathcal{N} és \mathcal{M} a háromdimenziós shift vektorok $\Sigma_{t\chi}$ -re merőleges komponensei. A g_{ab} kétdimenziós metrika 3 független komponensével együtt így a gravitációt (egyelőre) 11 változó jellemzi.

A $\partial/\partial t$ időfejlődési vektor időszerűségének (és az N^a térszerűségének) következménye, hogy

$$N^2 - \mathcal{N}^2 > g_{ab}N^aN^b \geq 0 ,$$

a jövőirányítottsága miatt pedig N pozitív.

A kettős fóliázás részleteit az 2.1 ábra mutatja be.



2.1. ábra. A téridő kettős fóliázásában szerepet játszó hiperfelületek, a hozzájuk adaptált bázisvektorok, valamint a t és χ irányú fejlődések (itt már felhasználtuk a később levezetendő 2.9 összefüggést).

2.1. Az $n^a, m^a, \Sigma_{t\chi}$ felbontás

2.1.1. Az $e^{\mathbf{B}}$ és $f^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolata

A duális vektorbázisok kapcsolatát a (2.3)-(2.5) összefüggések tartalmazzák. Az 1-forma bázisok kapcsolatát

$$\bar{n} = \alpha^{-1}dt , \quad (2.6)$$

$$\bar{m} = \rho^{-1}dt + \sigma^{-1}d\chi , \quad (2.7)$$

$$F^{\mathbf{j}} = A_t^{\mathbf{j}}dt + A_\chi^{\mathbf{j}}d\chi + (A^{-1})_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}E^{\mathbf{i}} \quad (2.8)$$

módon adhatjuk meg, az ismeretlen $\alpha, \rho, \sigma, A_t^{\mathbf{j}}, A_\chi^{\mathbf{j}}$ és $(A^{-1})_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}}$ együtthatókat pedig az $\langle e^{\mathbf{B}}, e_{\mathbf{A}} \rangle = \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} = \langle f^{\mathbf{B}}, f_{\mathbf{A}} \rangle$ dualitási relációk segítségével határozhatjuk meg.

A $\Sigma_{t\chi}$ -re merőleges rész dualitási relációiból indulunk ki. A (2.6) és (2.7) kifejezések invertálásának, azaz

$$\begin{aligned} dt &= \alpha \bar{n} , \\ d\chi &= \sigma \left(\bar{m} - \frac{\alpha}{\rho} \bar{n} \right) \end{aligned}$$

segítségével az alábbi összefüggések adódnak:

$$1 = \left\langle dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \alpha N \rightarrow \alpha = \frac{1}{N} ,$$

valamint

$$0 = \left\langle dt, \frac{\partial}{\partial \chi} \right\rangle = \frac{\mathcal{M}}{N} \rightarrow \mathcal{M} = 0 . \quad (2.9)$$

Ezzel az eredménnyel az eredetileg 11 gravitációs változó közül az egyik eltűnik, csak 10 marad, ami ugyanannyi, mint a 4-dimenziós metrika független komponenseinek száma. Továbbá

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle d\chi, \frac{\partial}{\partial \chi} \right\rangle = \sigma M \rightarrow \sigma = \frac{1}{M} , \\ 0 &= \left\langle d\chi, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{M} \left(\mathcal{N} - \frac{1}{\rho} \right) \rightarrow \rho = \frac{1}{\mathcal{N}} , \end{aligned}$$

tehát

$$dt = \frac{1}{N} \bar{n} , \quad (2.10)$$

$$d\chi = \frac{1}{M} \left(\bar{m} - \frac{\mathcal{N}}{N} \bar{n} \right) . \quad (2.11)$$

Az $f^{\mathbf{B}}$ bázis kifejezését az $e^{\mathbf{B}}$ bázis segítségével az

$$E^i = A_j^i \left[F^j - \frac{1}{N} \left(A_t^j - \frac{\mathcal{N}}{M} A_\chi^j \right) \bar{n} - \frac{1}{M} A_\chi^j \bar{m} \right]$$

összefüggés teszi teljessé. Az $A_t^j, A_\chi^j, (A^{-1})_i^j$ együtthatók meghatározhatók a maradék dualitási relációkból (az $N^a = N^i F_i^a$ és $M^a = M^i F_i^a$ felbontások bevezetése után):

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}} &= \langle E^{\mathbf{i}}, E_{\mathbf{k}} \rangle = A_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}} \rightarrow A_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}} = \delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{i}} , \\ 0 &= \left\langle E^{\mathbf{i}}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = N^{\mathbf{i}} - A_t^{\mathbf{i}} \rightarrow A_t^{\mathbf{i}} = N^{\mathbf{i}} , \\ 0 &= \left\langle E^{\mathbf{i}}, \frac{\partial}{\partial \chi} \right\rangle = M^{\mathbf{i}} - A_\chi^{\mathbf{i}} \rightarrow A_\chi^{\mathbf{i}} = M^{\mathbf{i}} , \end{aligned}$$

azaz

$$E^i = F^i - \frac{1}{N} \left(N^i - \frac{\mathcal{N}}{M} M^i \right) \bar{n} - \frac{1}{M} M^i \bar{m} . \quad (2.12)$$

A $\langle dt, E_i \rangle$ és $\langle d\chi, E_i \rangle$ dualitási feltételek triviálisan teljesülnek.

Összefoglalva, a két duális bázis kapcsolata:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= N dt , \\ \bar{m} &= \mathcal{N} dt + M d\chi , \\ F^j &= N^j dt + M^j d\chi + E^j . \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.1.2. Az \mathcal{S}_t felületsereg létezése és n^a örvénymentessége

Az alábbiakban részletesebben is megvizsgáljuk az $\mathcal{M} = 0$ eredményünk következményeit.

Ehhez először a (2.4) és (2.5) egyenletekből, még \mathcal{M} megtartásával, kifejezzük az n^a , m^a vektorokat:

$$n^a = \frac{M}{(MN - \mathcal{M}\mathcal{N})} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{\mathcal{N}}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a - N^a + \frac{\mathcal{N}}{M} M^a \right], \quad (2.14)$$

$$m^a = \frac{N}{(MN - \mathcal{M}\mathcal{N})} \left[-\frac{\mathcal{M}}{N} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a + \frac{\mathcal{M}}{N} N^a - M^a \right]. \quad (2.15)$$

Két vektor Lie-zárójele egy f tesztfüggvény segítségével következőképpen számolható:

$$\begin{aligned} [V, W]f &= V^b \partial_b (W^a \partial_a f) - W^b \partial_b (V^a \partial_a f) \\ &= V^b \partial_b^a W \partial_a f + V^b W^a \partial_b \partial_a f - W^b \partial_b V^a \partial_a f - W^b V^a \partial_b \partial_a f \\ &= (V^b \partial_b^a W - W^b \partial_b V^a) \partial_a f. \end{aligned}$$

Azaz

$$[V, W]^a = V^b \partial_b^a W - W^b \partial_b V^a.$$

Ezt követően kiszámoljuk az m és $F_{\mathbf{i}}$ bázisvektorok Lie-zárójelét. A Lie-zárójel számolása a következőképpen történik. A számolásban megjelenő $f_{\mathbf{B}}$ bázisvektorokat áttranszformáljuk koordinátabázisba a (2.14)-(2.15) összefüggések, valamint a (2.3) segítségével, majd elvégezzük a deriválásokat, végül visszatranszformálunk az $f_{\mathbf{B}}$ bázisba. Tehát lépésenként

$$\begin{aligned} [m, F_{\mathbf{i}}]^a &= m^b \partial_b F_{\mathbf{i}}^a - F_{\mathbf{i}}^b \partial_b m^a = m^b \partial_b \delta_{\mathbf{i}}^a - \delta_{\mathbf{i}}^b \partial_b m^a = -\delta_{\mathbf{i}}^b \partial_b m^a \\ &= -\partial_{\mathbf{i}} \left\{ \left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}} \right) \left[-\frac{\mathcal{M}}{N} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a + \frac{\mathcal{M}}{N} N^a - M^a \right] \right\} \\ &= -\partial_{\mathbf{i}} \left\{ \left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}} \right) \left[-\frac{\mathcal{M}}{N} \delta_t^a + \delta_{\chi}^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N} N^j - M^j \right) \delta_j^a \right] \right\} \\ &= -\partial_{\mathbf{i}} \left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N} \right)^{-1} \left[-\frac{\mathcal{M}}{N} \delta_t^a + \delta_{\chi}^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N} N^j - M^j \right) \delta_j^a \right] \\ &\quad - \frac{N}{(MN - \mathcal{M}\mathcal{N})} \partial_{\mathbf{i}} \left[-\frac{\mathcal{M}}{N} \delta_t^a + \delta_{\chi}^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N} N^j - M^j \right) \delta_j^a \right] \\ &= \left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}} \right)^2 \partial_{\mathbf{i}} \left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N} \right) \left[-\frac{\mathcal{M}}{N} \delta_t^a + \delta_{\chi}^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N} N^j - M^j \right) \delta_j^a \right] \\ &\quad - \left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}} \right) \left\{ -\partial_{\mathbf{i}} \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) \delta_t^a + \left[\partial_{\mathbf{i}} \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) N^j + \frac{\mathcal{M}}{N} \partial_{\mathbf{i}} N^j - \partial_{\mathbf{i}} M^j \right] \delta_j^a \right\}. \end{aligned}$$

Ebbe visszahelyettesítve $f_{\mathbf{A}}$ bázisvektorokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N} [m, F_{\mathbf{i}}]^a &= \left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}} \right) \partial_{\mathbf{i}} \left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N} \right) \\ &\quad \times \left[-\frac{\mathcal{M}}{N} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N} N^j - M^j \right) \delta_j^a \right] \\ &\quad - \left\{ -\partial_{\mathbf{i}} \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \left[\partial_{\mathbf{i}} \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) N^j + \frac{\mathcal{M}}{N} \partial_{\mathbf{i}} N^j - \partial_{\mathbf{i}} M^j \right] \delta_j^a \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}} \right) \partial_i \left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N} \right) \\
&\times \left[-\frac{\mathcal{M}}{N} (Nn^a + N^a + \mathcal{N}m^a) + (Mm^a + M^a + \mathcal{M}n^a) + \left(\frac{\mathcal{M}}{N} N^j - M^j \right) \delta_j^a \right] \\
&- \left\{ -\partial_i \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) (Nn^a + N^a + \mathcal{N}m^a) + \left[\partial_i \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) N^j + \frac{\mathcal{M}}{N} \partial_i N^j - \partial_i M^j \right] \delta_j^a \right\} \\
&= \left\{ N \partial_i \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) n^a + \left[\mathcal{N} \partial_i \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) + \partial_i \left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N} \right) \right] m^a + \left(\partial_i M^j - \frac{\mathcal{M}}{N} \partial_i N^j \right) F_j^a \right\}
\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}
\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N} [m, F_j]^a &= N \partial_j \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) n^a + \left(\partial_j M^i - \frac{\mathcal{M}}{N} \partial_j N^i \right) F_i^a \\
&+ \left[\mathcal{N} \partial_j \left(\frac{\mathcal{M}}{N} \right) + \partial_j \left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N} \right) \right] m^a . \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Amennyiben $\mathcal{M} = 0$, a (2.16) Lie-zárójelben az n^a irányú tag eltűnik, így

$$[m, F_j]^a = \partial_j (\ln M) m^a + \frac{\partial_j M^i}{M} F_i^a \quad (2.17)$$

az eredmény. Tehát a Frobenius-tétel értelmében (2. Függelék) az $\{m, F_i\}$ vektorok $\mathcal{M} = 0$ esetén valóban az \mathcal{S}_t hiperfelület érintőterét feszítik ki. A Frobenius-tétel duális megfogalmazása értelmében pedig n^a örvénymentes.

Az $\mathcal{M} = 0$ feltételből és (2.5) felbontásból az is látszik, hogy $\partial/\partial\chi$ érintője lesz az \mathcal{S}_t hiperfelületnek. A további számolásoknál mindenütt felhasználjuk az $\mathcal{M} = 0$ eredményünket, azaz a 4-dimenziós \tilde{g}_{ab} metrika 10 független komponense helyett a $g_{ab}, N^a, M^a, N, M, \mathcal{N}$ mennyiségek 10 független komponense fejezi ki a gravitációt.

2.1.3. Az $f_{\mathbf{B}}$ bázis algebrája és m^a örvényessége

Felmerül, hogy az m^a bázisvektor, a rá merőleges n^a bázisvektorhoz hasonlóan, örvénymentes-e. Ennek tisztázása érdekében kiszámoljuk az $f_{\mathbf{B}}$ bázisvektorok algebráját, felhasználva a (2.3), (2.4), (2.5), (2.14) és (2.15) összefüggések $\mathcal{M} = 0$ alesetét.

Az $f^{\mathbf{B}}$ bázisvektorok algebráját a (2.17), az $[F_i, F_j]^a = \delta_{ij}$ és a következő összefüggések adják meg:

$$\begin{aligned}
[n, F_j]^a &= n^b \partial_b \delta_j^a - \delta_j^b \partial_b n^a \\
&= \partial_j \left(\frac{1}{N} \right) \left[- \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{\mathcal{N}}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a + N^a - \frac{\mathcal{N}}{M} M^a \right] \\
&+ \frac{1}{N} \left[\partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a + \partial_j N^a - \partial_j \frac{\mathcal{N}}{M} M^a - \frac{\mathcal{N}}{M} \partial_j M^a \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\partial_j \left(\frac{1}{N} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \partial_j \left(\frac{1}{N} \frac{\mathcal{N}}{M} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a \\
&\quad + \partial_j \left(\frac{1}{N} \right) N^a + \frac{1}{N} \partial_j N^a - \partial_j \left(\frac{1}{N} \frac{\mathcal{N}}{M} \right) M^a - \frac{1}{N} \frac{\mathcal{N}}{M} \partial_j M^a \\
&= -\partial_j \left(\frac{1}{N} \right) (N n^a + N^a + \mathcal{N} m^a) + \partial_j \left(\frac{1}{N} \frac{\mathcal{N}}{M} \right) (M m^a + M^a) \\
&\quad + \partial_j \left(\frac{1}{N} \right) N^a + \frac{1}{N} \partial_j N^a - \partial_j \left(\frac{1}{N} \frac{\mathcal{N}}{M} \right) M^a - \frac{1}{N} \frac{\mathcal{N}}{M} \partial_j M^a \\
&= \partial_j (\ln N) n^a + \frac{M}{N} \partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) m^a + \frac{1}{N} \left[\partial_j N^a - \frac{\mathcal{N}}{M} \partial_j M^a \right]
\end{aligned}$$

tehát

$$[n, F_j]^a = \partial_j (\ln N) n^a + \frac{M}{N} \partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) m^a + \frac{1}{N} \left[\partial_j N^i - \frac{\mathcal{N}}{M} \partial_j M^i \right] F_i^a. \quad (2.18)$$

Az $f^{\mathbf{B}}$ bázis $\{n, F_i\}$ vektorainak (2.18) Lie-zárójelében az m^a irányú tag nem tűnik el (kivéve az $\mathfrak{s} = 0 = \mathcal{N} = N \tanh \phi$ esetet, melyet a [8, 9] munkák tárgyaltak és melyet a jelen munkában általánosítani szeretnénk). Tehát az $\{n, F_i\}$ vektorok nem feszítenek ki hiperfelület-tangensteret és így az m^a nem hiperfelület-merőleges, hanem örvényes vektormező.

Hasonlóan számolandó

$$\begin{aligned}
[n, m]^a &= n^b \partial_b m^a - m^b \partial_b n^a = n^b \partial_b \left\{ \frac{1}{M} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a - M^a \right] \right\} \\
&\quad - m^b \partial_b \left\{ \frac{1}{N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{\mathcal{N}}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a - N^a + \frac{\mathcal{N}}{M} M^a \right] \right\} \\
&= n^b \partial_b \left[\frac{1}{M} (\delta_\chi^a - M^i \delta_i^a) \right] - m^b \partial_b \left[\frac{1}{N} \left(\delta_t^a - \frac{\mathcal{N}}{M} \delta_\chi^a - N^i \delta_i^a + \frac{\mathcal{N}}{M} M^i \delta_i^a \right) \right] \\
&= \frac{1}{N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^b - \frac{\mathcal{N}}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^b - N^b + \frac{\mathcal{N}}{M} M^b \right] \\
&\quad \left[\partial_b \left(\frac{1}{M} \right) \delta_\chi^a - \partial_b \left(\frac{1}{M} \right) M^i \delta_i^a - \frac{1}{M} \partial_b M^i \delta_i^a \right] \\
&\quad - \frac{1}{M} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^b - M^b \right] \left[\partial_b \left(\frac{1}{N} \right) \delta_t^a - \partial_b \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) \delta_\chi^a - \partial_b \left(\frac{1}{N} \right) N^i \delta_i^a \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{N} \partial_b N^i \delta_i^a + \partial_b \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) M^i \delta_i^a + \frac{\mathcal{N}}{MN} \partial_b M^i \delta_i^a \right] \\
&= \frac{1}{N} \left[\partial_t \left(\frac{1}{M} \right) \delta_\chi^a - \partial_t \left(\frac{1}{M} \right) M^i \delta_i^a - \frac{1}{M} \partial_t M^i \delta_i^a \right] \\
&\quad - \frac{\mathcal{N}}{MN} \left[\partial_\chi \left(\frac{1}{M} \right) \delta_\chi^a - \partial_\chi \left(\frac{1}{M} \right) M^i \delta_i^a - \frac{1}{M} \partial_\chi M^i \delta_i^a \right] \\
&\quad + \frac{1}{N} \left[-N^j + \frac{\mathcal{N}}{M} M^j \right] \left[\partial_j \left(\frac{1}{M} \right) \delta_\chi^a - \partial_j \left(\frac{1}{M} \right) M^i \delta_i^a - \frac{1}{M} \partial_j M^i \delta_i^a \right] \\
&\quad - \frac{1}{M} \left[\partial_\chi \left(\frac{1}{N} \right) \delta_t^a - \partial_\chi \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) \delta_\chi^a - \partial_\chi \left(\frac{1}{N} \right) N^i \delta_i^a \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{N}\partial_\chi N^i\delta_i^a + \partial_\chi \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) M^i\delta_i^a + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_\chi M^i\delta_i^a \Big] \\
& + \frac{1}{M}M^j \left[\partial_j \left(\frac{1}{N} \right) \delta_i^a - \partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) \delta_\chi^a - \partial_j \left(\frac{1}{N} \right) N^i\delta_i^a \right. \\
& \left. - \frac{1}{N}\partial_j N^i\delta_i^a + \partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) M^i\delta_i^a + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_j M^i\delta_i^a \right] \\
= & \frac{1}{N} \left[\partial_t \left(\frac{1}{M} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\chi} \right)^a - \partial_t \left(\frac{1}{M} \right) M^i\delta_i^a - \frac{1}{M}\partial_t M^i\delta_i^a \right] \\
& - \frac{\mathcal{N}}{MN} \left[\partial_\chi \left(\frac{1}{M} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\chi} \right)^a - \partial_\chi \left(\frac{1}{M} \right) M^i\delta_i^a - \frac{1}{M}\partial_\chi M^i\delta_i^a \right] \\
& + \frac{1}{N} \left[-N^j + \frac{\mathcal{N}}{M}M^j \right] \left[\partial_j \left(\frac{1}{M} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\chi} \right)^a - \partial_j \left(\frac{1}{M} \right) M^i\delta_i^a - \frac{1}{M}\partial_j M^i\delta_i^a \right] \\
& - \frac{1}{M} \left[\partial_\chi \left(\frac{1}{N} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \partial_\chi \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\chi} \right)^a - \partial_\chi \left(\frac{1}{N} \right) N^i\delta_i^a \right. \\
& \left. - \frac{1}{N}\partial_\chi N^i\delta_i^a + \partial_\chi \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) M^i\delta_i^a + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_\chi M^i\delta_i^a \right] \\
& + \frac{1}{M}M^j \left[\partial_j \left(\frac{1}{N} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) \left(\frac{\partial}{\partial\chi} \right)^a - \partial_j \left(\frac{1}{N} \right) N^i\delta_i^a \right. \\
& \left. - \frac{1}{N}\partial_j N^i\delta_i^a + \partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) M^i\delta_i^a + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_j M^i\delta_i^a \right] \\
= & \frac{1}{N} \left[\partial_t \left(\frac{1}{M} \right) (Mm^a + M^i F_i^a) - \partial_t \left(\frac{1}{M} \right) M^i F_i^a - \frac{1}{M}\partial_t M^i F_i^a \right] \\
& - \frac{\mathcal{N}}{MN} \left[\partial_\chi \left(\frac{1}{M} \right) (Mm^a + M^i F_i^a) - \partial_\chi \left(\frac{1}{M} \right) M^i F_i^a - \frac{1}{M}\partial_\chi M^i F_i^a \right] \\
& + \frac{1}{N} \left[-N^j + \frac{\mathcal{N}}{M}M^j \right] \left[\partial_j \left(\frac{1}{M} \right) (Mm^a + M^i F_i^a) - \partial_j \left(\frac{1}{M} \right) M^i F_i^a - \frac{1}{M}\partial_j M^i F_i^a \right] \\
& - \frac{1}{M} \left[\partial_\chi \left(\frac{1}{N} \right) (Nn^a + N^i F_i^a + \mathcal{N}m^a) - \partial_\chi \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) (Mm^a + M^i F_i^a) \right. \\
& \left. - \partial_\chi \left(\frac{1}{N} \right) N^i F_i^a - \frac{1}{N}\partial_\chi N^i F_i^a + \partial_\chi \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) M^i F_i^a + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_\chi M^i F_i^a \right] \\
& + \frac{1}{M}M^j \left[\partial_j \left(\frac{1}{N} \right) (Nn^a + N^i F_i^a + \mathcal{N}m^a) - \partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) (Mm^a + M^i F_i^a) \right. \\
& \left. - \partial_j \left(\frac{1}{N} \right) N^i F_i^a - \frac{1}{N}\partial_j N^i F_i^a + \partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{MN} \right) M^i F_i^a + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_j M^i F_i^a \right] .
\end{aligned}$$

Tehát:

$$\begin{aligned}
[n, m]^a &= \frac{1}{M} \left[\partial_\chi (\ln N) - \frac{1}{M}M^j\partial_j (\ln N) \right] n^a \\
& + \frac{1}{MN} [-\partial_t M + \partial_\chi \mathcal{N} + N^j\partial_j M - M^j\partial_j \mathcal{N}] m^a \\
& + \frac{1}{MN} (-\partial_t M^i + \partial_\chi N^i + N^j\partial_j M^i - M^j\partial_j N^i) F_i^a . \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Ezzel befejeztük az $f_{\mathbf{B}}$ bázis algebrájának számolását, melyet az alábbi táblázatban foglalunk össze:

	$[n, m]^a$	$[n, F_j]^a$	$[m, F_j]^a$
n^a	$\frac{1}{M} [\partial_\chi (\ln N) - \frac{1}{M} M^j \partial_j (\ln N)]$	$\partial_j (\ln N)$	0
m^a	$\frac{1}{MN} [-\partial_t M + \partial_\chi \mathcal{N} + N^j \partial_j M - M^j \partial_j \mathcal{N}]$	$\frac{M}{N} \partial_j \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right)$	$\partial_j (\ln M)$
F_i^a	$\frac{1}{MN} (-\partial_t M^i + \partial_\chi N^i + N^j \partial_j M^i - M^j \partial_j N^i)$	$\frac{1}{N} [\partial_j N^i - \frac{\mathcal{N}}{M} \partial_j M^i]$	$\frac{\partial_j M^i}{M}$

2.2. Az $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok közötti Lorentz-forgatás

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy az $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok közötti Lorentz-forgatás kapcsolatban áll a [8, 9] munkákhoz képest itt megtartandó \mathcal{N} shift komponenssel.

Első lépésben szükségünk lesz az $e^{\mathbf{B}}$ és a $g^{\mathbf{B}}$ bázis-formák kapcsolatára:

$$\bar{l} = \beta^{-1} d\chi, \quad (2.20)$$

$$\bar{k} = \gamma^{-1} d\chi + \eta^{-1} dt, \quad (2.21)$$

$$G^i = B_t^i dt + B_\chi^i d\chi + (B^{-1})_j^i E^j. \quad (2.22)$$

Szeretnénk, hogy az \bar{l} és \bar{m} 1-formák χ -vel, valamint \bar{k} és \bar{n} 1-formák t -vel ugyanúgy változzanak, ezért $\text{sgn}(\beta) = \text{sgn}(M)$ és $\text{sgn}(\eta) = 1$. A β , γ , η , B_t^i , B_χ^i és $(B^{-1})_j^i$ ismeretlen együtthatókat részben itt, teljességükben a következő fejezetben határozzuk meg. Invertáljuk a (2.20) és (2.21) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} d\chi &= \beta \bar{l}, \\ dt &= \eta \left(\bar{k} - \frac{\beta}{\gamma} \bar{l} \right). \end{aligned}$$

A (2.3)-(2.5) kifejezések segítségével és az $\langle e^{\mathbf{B}}, e_{\mathbf{A}} \rangle = \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}$ dualitási feltételekből előállnak a \bar{k} , \bar{l} 1-formák $e_{\mathbf{A}}$ bázisban felvett komponensei:

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle d\chi, \frac{\partial}{\partial \chi} \right\rangle = \beta M \langle \bar{l}, m \rangle \rightarrow \langle \bar{l}, m \rangle = \frac{1}{\beta M}, \\ 0 &= \left\langle d\chi, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \beta N \langle \bar{l}, n \rangle + \frac{\mathcal{N}}{M} \rightarrow \langle \bar{l}, n \rangle = -\frac{\mathcal{N}}{N\beta M}, \\ 0 &= \left\langle dt, \frac{\partial}{\partial \chi} \right\rangle = \eta \left(M \langle \bar{k}, m \rangle - \frac{1}{\gamma} \right) \rightarrow \langle \bar{k}, m \rangle = \frac{1}{\gamma M}, \\ 1 &= \left\langle dt, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \eta \left(N \langle \bar{k}, n \rangle + \frac{\mathcal{N}}{\gamma M} \right) \rightarrow \langle \bar{k}, n \rangle = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{\mathcal{N}}{\gamma M} \right). \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} k_a &= -(k_b n^b) n_a + (k_b m^b) m_a, \\ l_a &= -(l_b n^b) n_a + (l_b m^b) m_a, \end{aligned}$$

belátható, hogy

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \langle \bar{k}, n \rangle \bar{n} + \langle \bar{k}, m \rangle \bar{m}, \\ \bar{l} &= \langle \bar{l}, n \rangle \bar{n} + \langle \bar{l}, m \rangle \bar{m},\end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{1}{N} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{\mathcal{N}}{\gamma M} \right) \bar{n} + \frac{1}{\gamma M} \bar{m}, \\ \bar{l} &= \frac{1}{\beta M} \left(-\frac{\mathcal{N}}{N} \bar{n} + \bar{m} \right).\end{aligned}\tag{2.23}$$

Az $\langle f^{\mathbf{B}}, f_{\mathbf{A}} \rangle = \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}$ dualitási relációk felhasználásával pedig levezethetők az alábbiak:

$$1 = \langle \bar{l}, l \rangle = \frac{1}{(\beta M)^2} \left(\frac{N^2}{N^2} - \frac{\mathcal{N}^2}{N^2} \right) \rightarrow \beta M = \frac{(N^2 - \mathcal{N}^2)^{1/2}}{N}\tag{2.24}$$

(a gyökvonásnál a $\text{sgn}(\beta) = \text{sgn}(M)$ feltevés értelmében a pozitív gyököt választottuk),

$$0 = \langle \bar{l}, k \rangle = \frac{-\mathcal{N}}{\beta M N^2} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{\mathcal{N}}{\gamma M} + \frac{N^2}{\gamma M \mathcal{N}} \right) \rightarrow \frac{1}{\eta} = \frac{\mathcal{N}^2 - N^2}{\gamma M \mathcal{N}}\tag{2.25}$$

(ebből $\text{sgn}(\gamma) = -\text{sgn}(M\mathcal{N})$ következik), végül

$$1 = \langle \bar{k}, k \rangle = \frac{1}{(\gamma M)^2} \frac{(N^2 - \mathcal{N}^2)}{N^2} \rightarrow -\gamma M = \frac{(N^2 - \mathcal{N}^2)^{1/2}}{\mathcal{N}}\tag{2.26}$$

(a gyökvonásnál a negatív gyököt választottuk $\text{sgn}(\gamma) = -\text{sgn}(M\mathcal{N})$ miatt).

A (2.24), (2.25), (2.26) összefüggéseket visszahelyettesítve a (2.23) egyenletekbe:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{N\bar{n} - \mathcal{N}\bar{m}}{(N^2 - \mathcal{N}^2)^{1/2}}, \\ \bar{l} &= \frac{-\mathcal{N}\bar{n} + N\bar{m}}{(N^2 - \mathcal{N}^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\begin{pmatrix} k_a \\ l_a \end{pmatrix} = (N^2 - \mathcal{N}^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} N & \mathcal{N} \\ \mathcal{N} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_a \\ m_a \end{pmatrix}$$

következik. Bevezetve a $\mathcal{N} = N \tanh \phi$ jelölést, a transzformáció Lorentz-forgatásnak felel meg:

$$\begin{pmatrix} k_a \\ l_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_a \\ m_a \end{pmatrix}.\tag{2.27}$$

Bevezetjük még a további egyszerűsítő jelöléseket is: $\mathfrak{s} = \sinh \phi$ és $\mathfrak{c} = \cosh \phi$, így $\mathcal{N} = (\mathfrak{s}/\mathfrak{c})N$. A felsőindexes vektorokra ugyanaz a transzformáció vonatkozik:

$$\begin{pmatrix} k^a \\ l^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \mathfrak{s} \\ \mathfrak{s} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^a \\ m^a \end{pmatrix},\tag{2.28}$$

a bázis-formákra pedig az inverz-transzponált Lorentz-transzformáció:

$$\begin{pmatrix} \bar{k} \\ \bar{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ -\mathbf{s} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{m} \end{pmatrix} .$$

Az $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolatát a következő fejezet végén lesz teljes, az $F^{\mathbf{j}}$ és $G^{\mathbf{j}}$ formák közötti összefüggés megadásával.

2.3. A $k^a, l^a, \Sigma_{t\chi}$ felbontás

2.3.1. Az $e^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolata

A (2.4), (2.5) és (2.28) felhasználásával levezethetők a fejlődésvektorok $f_{\mathbf{A}}$ -bázisbeli felbontásai:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a = \frac{N}{\mathbf{c}} k^a + N^i G_i^a , \quad (2.29)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a = M(-\mathbf{s}k^a + \mathbf{c}l^a) + M^i G_i^a . \quad (2.30)$$

A (2.20)-(2.22) egyenletekben szereplő $\beta, \gamma, \eta, B_t^i, B_\chi^i$ és $(B^{-1})_j^i$ együtthatókra eddig a (2.24)-(2.26) kifejezéseket határoztuk meg:

$$\frac{1}{\beta} = M\mathbf{c} , \quad \frac{1}{\eta} = \frac{N}{\mathbf{c}} , \quad \frac{1}{\gamma} = -M\mathbf{s} ,$$

így

$$\begin{aligned} \bar{k} &= -M\mathbf{s}d\chi + \frac{N}{\mathbf{c}}dt , \\ \bar{l} &= M\mathbf{c}d\chi , \end{aligned} \quad (2.31)$$

és

$$\begin{aligned} d\chi &= \frac{\bar{l}}{M\mathbf{c}} , \\ dt &= \frac{1}{N} (\mathbf{c}\bar{k} + \mathbf{s}\bar{l}) . \end{aligned}$$

A többi együttható meghatározásához felhasználjuk még (2.22) összefüggést, így kapjuk, hogy:

$$E^j = B_i^j \left[G^i - B_t^i \frac{1}{N} (\mathbf{c}\bar{k} + \mathbf{s}\bar{l}) - B_\chi^i \frac{\bar{l}}{M\mathbf{c}} \right]$$

valamint a szükséges $\langle e^{\mathbf{B}}, e_{\mathbf{A}} \rangle = \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} = \langle g^{\mathbf{B}}, g_{\mathbf{A}} \rangle$ dualitási feltételekből:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}} &= \langle E^{\mathbf{j}}, E_{\mathbf{k}} \rangle = B_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}} \rightarrow B_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}} = \delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}} , \\ 0 &= \left\langle E^{\mathbf{j}}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = N^{\mathbf{j}} - B_t^{\mathbf{j}} \rightarrow B_t^{\mathbf{j}} = N^{\mathbf{j}} , \\ 0 &= \left\langle E^{\mathbf{j}}, \frac{\partial}{\partial \chi} \right\rangle = M^{\mathbf{j}} - B_\chi^{\mathbf{j}} \rightarrow B_\chi^{\mathbf{j}} = M^{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

(a többi dualitási reláció triviálisan teljesül).

Összefoglalva, a (2.31) és a

$$G^j = N^j dt + M^j d\chi + E^j = F^j \quad (2.32)$$

teszi teljessé az $e^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolatát, valamint mind az $e^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$, mind az $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok közötti összefüggéseket is. Továbbá eredményként kaptuk, hogy az F^j és G^j formák megegyeznek. Ennek az az oka, hogy a shift vektorok közösek az $f^{\mathbf{B}}$ és a $g^{\mathbf{B}}$ bázisokban.

2.3.2. Az \mathfrak{M}_χ felületsereg létezése és l^a örvénymentessége

A bizonyításhoz szükség lesz a (2.29) és (2.30) egyenletekből kifejezett k^a, l^a vektorokra:

$$k^a = \frac{\mathbf{c}}{N} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{\mathbf{c}}{N} N^i G_i^a, \quad (2.33)$$

$$l^a = \frac{\mathbf{s}}{N} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{1}{\mathbf{c}M} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a - \left(\frac{\mathbf{s}}{N} N^i + \frac{1}{\mathbf{c}M} M^i \right) G_i^a. \quad (2.34)$$

Ezt követően vizsgáljuk meg az k^a és G_j^a bázisvektorok Lie-zárójelét, felhasználva fenti, valamint (2.3) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} [k, G_j]^a &= k^b \partial_b \delta_j^a - \delta_j^b \partial_b k^a = -\partial_j k^a = -\partial_j \left(\frac{\mathbf{c}}{N} \delta_t^a - \frac{\mathbf{c}}{N} N^i \delta_i^a \right) \\ &= -\partial_j \left(\frac{\mathbf{c}}{N} \right) \delta_t^a + \left[\partial_j \left(\frac{\mathbf{c}}{N} \right) N^i + \frac{\mathbf{c}}{N} \partial_j N^i \right] \delta_i^a \\ &= -\partial_j \left(\frac{\mathbf{c}}{N} \right) \left(\frac{N}{\mathbf{c}} k^a + N^i G_i^a \right) + \left[\partial_j \left(\frac{\mathbf{c}}{N} \right) N^i + \frac{\mathbf{c}}{N} \partial_j N^i \right] G_i^a \\ &= -\partial_j \left(\frac{\mathbf{c}}{N} \right) \frac{N}{\mathbf{c}} k^a + \frac{\mathbf{c}}{N} \partial_j N^i G_i^a, \end{aligned}$$

azaz

$$[k, G_j]^a = \partial_j \left(\ln \frac{N}{\mathbf{c}} \right) k^a + \frac{\mathbf{c}}{N} (\partial_j N^i) G_i^a, \quad (2.35)$$

Mivel a Lie-zárójelben az l^a irányú tag eltűnik, a Frobenius-tétel értelmében a $\{k, G_i\}$ vektorok az \mathfrak{M}_χ hiperfelület érintőterét feszítik ki. A Frobenius-tétel duális megfogalmazása értelmében így l^a örvénymentes.

A (2.29) felbontásból pedig az látszik, hogy $\partial/\partial t$ érintője lesz az \mathfrak{M}_χ hiperfelületnek.

2.3.3. A $g_{\mathbf{B}}$ bázis algebrája és k^a örvényessége

A $g_{\mathbf{B}}$ bázisvektorok algebráját a (2.35), a $[G_i, G_j]^a = \delta_{ij}$ és a következőkben számolandó két Lie-zárójel adják meg. Ezek közül az első:

$$\begin{aligned} [l, G_j]^a &= l^b \partial_b \delta_j^a - \delta_j^b \partial_b l^a = -\partial_j l^a = -\partial_j \left[\frac{\mathbf{s}}{N} \delta_t^a + \frac{1}{\mathbf{c}M} \delta_\chi^a - \left(\frac{\mathbf{s}}{N} N^i + \frac{1}{\mathbf{c}M} M^i \right) \delta_i^a \right] \\ &= -\partial_j \left(\frac{\mathbf{s}}{N} \right) \delta_t^a - \partial_j \left(\frac{1}{\mathbf{c}M} \right) \delta_\chi^a + \left[\partial_j \left(\frac{\mathbf{s}}{N} \right) N^i + \partial_j \left(\frac{1}{\mathbf{c}M} \right) M^i + \frac{\mathbf{s}}{N} \partial_j N^i + \frac{1}{\mathbf{c}M} \partial_j M^i \right] \delta_i^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\partial_j \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} k^a + N^i G_i^a \right) - \partial_j \left(\frac{1}{\mathfrak{c}M} \right) \left(M(-\mathfrak{s}k^a + \mathfrak{c}l^a) + M^i G_i^a \right) \\
&\quad + \left[\partial_j \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) N^i + \partial_j \left(\frac{1}{\mathfrak{c}M} \right) M^i + \frac{\mathfrak{s}}{N} \partial_j N^i + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \partial_j M^i \right] G_i^a \\
&= -\frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} \left[\partial_j \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) \mathfrak{c}M + \partial_j (\mathfrak{c}M) \frac{\mathfrak{s}}{N} \right] k^a - \partial_j \left(\frac{1}{\mathfrak{c}M} \right) M \mathfrak{c}l^a + \left[\frac{\mathfrak{s}}{N} \partial_j N^i + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \partial_j M^i \right] G_i^a,
\end{aligned}$$

azaz

$$[l, G_j]^a = -\frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} \partial_j \left(\frac{\mathfrak{s} \mathfrak{c} M}{N} \right) k^a + \partial_j \ln(\mathfrak{c}M) l^a + \left[\frac{\mathfrak{s}}{N} \partial_j N^i + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \partial_j M^i \right] G_i^a. \quad (2.36)$$

A $\mathfrak{g}_{\mathbf{B}}$ bázis $\{l, G_j\}$ vektorai tehát nem feszítenek ki hiperfelület-tangensteret, mivel (2.36) Lie-zárójelük nem záródik. Ezért k^a is örvényes vektor (kivéve az $\mathfrak{s} = 0 = \mathcal{N} = N \tanh \phi$ esetet), akárcsak m^a az $f_{\mathbf{B}}$ bázisban.

Az utolsó hiányzó Lie-zárójel pedig:

$$\begin{aligned}
[k, l]^a &= k^b \partial_b l^a - l^b \partial_b k^a \\
&= \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \delta_t^b - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^j \delta_j^b \right) \partial_b \left[\frac{\mathfrak{s}}{N} \delta_t^a + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \delta_\chi^a - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} N^i + \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^i \right) \delta_i^a \right] \\
&\quad - \left[\frac{\mathfrak{s}}{N} \delta_t^b + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \delta_\chi^b - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} N^j + \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^j \right) \delta_j^b \right] \partial_b \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \delta_t^a - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^i \delta_i^a \right) \\
&= \frac{\mathfrak{c}}{N} \partial_t \left[\frac{\mathfrak{s}}{N} \delta_t^a + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \delta_\chi^a - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} N^i + \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^i \right) \delta_i^a \right] \\
&\quad - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^j \partial_j \left[\frac{\mathfrak{s}}{N} \delta_t^a + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \delta_\chi^a - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} N^i + \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^i \right) \delta_i^a \right] \\
&\quad - \frac{\mathfrak{s}}{N} \partial_t \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \delta_t^a - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^i \delta_i^a \right) - \frac{1}{\mathfrak{c}M} \partial_\chi \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \delta_t^a - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^i \delta_i^a \right) \\
&\quad + \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} N^j + \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^j \right) \partial_j \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \delta_t^a - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^i \delta_i^a \right) \\
&= \left[\frac{\mathfrak{c}}{N} \partial_t \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) - \frac{\mathfrak{s}}{N} \partial_t \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \right) - \frac{1}{\mathfrak{c}M} \partial_\chi \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \right) - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^j \partial_j \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} N^j + \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^j \right) \partial_j \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \right) \right] \delta_t^a + \left[\frac{\mathfrak{c}}{N} \partial_t \left(\frac{1}{\mathfrak{c}M} \right) - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^j \partial_j \left(\frac{1}{\mathfrak{c}M} \right) \right] \delta_\chi^a \\
&\quad + \left[-\frac{\mathfrak{c}}{N} \partial_t \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) N^i + \frac{\mathfrak{s}}{N} \partial_t \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \right) N^i - \frac{\mathfrak{c}}{N} \partial_t \left(\frac{1}{\mathfrak{c}M} \right) M^i - \frac{1}{MN} \partial_t M^i \right] \delta_i^a \\
&\quad + \left[\frac{1}{\mathfrak{c}M} \partial_\chi \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \right) N^i + \frac{\mathfrak{c}}{N} \frac{1}{\mathfrak{c}M} \partial_\chi N^i \right] \delta_i^a \\
&\quad + \left\{ \left[\frac{\mathfrak{c}}{N} N^j \partial_j \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} N^j + \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^j \right) \partial_j \left(\frac{\mathfrak{c}}{N} \right) \right] N^i \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathfrak{c}}{N} N^j \partial_j \left(\frac{1}{\mathfrak{c}M} \right) M^i - \frac{1}{MN} (M^j \partial_j N^i - N^j \partial_j M^i) \right\} \delta_i^a,
\end{aligned}$$

amely a g_B bázisra való visszatérés után a következőt adja

$$\begin{aligned}
 [k, l]^a &= \left\{ \partial_t \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) - N^j \partial_j \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) + \frac{\mathfrak{s}}{N} [\partial_t \ln(MN) - N^j \partial_j \ln(MN)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) - M^j \partial_j \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) \right] \right\} k^a \\
 &\quad + \frac{1}{MN} [-\partial_t(\mathfrak{c}M) + N^j \partial_j(\mathfrak{c}M)] l^a \\
 &\quad + \frac{1}{MN} [-\partial_t M^i + \partial_\chi N^i - M^j \partial_j N^i + N^j \partial_j M^i] G_i^a
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Ezzel befejeztük a g_B bázis algebrájának számolását, melyet az alábbi táblázatban foglalunk össze:

	$[k, l]^a$	$[k, G_j]^a$	$[l, G_j]^a$
k^a	$\left\{ \partial_t \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) - N^j \partial_j \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) + \frac{\mathfrak{s}}{N} [\partial_t \ln(MN) - N^j \partial_j \ln(MN)] \right.$ $\left. + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) - M^j \partial_j \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) \right] \right\}$	$\partial_j \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right)$	$-\frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} \partial_j \left(\frac{\mathfrak{s} \mathfrak{c} M}{N} \right)$
l^a	$\frac{1}{MN} [-\partial_t(\mathfrak{c}M) + N^j \partial_j(\mathfrak{c}M)]$	0	$\partial_j \ln(\mathfrak{c}M)$
G_i^a	$\frac{1}{MN} [-\partial_t M^i + \partial_\chi N^i - M^j \partial_j N^i + N^j \partial_j M^i]$	$\frac{\mathfrak{c}}{N} (\partial_j N^i)$	$\frac{\mathfrak{s}}{N} \partial_j N^i + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \partial_j M^i$

Megjegyezzük, hogy amennyiben a k^a, l^a vektorok merőlegesek egymásra, azaz $\mathcal{N} = 0 = \mathfrak{s}$ és $\mathfrak{c} = 1$, a fenti és a 2.1.3 alfejezet végén megadott táblázatokban megadott algebrák azonosak, megegyeznek a [8, 9] munkákban használtakkal.

2.4. Az \mathcal{S}_t és \mathfrak{M}_χ hiperfelület-normálisok örvénymentességének következményei

A 2.1.2 és 2.3.2 alfejezetben megmutattuk a Frobenius-tételt alkalmazva (a Lie-zárójel záródásával), hogy \mathcal{S}_t és \mathfrak{M}_χ hiperfelületek léteznek. Bevezetjük most a 4-es metrika \mathcal{S}_t és \mathfrak{M}_χ hiperfelületeken indukált

$$\hat{g}_{ab} = m_a m_b + g_{ab} ,$$

$$\bar{g}_{ab} = -k_a k_b + g_{ab}$$

metrikáit.

Az n^a (l^a) vektor merőleges az \mathcal{S}_t (\mathfrak{M}_χ) hiperfelületre. Az 7 függelékben ismerttetett duális Frobenius-tétel értelmében ekkor az n^a és l^a vektorok 3-dimenziós örvénytenzorai eltűnnek:

$$\hat{\omega}_{ab}^{(n)} \equiv \hat{g}_{[a}^c \hat{g}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c n_d = 0 , \tag{2.38}$$

$$\bar{\omega}_{ab}^{(l)} \equiv \bar{g}_{[a}^c \bar{g}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c l_d = 0 . \tag{2.39}$$

Ezekből közvetlenül láthatók a következő azonosságok:

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_a^c \hat{g}_b^d \tilde{\nabla}_c n_d &= \hat{g}_a^c \hat{g}_b^d \tilde{\nabla}_d n_c , \\
 \bar{g}_a^c \bar{g}_b^d \tilde{\nabla}_c l_d &= \bar{g}_a^c \bar{g}_b^d \tilde{\nabla}_d l_c .
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

A (2.38) összefüggés átírható a következő alakba:

$$\begin{aligned}
0 &= 2\hat{g}_{[a}^c\hat{g}_b^d\tilde{\nabla}_c n_d = 2\hat{g}_a^c\hat{g}_b^d\tilde{\nabla}_{[c}n_{d]} = (m_a m^c + g_a^c)(m_b m^d + g_b^d)(\tilde{\nabla}_c n_d - \tilde{\nabla}_d n_c) \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d - g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_d n_c + m_a m^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d - m_a m^c g_b^d \tilde{\nabla}_d n_c \\
&\quad + m_b m^d g_a^c \tilde{\nabla}_c n_d - m_b m^d g_a^c \tilde{\nabla}_d n_c \\
&= 2g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + m_a m^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d - m_a m^d g_b^c \tilde{\nabla}_c n_d + m_b m^d g_a^c \tilde{\nabla}_c n_d - m_b m^c g_a^d \tilde{\nabla}_c n_d \\
&= 2g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + 2m^c m_{[a} g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d - 2m^d m_{[a} g_b^c \tilde{\nabla}_c n_d \\
&= 2g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + 2m_{[a} g_b^d m^c (\tilde{\nabla}_c n_d - \tilde{\nabla}_d n_c) .
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Hasonlóan, a (2.39) összefüggés is átírható:

$$\begin{aligned}
0 &= 2\bar{g}_{[a}^c\bar{g}_b^d\tilde{\nabla}_c l_d = 2\bar{g}_a^c\bar{g}_b^d\tilde{\nabla}_{[c}l_{d]} \\
&= (g_a^c - k_a k^c)(g_b^d - k_b k^d)(\tilde{\nabla}_c l_d - \tilde{\nabla}_d l_c) \\
&= (g_a^c g_b^d - g_a^c k_b k^d - g_b^d k_a k^c + k_a k^c k_b k^d)(\tilde{\nabla}_c l_d - \tilde{\nabla}_d l_c) \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d - g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_d l_c - g_a^c k_b k^d \tilde{\nabla}_c l_d + g_a^c k_b k^d \tilde{\nabla}_d l_c \\
&\quad - g_b^d k_a k^c \tilde{\nabla}_c l_d + g_b^d k_a k^c \tilde{\nabla}_d l_c + k_a k^c k_b k^d \tilde{\nabla}_c l_d - k_a k^c k_b k^d \tilde{\nabla}_d l_c \\
&= 2g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d + 2k^c g_{[a}^d k_b] (\tilde{\nabla}_c l_d - \tilde{\nabla}_d l_c)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

alakba. A fenti összefüggések m^b , illetve k^b kontrakciói újabb azonosságokat adnak a 3.2 alfejezetben szerepet játszó $\mathcal{K}_a \equiv g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d$ és $\mathcal{L}_a \equiv g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d$ normális fundamentális formákra:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_a &\equiv g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d = g_a^c m^d \tilde{\nabla}_d n_c , \\
\mathcal{L}_a &\equiv g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d = g_a^c k^d \tilde{\nabla}_d l_c .
\end{aligned} \tag{2.43}$$

A (2.41) és (2.42) összefüggések $\Sigma_{t\chi}$ felületre eső projekciók pedig az alábbiakban értelmezett 2-dimenziós örvénytenzorok eltűnését mutatják:

$$\omega_{ab}^{(n)} \equiv g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d = 0 , \tag{2.44}$$

$$\omega_{ab}^{(l)} \equiv g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d = 0 . \tag{2.45}$$

A (2.40) és (2.43) összefüggéseket a következő fejezetben használjuk majd fel, az \mathcal{S}_t és \mathfrak{M}_χ hiperfelületek kinematikai mennyiségei kapcsolatának vizsgálatakor. A (2.44) és (2.45) összefüggésekből pedig a 3.2 alfejezetben szintén szerepet játszó külső görbületek szimmetriája látszik:

$$\begin{aligned}
K_{ab} &\equiv g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d = g_{(a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d = K_{ba} . \\
L_{ab} &\equiv g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d = g_{(a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d = L_{ba} .
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Ez a szimmetria függetlenül is belátható: az első (2.13) és a második (2.31) összefüggésekből a normálisok

$$\begin{aligned}
n_a &= -N\tilde{\nabla}_a t , \\
l_a &= M\mathbf{c}\tilde{\nabla}_a \chi
\end{aligned} \tag{2.47}$$

alakban írhatók. Ezeket behelyettesítve a külső görbületek (2.46) definícióiba, nyilvánvalóan szimmetrikus kifejezésekhez jutunk.

2.5. A k^a és m^a bázisvektorok 2-dimenziós örvénymentessége

Állítás:

Bár a k^a és m^a (a teljes \mathcal{B} érintőterében) örvényes vektorok, a $\Sigma_{t\chi}$ normálisaként (a $\{k^a, G_{\mathbf{i}}^a\}$, illetve $\{m^a, F_{\mathbf{i}}^a\}$ érintőterekben) örvénymentesek lesznek:

$$\omega_{ab}^{(\mathbf{k})} \equiv g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d = 0 ,$$

$$\omega_{ab}^{(\mathbf{m})} \equiv g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d = 0 .$$

Bizonyítás:

A második (2.13) és a első (2.31) összefüggésből a k^a és m^a vektorokra

$$\begin{aligned} k_a &= M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_a\chi - \frac{N}{\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_a t , \\ m_a &= N\frac{\mathfrak{s}}{\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_a t + M\tilde{\nabla}_a\chi \end{aligned} \quad (2.48)$$

kifejezések adódnak. Segítségükkel

$$\begin{aligned} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\chi - \frac{N}{\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_d t \right) \\ &= g_a^c g_b^d \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\chi - \frac{N}{\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d t \right) + g_a^c g_b^d \left[\tilde{\nabla}_c(M\mathfrak{s})\tilde{\nabla}_d\chi - \tilde{\nabla}_c\left(\frac{N}{\mathbf{c}}\right)\tilde{\nabla}_d t \right] \\ &= g_a^c g_b^d \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c t \right) + g_a^c g_b^d \left[\frac{1}{M\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_c(M\mathfrak{s})l_d + \frac{1}{N}\tilde{\nabla}_c\left(\frac{N}{\mathbf{c}}\right)n_d \right] \\ &= g_a^c g_b^d \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c t \right) \\ &= g_a^c g_b^d \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c t \right) + g_a^c g_b^d \left[\frac{1}{M\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_d(M\mathfrak{s})l_c + \frac{1}{N}\tilde{\nabla}_d\left(\frac{N}{\mathbf{c}}\right)n_c \right] \\ &= g_a^c g_b^d \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c t \right) + g_a^c g_b^d \left[\tilde{\nabla}_d(M\mathfrak{s})\tilde{\nabla}_c\chi - \tilde{\nabla}_d\left(\frac{N}{\mathbf{c}}\right)\tilde{\nabla}_c t \right] \\ &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_d \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathbf{c}}\tilde{\nabla}_c t \right) \\ &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_d k_c = g_b^c g_a^d \tilde{\nabla}_c k_d \\ \rightarrow \omega_{ab}^{(\mathbf{k})} &\equiv g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_d k_c = 0 \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d &= g_b^c g_a^d \tilde{\nabla}_c m_d \\ \rightarrow \omega_{ab}^{(\mathbf{m})} &\equiv g_{[a}^c g_b^d \tilde{\nabla}_d m_c = 0 . \end{aligned}$$

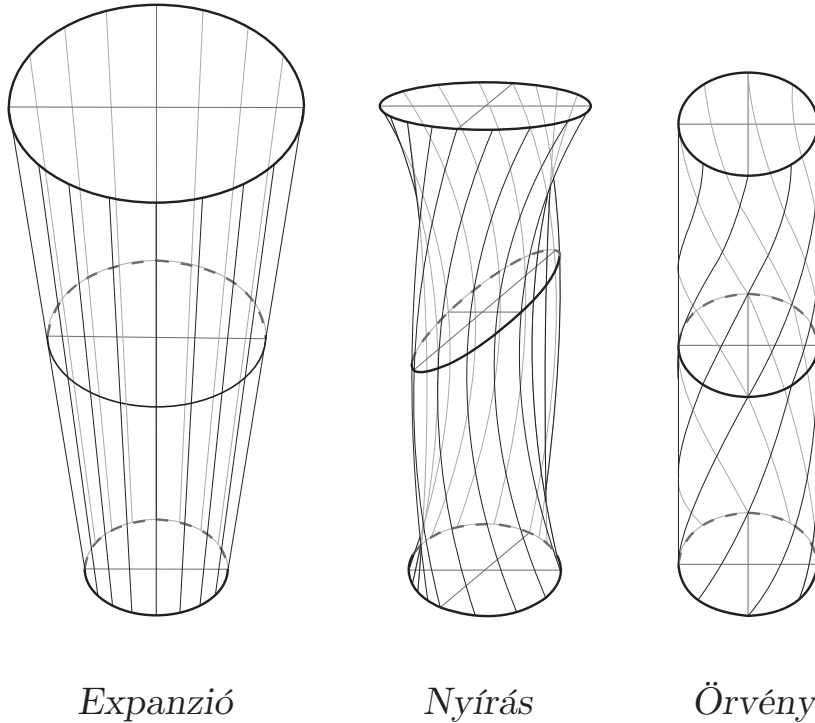
A levezetésben felhasználtuk (2.47) összefüggéseket is. Q.E.D.

A fenti összefüggések segítségével belátható, hogy a $\Sigma_{t\chi}$ felület k^a és m^a normálisai is meghatároznak két külső görbületet:

$$\begin{aligned} K_{ab}^* &\equiv g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d = g_{(a}^c g_{b)}^d \tilde{\nabla}_c k_d = K_{ba}^* . \\ L_{ab}^* &\equiv g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d = g_{(a}^c g_{b)}^d \tilde{\nabla}_c m_d = L_{ba}^* . \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.6. A k^a és m^a bázisvektorok 3-dimenziós örvényei

Egy kongruencia (görbesereg) jól jellemezhető kinematikai jellemzőkkel. Ezek közül az expanzió a kör keresztmetszetű kongruencia kerületének növekedését vagy csökkenését, a nyírás a kör ellipszissé deformálását (ilyen a gravitációs hullámok hatása is), az örvény pedig a tengely körüli elfordulását okozza (2.2 ábra). A három nevezett mennyiségből ún. optikai skalárok értelmezhetők. Nem merőleges kettős fóliázás esetén látni fogjuk, hogy a 2-dimenziós örvények eltűnnek, és a nyírással, expanzióval a külső görbületek állnak kapcsolatban.



2.2. ábra. Kongruencia expanziója, nyírása és örvénye. A kongruenciát megadó vektormező kovariáns deriváltjának kongruenciára merőleges projekciója szimmetrikus és antiszimmetrikus részekre bontható. Előbbinek a spúrja, illetve spúrmentes részei az expanzió és a nyírás, utóbbi az örvény. Örvénymentes esetben a szimmetrikus rész a külső görbület.

A k^a és m^a bázisvektorok örvényének tárgyalásához 2 újabb 3-dimenziós metrikát kell bevezetnünk:

$$\begin{aligned}\bar{h}_{ab} &= -n_a n_b + g_{ab} , \\ \hat{h}_{ab} &= l_a l_b + g_{ab} .\end{aligned}$$

A 3-dimenziós örvényeket következőképpen értelmezzük:

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} &\equiv \hat{h}_{[a}^c \hat{h}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c k_d \neq 0 , \\ \bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} &\equiv \bar{h}_{[a}^c \bar{h}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c m_d \neq 0 .\end{aligned}$$

Elvégezzük ezek 2+1 felbontását:

$$\begin{aligned}2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} &= 2\hat{h}_{[a}^c \hat{h}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c k_d = 2\hat{h}_a^c \hat{h}_b^d \tilde{\nabla}_{[c} k_{d]} = (l_a l^c + g_a^c) (l_b l^d + g_b^d) (\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c) \\ &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d - g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_d k_c + l_a l^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d - l_a l^c g_b^d \tilde{\nabla}_d k_c \\ &\quad + l_b l^d g_a^c \tilde{\nabla}_c k_d - l_b l^d g_a^c \tilde{\nabla}_d k_c \\ &= 2g_{[a}^c g_{b]}^d \tilde{\nabla}_c k_d + 2l^c l_{[a} g_{b]}^d \tilde{\nabla}_c k_d - 2l^d l_{[a} g_{b]}^c \tilde{\nabla}_c k_d \\ &= 2g_{[a}^c g_{b]}^d \tilde{\nabla}_c k_d + 2l_{[a} g_{b]}^d l^c (\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c) ,\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} &= 2\bar{h}_{[a}^c \bar{h}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c m_d = 2\bar{h}_a^c \bar{h}_b^d \tilde{\nabla}_{[c} m_{d]} \\ &= (g_a^c - n_a n^c) (g_b^d - n_b n^d) (\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c) \\ &= (g_a^c g_b^d - g_a^c n_b n^d - g_b^d n_a n^c + n_a n^c n_b n^d) (\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c) \\ &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d - g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_d m_c - g_a^c n_b n^d \tilde{\nabla}_c m_d + g_a^c n_b n^d \tilde{\nabla}_d m_c \\ &\quad - g_b^d n_a n^c \tilde{\nabla}_c m_d + g_b^d n_a n^c \tilde{\nabla}_d m_c \\ &= 2g_{[a}^c g_{b]}^d \tilde{\nabla}_c m_d + 2n^c g_{[a}^d n_{b]} (\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c) .\end{aligned}$$

Az előző alfejezetben bizonyított 2-dimenziós örvénymentességek miatt a k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvénytenzorainak kifejezései

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} &= l_{[a} g_{b]}^d l^c (\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c) , \\ \bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} &= -n_{[a} g_{b]}^d n^c (\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c)\end{aligned}\tag{2.50}$$

lesznek.

Az (2.50) összefüggések l^b , illetve n^b kontrakciói megadják a k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvénytenzorainak nemeltűnő komponenseit. A 3.2 alfejezetben szintén szerepet játszó $\mathcal{K}_a^* \equiv g_a^c l^d \tilde{\nabla}_c k_d$ és $\mathcal{L}_a^* \equiv -g_a^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d$ mennyiségeket felhasználva a 3-dimenziós örvénytenzorok a

$$\begin{aligned}2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} l^b &= -g_a^d l^c (\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c) = -\mathcal{K}_a^* - g_a^d k^c \tilde{\nabla}_d l_c = -\mathcal{K}_a^* + \mathcal{L}_a , \\ 2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} n^b &= -g_a^d n^c (\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c) = \mathcal{L}_a^* - g_a^d m^c \tilde{\nabla}_d n_c = \mathcal{L}_a^* - \mathcal{K}_a .\end{aligned}\tag{2.51}$$

alakban adhatók meg. Felfoghatók ezek az összefüggések úgy is, mint a \mathcal{K}_a^* és \mathcal{L}_a^* mennyiségek kifejezései a \mathcal{K}_a és \mathcal{L}_a normális fundamentális formákkal, valamint a k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvénytenzoraival:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_a^* &= \mathcal{L}_a - 2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})}l^b, \\ \mathcal{L}_a^* &= \mathcal{K}_a + 2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})}n^b.\end{aligned}\tag{2.52}$$

3. fejezet

A kovariáns deriváltak 2+1+1 felbontásai

3.1. A $\Sigma_{t\chi}$ felületen indukált kovariáns derivált

Egy tetszőleges $\tilde{T}_{b_1 \dots b_r}^{a_1 \dots a_r}$ 4-es tenzor kovariáns deriváltját a $\Sigma_{t\chi}$ hiperfelületre a g_a^b indukált metrika segítségével vetítjük:

$$D_a \tilde{T}_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_r} \equiv g_a^c g_{c_1}^{a_1} \dots g_{c_r}^{a_r} g_{b_1}^{d_1} \dots g_{b_q}^{d_q} \tilde{\nabla}_c \tilde{T}_{d_1 \dots d_q}^{c_1 \dots c_r}, \quad (3.1)$$

Megmutatható, hogy amennyiben $\tilde{T}_{b_1 \dots b_r}^{a_1 \dots a_r}$ a $\Sigma_{t\chi}$ hiperfelület tangens és kotangens tereinek szorzatán értelmezett, a (3.1) kifejezés pontosan a g_{ab} indukált metrikával kompatibilis konnexitóval képezett kovariáns derivált lesz. Ez könnyen belátható, ha felhasználjuk a $\tilde{\nabla}_a \tilde{g}_{cb} = 0$ feltételt, valamint a következő projekciós tulajdonságokat

$$\begin{aligned} g_b^a n_a &= (\tilde{g}_b^a + n^a n_b - m^a m_b) n_a = \tilde{g}_b^a n_a + n_a n^a n_b - n_a m^a m_b = n_b - n_b = 0, \\ g_b^a m_a &= (\tilde{g}_b^a + n^a n_b - m^a m_b) m_a = \tilde{g}_b^a m_a + m_a n^a n_b - m_a m^a m_b = m_b - m_b = 0, \\ g_b^a k_a &= (\tilde{g}_b^a + k^a k_b - l^a l_b) k_a = \tilde{g}_b^a k_a + k_a k^a k_b - k_a l^a l_b = k_b - k_b = 0, \\ g_b^a l_a &= (\tilde{g}_b^a + k^a k_b - l^a l_b) l_a = \tilde{g}_b^a l_a + l_a k^a k_b - l_a l^a l_b = l_b - l_b = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

melyekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\nabla}_a (g_{bc} n^c) = g_{bc} \tilde{\nabla}_a n^c + n^c \tilde{\nabla}_a g_{bc} \rightarrow g_{bc} \tilde{\nabla}_a n^c = -n^c \tilde{\nabla}_a g_{bc}, \\ 0 &= \tilde{\nabla}_a (g_{bc} m^c) = g_{bc} \tilde{\nabla}_a m^c + m^c \tilde{\nabla}_a g_{bc} \rightarrow g_{bc} \tilde{\nabla}_a m^c = -m^c \tilde{\nabla}_a g_{bc}, \\ 0 &= \tilde{\nabla}_a (g_{bc} k^c) = g_{bc} \tilde{\nabla}_a k^c + k^c \tilde{\nabla}_a g_{bc} \rightarrow g_{bc} \tilde{\nabla}_a k^c = -k^c \tilde{\nabla}_a g_{bc}, \\ 0 &= \tilde{\nabla}_a (g_{bc} l^c) = g_{bc} \tilde{\nabla}_a l^c + l^c \tilde{\nabla}_a g_{bc} \rightarrow g_{bc} \tilde{\nabla}_a l^c = -l^c \tilde{\nabla}_a g_{bc}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ha a hiperfelületen indukált kovariáns deriválást elvégezzük az indukált metrikán a

$$\begin{aligned} D_a g_{bc} &= g_a^i g_b^j g_c^k \tilde{\nabla}_i (\tilde{g}_{jk} + n_j n_k - m_j m_k) \\ &= g_a^i g_b^j g_c^k \left(\tilde{\nabla}_i \tilde{g}_{jk} + n_j \tilde{\nabla}_i n_k + n_k \tilde{\nabla}_i n_j - m_j \tilde{\nabla}_i m_k - m_k \tilde{\nabla}_i m_j \right) \\ &= g_a^i g_b^j g_c^k n_j \tilde{\nabla}_i n_k + g_a^i g_b^j g_c^k n_k \tilde{\nabla}_i n_j - g_a^i g_b^j g_c^k m_j \tilde{\nabla}_i m_k - g_a^i g_b^j g_c^k m_k \tilde{\nabla}_i m_j = 0 \end{aligned}$$

eredményt kapjuk, mely igazolja az állítást.

A szokásos 3+1 felbontásban a hiperfelület normálisának hiperfelületre vetített kovariáns deriváltja a hiperfelület külső görbülete, melyről belátható, hogy az indukált metrika időderiváltjával áll kapcsolatban, ezért kinematikai mennyiség [1].

A jelenlegi formalizmus két háromdimenziós hiperfelületet is tartalmaz, az \mathcal{S}_t és \mathfrak{M}_χ -t, ezek metszete pedig a $\Sigma_{t\chi}$ kétdimenziós felület. A két hiperfelület n^a és l^a normálisai a $\Sigma_{t\chi}$ felületnek is (egymásra nemmerőleges) normálisai.

A következő két alfejezetben a hiperfelület-normálisok kovariáns deriváltjainak 2+1+1 felbontását végezzük el.

3.2. A $\Sigma_{t\chi}$ felület külső görbületei, normális fundamentális formái és skalárjai

A (2.38), (2.39) és a(3.1) összefüggéseket alkalmazva az \mathcal{S}_t és \mathfrak{M}_χ hiperfelületek normálisaira jellemző geometriai fogalmakat tudunk bevezetni.

Ehhez végezzük el az \mathcal{S}_t hiperfelület-normális kovariáns deriváltjának 2+1+1 felbontását:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a n_b &= \tilde{g}_a^c \tilde{g}_b^d \tilde{\nabla}_c n_d = (g_a^c - n^c n_a + m^c m_a) (g_b^d - n^d n_b + m^d m_b) \tilde{\nabla}_c n_d \\
&= (g_a^c - n^c n_a + m^c m_a) (g_b^d + m^d m_b) \tilde{\nabla}_c n_d \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + g_a^c m^d m_b \tilde{\nabla}_c n_d + g_b^d m^c m_a \tilde{\nabla}_c n_d - n^c n_a g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d \\
&\quad - n^c n_a m^d m_b \tilde{\nabla}_c n_d + m^c m_a m^d m_b \tilde{\nabla}_c n_d \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + m_b (g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d) + m_a (g_b^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d) - n_a (g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c n_d) \\
&\quad - n_a m_b (n^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d) + m_a m_b (m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d) \\
&= K_{ab} + 2m_{(a} \mathcal{K}_{b)} + m_a m_b \mathcal{K} - n_a \mathbf{a}_b + n_a m_b \mathcal{L}^* .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

A $K_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d$ a $\Sigma_{t\chi}$ felületnek (az \mathcal{S}_t normálisával képezett) külső görbülete, a $\mathcal{K}_a = g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d$ a normális fundamentális formája, a $\mathcal{K} = m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d$ a normális fundamentális skalárja [22], az $\mathbf{a}_b = g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c n_d$ és $\mathcal{L}^* = n^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d$ tagok pedig az n^a sebességű megfigyelő $\alpha^c \equiv n^d \tilde{\nabla}_d n^c$ nemgravitációs gyorsulásának (mely teljesíti az $n_c \alpha^c = 0$ feltételt) további 2+1 felbontásából származó komponensei:

$$\begin{aligned}
\alpha^b &= n^a \tilde{\nabla}_a n^b = n^a \tilde{\nabla}_a (\tilde{g}^b n^c) = \tilde{g}_c^b n^a \tilde{\nabla}_a n^c = (g_c^b - n_c n^d + m_c m^d) n^a \tilde{\nabla}_a n^c \\
&= g_c^b n^a \tilde{\nabla}_a n^c + m_c m^b n^a \tilde{\nabla}_a n^c = \mathbf{a}^b - m^b n^a n^c \tilde{\nabla}_a m_c = \mathbf{a}^b - m^b \mathcal{L}^* .
\end{aligned} \tag{3.5}$$

A (2.39) és (3.1) használatával az \mathfrak{M}_χ hiperfelület-normális kovariáns deriváltjának a 2+1+1 felbontása hasonló módon végezhető el:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a l_b &= \tilde{g}_a^c \tilde{g}_b^d \tilde{\nabla}_c l_d = (g_a^c - k^c k_a + l^c l_a) (g_b^d - k^d k_b) \tilde{\nabla}_c l_d \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d - g_a^c k^d k_b \tilde{\nabla}_c l_d - g_b^d k^c k_a \tilde{\nabla}_c l_d + g_b^d l^c l_a \tilde{\nabla}_c l_d \\
&\quad - l^c l_a k^d k_b \tilde{\nabla}_c l_d + k^c k_a k^d k_b \tilde{\nabla}_c l_d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d - k_b \left(g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d \right) - k_a \left(g_b^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d \right) + l_a \left(g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d \right) \\
&\quad - l_a k_b \left(k^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d \right) + k_a k_b \left(k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d \right) \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d + k_b \left(-g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d \right) + k_a \left(-g_b^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d \right) + l_a \left(g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d \right) \\
&\quad + l_a k_b \left(l^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d \right) + k_a k_b \left(k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d \right) \\
&= L_{ab} + 2k_{(a} \mathcal{L}_{b)} + k_a k_b \mathcal{L} + l_a \mathbf{b}_b + l_a k_b \mathcal{K}^* .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Itt a $\Sigma_{t\chi}$ (az \mathfrak{M}_χ normálisával képezett) külső görbülete az $L_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d$, normális fundamentális formája az $\mathcal{L}_a = -g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d$ (a mínusz a jelölések későbbi egyszerűsödése miatt vezetjük be, [8] nyomán), $\mathcal{L} = k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d$ a normális fundamentális skalárja, a $\mathbf{b}_b = g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d$ és $\mathcal{K}^* = l^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d$ az l^a normális $\beta^b \equiv l^a \tilde{\nabla}_a l^b$ nemgravitációs „gyorsulását” adják meg, mely teljesíti az $l_c \beta^c = 0$ feltételt és 2+1 felbontása

$$\begin{aligned}
\beta^b &= l^a \tilde{\nabla}_a l^b = \tilde{g}_c^b l^a \tilde{\nabla}_a l^c = (g_c^b - k_c k^d + l_c l^d) l^a \tilde{\nabla}_a l^c \\
&= g_c^b l^a \tilde{\nabla}_a l^c - k_c k^b l^a \tilde{\nabla}_a l^c = \mathbf{b}^b + k^b l^a l^c \tilde{\nabla}_a k_c = \mathbf{b}^b - k^b \mathcal{K}^*
\end{aligned} \tag{3.7}$$

alakú.

A [8, 9] munkákban ismertetett merőleges fóliázások esetén a (3.4) és (3.6) felbontásokban megjelenő \mathcal{L}^* és \mathcal{K}^* mennyiségek helyett \mathcal{L} és \mathcal{K} szerepelt. Az ott is bevezetett $\{K_{ab}, \mathcal{K}_a, \mathcal{K}\}$ és $\{L_{ab}, \mathcal{L}_a, \mathcal{L}\}$ mennyiségek közül az első csoport kinematikai szereppel bírt, míg a második térszerű gradiensekkel állt kapcsolatban. A nemmerőleges fóliázásokon alapuló jelenlegi felbontásban a fenti mennyiségek kapcsolatát az időszerű és térszerű deriváltakkal a későbbiekben fogjuk tisztázni.

3.3. A k_a és m_a kovariáns deriváltjainak felbontása

A k_a és m_a formák kovariáns deriváltjainak felbontásai

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a k_b &= \tilde{g}_a^c \tilde{g}_b^d \tilde{\nabla}_c k_d = (g_a^c - k^c k_a + l^c l_a) (g_b^d - k^d k_b + l^d l_b) \tilde{\nabla}_c k_d \\
&= (g_a^c - k^c k_a + l^c l_a) (g_b^d + l^d l_b) \tilde{\nabla}_c k_d = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d - g_b^d k^c k_a \tilde{\nabla}_c k_d \\
&\quad + g_b^d l^c l_a \tilde{\nabla}_c k_d + g_a^c l^d l_b \tilde{\nabla}_c k_d - k^c k_a l^d l_b \tilde{\nabla}_c k_d + l^c l_a l^d l_b \tilde{\nabla}_c k_d \\
&= K_{ab}^* + l_a \left(g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d \right) + l_b \left(g_a^c l^d \tilde{\nabla}_c k_d \right) \\
&\quad + l_a l_b \left(l^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d \right) - k_a \left(g_b^d k^c \tilde{\nabla}_c k_d + l_b k^c l^d \tilde{\nabla}_c k_d \right) \\
&= K_{ab}^* + l_a \left(g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d \right) - l_b \left(g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d \right) \\
&\quad + l_a l_b \mathcal{K}^* - k_a (\mathbf{a}_b^* - l_b \mathcal{L}) \\
&= K_{ab}^* + l_a \mathcal{K}_b^* + l_b \mathcal{L}_a + l_a l_b \mathcal{K}^* - k_a (\mathbf{a}_b^* - l_b \mathcal{L}) ,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a m_b &= \tilde{g}_a^c \tilde{g}_b^d \tilde{\nabla}_c m_d = (g_a^c - n^c n_a + m^c m_a) (g_b^d - n^d n_b + m^d m_b) \tilde{\nabla}_c m_d \\
&= (g_a^c - n^c n_a + m^c m_a) (g_b^d - n^d n_b) \tilde{\nabla}_c m_d = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d - g_b^d n^c n_a \tilde{\nabla}_c m_d \\
&\quad + g_b^d m^c m_a \tilde{\nabla}_c m_d - g_a^c n^d n_b \tilde{\nabla}_c m_d + n^c n_a n^d n_b \tilde{\nabla}_c m_d - m^c m_a n^d n_b \tilde{\nabla}_c m_d \\
&= L_{ab}^* - n_a \left(g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d \right) - n_b \left(g_a^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d \right) \\
&\quad + n_a n_b \left(n^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d \right) + m_a \left(g_b^d m^c \tilde{\nabla}_c m_d \right) - m_a n_b \left(n^d m^c \tilde{\nabla}_c m_d \right) \\
&= L_{ab}^* - n_a \left(g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d \right) + n_b \left(g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d \right) \\
&\quad + n_a n_b \left(n^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d \right) + m_a \left(g_b^d m^c \tilde{\nabla}_c m_d \right) + m_a n_b \left(m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d \right) \\
&= L_{ab}^* + n_a \mathcal{L}_b^* + n_b \mathcal{K}_a + n_a n_b \mathcal{L}^* + m_a (\mathbf{b}_b^* + n_b \mathcal{K}) ,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a korábban bevezetett definíciókat a $K_{ab}^* = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d$ (illetve $L_{ab}^* = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d$) mennyiségekre, melyek a $\Sigma_{t\chi}$ felület k^a (illetve m^a) kongruenciákkal képezett külső görbüetei. A 2.5 alfejezetben bizonyított eredményt is felhasználtuk, miszerint a k^a (illetve m^a) kongruenciák az általuk és a $\Sigma_{t\chi}$ felület tangensere által kifeszített 3-dimenziós térben számolt 2-dimenziós örvénye eltűnik. A k^a nemgravitációs gyorsulásának komponensei

$$\begin{aligned}
\alpha_b^* &= k^a \tilde{\nabla}_a k_b = \tilde{g}_b^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i = (g_b^i - k^i k_b + l^i l_b) k^a \tilde{\nabla}_a k_i = (g_b^i + l^i l_b) k^a \tilde{\nabla}_a k_i \\
&= g_b^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i + l_b \left(l^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i \right) = \mathbf{a}_b^* - l_b k^i k^a \tilde{\nabla}_a l_i = \mathbf{a}_b^* - l_b \mathcal{L} ,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

míg az m^a nemgravitációs gyorsulása

$$\begin{aligned}
\beta_b^* &= m^a \tilde{\nabla}_a m_b = \tilde{g}_b^i m^a \tilde{\nabla}_a m_i = (g_b^i - n^i n_b + m^i m_b) m^a \tilde{\nabla}_a m_i = (g_b^i - n^i n_b) m^a \tilde{\nabla}_a m_i \\
&= g_b^i m^a \tilde{\nabla}_a m_i - n_b m^a n^i \tilde{\nabla}_a m_i = \mathbf{b}_b^* + n_b m^a m^i \tilde{\nabla}_a n_i = \mathbf{b}_b^* + n_b \mathcal{K} ,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ezek szintén megjelentek a felbontásban (itt bevezettük $\mathbf{a}_b^* = g_b^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i$ és $\mathbf{b}_b^* = g_b^i m^a \tilde{\nabla}_a m_i$ mennyiségeket). Végül bevezettük a $\mathcal{L}_b^* = -g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d$ és $\mathcal{K}_b^* = g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d$ mennyiségeket is, melyekről megjegyezzük, hogy a \mathcal{K}_b és \mathcal{L}_b mennyiségekkel ellentétben ezek nem normális fundamentális formák. Azonban (2.52) segítségével kifejezhetők \mathcal{K}_b és \mathcal{L}_b normális fundamentális formákkal valamint az m^a és k^a vektorok 3-dimenziós örvényeivel.

3.4. Összefoglalás

Az n^a, l^a, k^a, m^a bázisvektorokhoz tartozó külső görbület, normális fundamentális forma, normális fundamentális skalár és gyorsulás mennyiségeket az alábbi táblázat foglalja össze:

$K_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d$	$L_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d$	$K_{ab}^* = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d$	$L_{ab}^* = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d$
$\mathcal{K}_a = g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d$	$\mathcal{L}_a = -g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d$	$\mathcal{K}_a^* = g_a^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d$	$\mathcal{L}_a^* = -g_a^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d$
$\mathcal{K} = m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d$	$\mathcal{L} = k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d$	$\mathcal{K}^* = l^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d$	$\mathcal{L}^* = n^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d$
$\mathbf{a}_a = g_a^d n^c \tilde{\nabla}_c n_d$	$\mathbf{b}_a = g_a^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d$	$\mathbf{a}_a^* = g_a^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i$	$\mathbf{b}_a^* = g_a^i m^a \tilde{\nabla}_a m_i$

4. fejezet

A bevezetett geometriai mennyiségek közötti kapcsolat

4.1. A \mathcal{K}_a és \mathcal{L}_a normális fundamentális formák kapcsolata

A [8, 9] munkákban a merőlegesség miatt $\mathcal{N} = 0$ fennállt, ezért a $n^a = k^a$ valamint $l^a = m^a$ összefüggések teljesültek, így a $\mathcal{K}_a = \mathcal{L}_a$ kapcsolat állt fenn a normális fundamentál formák között. Nem ortogonális kettős fóliázás esetén ettől eltérő eredményt kapunk, melyek az (5), (2.28) összefüggések segítségével áll elő. Elvégezve a behelyettesítéseket az

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a &= -g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d = -g_a^c (\mathbf{c}n^d + \mathbf{s}m^d) \tilde{\nabla}_c (\mathbf{s}n_d + \mathbf{c}m_d) \\ &= (-\mathbf{c}g_a^c n^d - \mathbf{s}g_a^c m^d) (\mathbf{s}\tilde{\nabla}_c n_d + n_d \tilde{\nabla}_c \mathbf{s} + \mathbf{c}\tilde{\nabla}_c m_d + m_d \tilde{\nabla}_c \mathbf{c}) \\ &= \mathbf{c}g_a^c \tilde{\nabla}_c \mathbf{s} - \mathbf{c}^2 g_a^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d - \mathbf{s}^2 g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d - \mathbf{s}g_a^c \tilde{\nabla}_c \mathbf{c} \\ &= \mathbf{c}g_a^c \tilde{\nabla}_c \mathbf{s} + \mathbf{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathbf{s}^2 \mathcal{K}_a - \mathbf{s}g_a^c \tilde{\nabla}_c \mathbf{c} = \mathcal{K}_a + \mathbf{c}D_a \mathbf{s} - \mathbf{s}D_a \mathbf{c} \\ &= \mathcal{K}_a + \mathbf{c}^2 D_a \tanh \phi ,\end{aligned}$$

azaz

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{K}_a + D_a \phi \tag{4.1}$$

eredmény adódik. A későbbi számolásoknál törekszünk majd csak az egyik fundamentális vektor használatára. Megjegyezzük, hogy a [8, 9] munkákban ismertetett formalizmushoz képest a ϕ -t tartalmazó tag új járulékot ad a kinematikai mennyiségek közötti kapcsolathoz, ez pontosan a fóliázások nemmerőleges jellegéből adódik.

4.2. A \mathcal{K}^* és \mathcal{L}^* normális fundamentális skalárok kapcsolata \mathcal{K} és \mathcal{L} normális fundamentális skalárokkal

Mivel a [8, 9, 10] munkákban alkalmazott merőleges kettős fóliázás esetén n^a , l^a , \mathcal{K} és \mathcal{L} szerepelnek a (3.4) és (3.6) felbontásokban k^a , m^a , \mathcal{L}^* és \mathcal{K}^* mennyiségek helyett, megpróbáljuk \mathcal{L}^* és \mathcal{K}^* mennyiségeket kifejezni a korábbi $\{K_{ab}, \mathcal{K}_a, \mathcal{K}\}$ és $\{L_{ab}, \mathcal{L}_a, \mathcal{L}\}$ változókkal, valamint a merőlegességtől való eltérést megadó ϕ szöggel. Felhasználva az (5) definíciót és az

$\mathcal{S}_t, \mathfrak{M}_\chi$ hiperfelület normálisai között fellépő kapcsolatot a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* &= n^a n^b \tilde{\nabla}_a m_b = (\mathbf{c}k^a - \mathbf{s}l^a) (\mathbf{c}k^b - \mathbf{s}l^b) \tilde{\nabla}_a (-\mathbf{s}k_b + \mathbf{c}l_b) \\
&= (\mathbf{c}^2 k^a k^b - \mathbf{s}c l^a k^b - \mathbf{s}c k^a l^b + \mathbf{s}^2 l^a l^b) \\
&\quad \left(-k_b \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} - \mathbf{s} \tilde{\nabla}_a k_b + l_b \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} + \mathbf{c} \tilde{\nabla}_a l_b \right) \\
&= \mathbf{c}^2 k^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} + \mathbf{c}^3 k^a k^b \tilde{\nabla}_a l_b - \mathbf{s}c l^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} - \mathbf{s}c^2 l^a k^b \tilde{\nabla}_a l_b \\
&\quad + \mathbf{s}^2 c k^a l^b \tilde{\nabla}_a k_b - \mathbf{s}c k^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} - \mathbf{s}^3 l^a l^b \tilde{\nabla}_a k_b + \mathbf{s}^2 l^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} \\
&= \mathbf{c}^2 k^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} + \mathbf{c}^3 \mathcal{L} - \mathbf{s}c l^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} + \mathbf{s}c^2 \mathcal{K}^* - \mathbf{s}^2 c \mathcal{L} \\
&\quad - \mathbf{s}c k^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} - \mathbf{s}^3 \mathcal{K}^* + \mathbf{s}^2 l^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} \\
&= \mathbf{c}^3 (1 - \tanh^2 \phi) \mathcal{L} + \mathbf{s}c^2 (1 - \tanh^2 \phi) \mathcal{K}^* \\
&\quad + \mathbf{c} \left(\mathbf{c}k^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} - \mathbf{s}k^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} \right) + \mathbf{s} \left(\mathbf{s}l^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} - \mathbf{c}l^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} \right) \\
&= \mathbf{c} \mathcal{L} + \mathbf{s} \mathcal{K}^* + \mathbf{c}^3 k^a \tilde{\nabla}_a \tanh \phi - \mathbf{s}c^2 l^a \tilde{\nabla}_a \tanh \phi \\
&= \mathbf{c} \mathcal{L} + \mathbf{s} \mathcal{K}^* + (\mathbf{c}k^a - \mathbf{s}l^a) \mathbf{c}^2 \tilde{\nabla}_a \tanh \phi \\
&= \mathbf{c} \mathcal{L} + \mathbf{s} \mathcal{K}^* + n^a \tilde{\nabla}_a \phi,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^* &= l^a l^b \tilde{\nabla}_a k_b = (\mathbf{s}n^a + \mathbf{c}m^a) (\mathbf{s}n^b + \mathbf{c}m^b) \tilde{\nabla}_a (\mathbf{c}n_b + \mathbf{s}m_b) \\
&= (\mathbf{s}^2 n^a n^b + \mathbf{s}c n^a m^b + \mathbf{s}c m^a n^b + \mathbf{c}^2 m^a m^b) \\
&\quad \left(\mathbf{c} \tilde{\nabla}_a n_b + n_b \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} + \mathbf{s} \tilde{\nabla}_a m_b + m_b \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} \right) \\
&= -\mathbf{s}^2 n^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} + \mathbf{s}^3 n^a n^b \tilde{\nabla}_a m_b + \mathbf{s}c^2 n^a m^b \tilde{\nabla}_a n_b + \mathbf{s}c n^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} \\
&\quad - \mathbf{s}c m^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} + \mathbf{s}^2 c n^b m^a \tilde{\nabla}_a m_b + \mathbf{c}^3 m^a m^b \tilde{\nabla}_a n_b + \mathbf{c}^2 m^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} \\
&= -\mathbf{s}^2 n^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} + \mathbf{s}^3 \mathcal{L}^* - \mathbf{s}c^2 \mathcal{L}^* + \mathbf{s}c n^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} \\
&\quad - \mathbf{s}c m^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} - \mathbf{s}^2 c \mathcal{K} + \mathbf{c}^3 \mathcal{K} + \mathbf{c}^2 m^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} \\
&= \mathbf{s}^3 \mathcal{L}^* - \mathbf{s}c^2 \mathcal{L}^* + \mathbf{c}^3 \mathcal{K} - \mathbf{s}^2 c \mathcal{K} + \mathbf{s}c n^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} \\
&\quad - \mathbf{s}^2 n^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} + \mathbf{c}^2 m^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} - \mathbf{s}c m^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} \\
&= \mathbf{s}c^2 (\tanh^2 \phi - 1) \mathcal{L}^* + \mathbf{c}^3 (1 - \tanh^2 \phi) \mathcal{K} \\
&\quad + \mathbf{s} \left(\mathbf{c}n^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} - \mathbf{s}n^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} \right) + \mathbf{c} \left(\mathbf{c}m^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{s} - \mathbf{s}m^a \tilde{\nabla}_a \mathbf{c} \right) \\
&= -\mathbf{s} \mathcal{L}^* + \mathbf{c} \mathcal{K} + \mathbf{s}c^2 n^a \tilde{\nabla}_a \tanh \phi + \mathbf{c}^3 m^a \tilde{\nabla}_a \tanh \phi \\
&= -\mathbf{s} \mathcal{L}^* + \mathbf{c} \mathcal{K} + \mathbf{s}c^2 n^a \tilde{\nabla}_a \tanh \phi + \mathbf{c}^3 m^a \tilde{\nabla}_a \tanh \phi \\
&= -\mathbf{s} \mathcal{L}^* + \mathbf{c} \mathcal{K} + \mathbf{c}^2 (\mathbf{s}n^a + \mathbf{c}m^a) \tilde{\nabla}_a \tanh \phi \\
&= -\mathbf{s} \mathcal{L}^* + \mathbf{c} \mathcal{K} + l^a \tilde{\nabla}_a \phi
\end{aligned}$$

összefüggéseket kapjuk. Kifejezve az egyenletrendszerből a \mathcal{L}^* és \mathcal{K}^* változókat, a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* &= \mathbf{c} \mathcal{L} + \mathbf{s} \mathcal{K}^* + n^a \tilde{\nabla}_a \phi = \mathbf{c} \mathcal{L} + \mathbf{s} \left(-\mathbf{s} \mathcal{L}^* + \mathbf{c} \mathcal{K} + l^a \tilde{\nabla}_a \phi \right) + n^a \tilde{\nabla}_a \phi \\
&= \mathbf{c} \mathcal{L} - \mathbf{s}^2 \mathcal{L}^* + \mathbf{s}c \mathcal{K} + \mathbf{s}l^a \tilde{\nabla}_a \phi + n^a \tilde{\nabla}_a \phi, \\
(1 + \mathbf{s}^2) \mathcal{L}^* &= \mathbf{s}c \mathcal{K} + \mathbf{c} \mathcal{L} + (\mathbf{s}l^a + n^a) \tilde{\nabla}_a \phi, \\
\mathbf{c}^2 \mathcal{L}^* &= \mathbf{c} (\mathbf{s} \mathcal{K} + \mathcal{L}) + (\mathbf{s}l^a + n^a) \tilde{\nabla}_a \phi,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

és

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}^* &= -\mathfrak{s}\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}\mathcal{K} + l^a \tilde{\nabla}_a \phi = -\mathfrak{s} \left(\mathfrak{c}\mathcal{L} + \mathfrak{s}\mathcal{K}^* + n^a \tilde{\nabla}_a \phi \right) + \mathfrak{c}\mathcal{K} + l^a \tilde{\nabla}_a \phi \\
 &= -\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathcal{L} - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}^* - \mathfrak{s}n^a \tilde{\nabla}_a \phi + \mathfrak{c}\mathcal{K} + l^a \tilde{\nabla}_a \phi, \\
 (1 + \mathfrak{s}^2) \mathcal{K}^* &= \mathfrak{c}\mathcal{K} - \mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathcal{L} + (l^a - \mathfrak{s}n^a) \tilde{\nabla}_a \phi, \\
 \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}^* &= \mathfrak{c}(\mathcal{K} - \mathfrak{s}\mathcal{L}) + (l^a - \mathfrak{s}n^a) \tilde{\nabla}_a \phi
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

eredemény adódik. Ezek segítségével a \mathcal{L}^* és \mathcal{K}^* mennyiségek szükség esetén kifejezhetők a \mathcal{K} és \mathcal{L} mennyiségekkel.

4.3. Az \mathbf{a}_a^* és \mathbf{b}_a^* gyorsulások kapcsolata \mathbf{a}_a és \mathbf{b}_a gyorsulásokkal

A merőleges kettős fóliázás választásakor bevezetett \mathbf{a}_a és \mathbf{b}_a gyorsulások mellett a nemortogonális kettős fóliázás miatt még két gyorsulást kellett bevezetni, melyeket a k^a és m^a vektorok gyorsulásaként definiáltunk. A \mathbf{a}_a^* , \mathbf{b}_a^* és \mathbf{a}_a , \mathbf{b}_a gyorsulások közötti összefüggések megadásához a (5), (2.28), (2.43) és (3.2) kifejezéseket felhasználása szükséges. A bázisok közötti transzformációkkal a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_a^* &= g_a^c k^d \tilde{\nabla}_d k_c = g_a^c (\mathfrak{c}n^d + \mathfrak{s}m^d) \tilde{\nabla}_d (\mathfrak{c}n_c + \mathfrak{s}m_c) \\
 &= (\mathfrak{c}g_a^c n^d + \mathfrak{s}g_a^c m^d) \left(\mathfrak{c}\tilde{\nabla}_d n_c + n_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{c} + \mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d m_c + m_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{s} \right) \\
 &= \mathfrak{c}^2 g_a^c n^d \tilde{\nabla}_d n_c + \mathfrak{s}\mathfrak{c}g_a^c n^d \tilde{\nabla}_d m_c + \mathfrak{s}\mathfrak{c}g_a^c m^d \tilde{\nabla}_d n_c + \mathfrak{s}^2 g_a^c m^d \tilde{\nabla}_d m_c \\
 &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*) + \mathfrak{c}^2 \mathbf{a}_b + \mathfrak{s}^2 \mathbf{b}_b^*
 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_a^* &= g_a^c m^d \tilde{\nabla}_d m_c = g_a^c (-\mathfrak{s}k^d + \mathfrak{c}l^d) \tilde{\nabla}_d (-\mathfrak{s}k_c + \mathfrak{c}l_c) \\
 &= (-\mathfrak{s}g_a^c k^d + \mathfrak{c}g_a^c l^d) \left(-\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d k_c - k_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{s} + \mathfrak{c}\tilde{\nabla}_d l_c + l_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{c} \right) \\
 &= \mathfrak{s}^2 g_a^c k^d \tilde{\nabla}_d k_c - \mathfrak{s}\mathfrak{c}g_a^c k^d \tilde{\nabla}_d l_c - \mathfrak{s}\mathfrak{c}g_a^c l^d \tilde{\nabla}_d k_c + \mathfrak{c}^2 g_a^c l^d \tilde{\nabla}_d l_c \\
 &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_b^*) + \mathfrak{s}^2 \mathbf{a}_b^* + \mathfrak{c}^2 \mathbf{b}_b
 \end{aligned}$$

részeredményt kapjuk, így a fennálló kapcsolatra a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*) + \mathfrak{c}^2 \mathbf{a}_a + \mathfrak{s}^3 \mathfrak{c}(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*) + \mathfrak{s}^4 \mathbf{a}_a^* + \mathfrak{c}^2 \mathfrak{s}^2 \mathbf{b}_a \\
 (1 - \mathfrak{s}^4) \mathbf{a}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*) + \mathfrak{s}^3 \mathfrak{c}(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*) + \mathfrak{c}^2 \mathbf{a}_a + \mathfrak{c}^2 \mathfrak{s}^2 \mathbf{b}_a \\
 (1 - \mathfrak{s}^2) \mathbf{a}_a^* &= \mathbf{a}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} [(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*) + \mathfrak{s}^2 (\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*)] + \mathfrak{s}^2 \mathbf{b}_a,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

valamint

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*) + \mathfrak{s}^2 [\mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*) + \mathfrak{c}^2 \mathbf{a}_a + \mathfrak{s}^2 \mathbf{b}_a^*] + \mathfrak{c}^2 \mathbf{b}_a \\
 (1 - \mathfrak{s}^4) \mathbf{b}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*) + \mathfrak{s}^3 \mathfrak{c}(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*) + \mathfrak{s}^2 \mathfrak{c}^2 \mathbf{a}_a + \mathfrak{c}^2 \mathbf{b}_a \\
 (1 - \mathfrak{s}^2) \mathbf{b}_a^* &= \mathbf{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} [(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*) + \mathfrak{s}^2 (\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*)] + \mathfrak{s}^2 \mathbf{a}_a
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

összefüggések adódnak.

4.4. A \mathcal{K}_a^* és \mathcal{L}_a^* mennyiségek kapcsolata \mathcal{K}_a és \mathcal{L}_a normális fundamentális formákkal

Ebben az alfejezetben a \mathcal{K}_a^* , \mathcal{L}_a^* és \mathcal{K}_a , \mathcal{L}_a normális fundamentális vektorok kapcsolatát keressük az (5), (2.28), (2.43) és (3.2) összefüggés segítségével. A felbontás alatt a mennyiségek azonosításához az előző fejezet végén megadott táblázatot használtuk.

A \mathcal{K}_a^* normális fundamentális vektor esetén a

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_a^* &= g_a^c l^d \tilde{\nabla}_d k_c = g_a^c (\mathfrak{s}n^d + \mathfrak{c}m^d) \tilde{\nabla}_d (\mathfrak{c}n_c + \mathfrak{s}m_c) \\
&= (\mathfrak{s}g_a^c n^d + \mathfrak{c}g_a^c m^d) \left(\mathfrak{c} \tilde{\nabla}_d n_c + n_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{c} + \mathfrak{s} \tilde{\nabla}_d m_c + m_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{s} \right) \\
&= \mathfrak{s} \mathfrak{c} g_a^c n^d \tilde{\nabla}_d n_c + \mathfrak{s}^2 g_a^c n^d \tilde{\nabla}_d m_c + \mathfrak{c}^2 g_a^c m^d \tilde{\nabla}_d n_c + \mathfrak{s} \mathfrak{c} g_a^c m^d \tilde{\nabla}_d m_c \\
&= \mathfrak{s} \mathfrak{c} \mathfrak{a}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a^* + \mathfrak{c}^2 g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d + \mathfrak{s} \mathfrak{c} \mathfrak{b}_a^* \\
&= \mathfrak{s} \mathfrak{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a^*
\end{aligned}$$

részösszefüggést kaptuk. Látszik, hogy szükség lesz a továbbiakban az \mathcal{L}_a^* felírására a k^a , l^a bázis segítségével. A számoláshoz használt összefüggések ugyanazok, így a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a^* &= -g_a^c n^d \tilde{\nabla}_d m_c = -g_a^c (\mathfrak{c}k^d - \mathfrak{s}l^d) \tilde{\nabla}_d (-\mathfrak{s}k_c + \mathfrak{c}l_c) \\
&= (-\mathfrak{c}g_a^c k^d + \mathfrak{s}g_a^c l^d) \left(-\mathfrak{s} \tilde{\nabla}_d k_c - k_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{s} + \mathfrak{c} \tilde{\nabla}_d l_c + l_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{c} \right) \\
&= \mathfrak{c} \mathfrak{s} g_a^c k^d \tilde{\nabla}_d k_c - \mathfrak{c}^2 g_a^c k^d \tilde{\nabla}_d l_c - \mathfrak{s}^2 g_a^c l^d \tilde{\nabla}_d k_c + \mathfrak{s} \mathfrak{c} g_a^c l^d \tilde{\nabla}_d l_c \\
&= \mathfrak{c} \mathfrak{s} \mathfrak{a}_a^* - \mathfrak{c}^2 g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a^* + \mathfrak{s} \mathfrak{c} \mathfrak{b}_a \\
&= \mathfrak{c} \mathfrak{s} (\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a^*
\end{aligned}$$

kifejezés adódik. A két egyenletrendszerből a

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_a^* &= \mathfrak{s} \mathfrak{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a^* \\
&= \mathfrak{s} \mathfrak{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 [\mathfrak{c} \mathfrak{s} (\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a^*] \\
&= \mathfrak{s} \mathfrak{c} [(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*) - \mathfrak{s}^2 (\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a)] + \mathfrak{c}^2 (\mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a) + \mathfrak{s}^4 \mathcal{K}_a^* \\
(1 - \mathfrak{s}^4) \mathcal{K}_a^* &= \mathfrak{s} \mathfrak{c} [(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*) - \mathfrak{s}^2 (\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a)] + \mathfrak{c}^2 (\mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a) \\
(1 - \mathfrak{s}^2) \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a^* &= \mathfrak{s} \mathfrak{c} [(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*) - \mathfrak{s}^2 (\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a)] + \mathfrak{c}^2 (\mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a) \\
(1 - \mathfrak{s}^2) \mathcal{K}_a^* &= \mathcal{K}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} [(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*) - \mathfrak{s}^2 (\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a)] - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a, \tag{4.6}
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a^* &= \mathfrak{c} \mathfrak{s} (\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a^* \\
&= \mathfrak{c} \mathfrak{s} (\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 [\mathfrak{s} \mathfrak{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a^*] \\
&= \mathfrak{c} \mathfrak{s} [(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a) - \mathfrak{s}^2 (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*)] + \mathfrak{c}^2 (\mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a) + \mathfrak{s}^4 \mathcal{L}_a^* \\
(1 - \mathfrak{s}^4) \mathcal{L}_a^* &= \mathfrak{c} \mathfrak{s} [(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a) - \mathfrak{s}^2 (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*)] + \mathfrak{c}^2 (\mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a) \\
(1 - \mathfrak{s}^2) \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a^* &= \mathfrak{c} \mathfrak{s} [(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a) - \mathfrak{s}^2 (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*)] + \mathfrak{c}^2 (\mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a) \\
(1 - \mathfrak{s}^2) \mathcal{L}_a^* &= \mathcal{L}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} [(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a) - \mathfrak{s}^2 (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*)] - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a \tag{4.7}
\end{aligned}$$

kapcsolat adódik.

4.5. Az \mathbf{a}_a^* , \mathbf{b}_a^* gyorsulások és \mathcal{K}_a^* , \mathcal{L}_a^* mennyiségek végső kifejezései

A gyorsulások közötti (4.4) és (4.5) összefüggések különbségéből, valamint a levezetett (4.6) és (4.7) összefüggések összegéből kapjuk, hogy:

$$\mathbf{a}_a^* - \mathbf{b}_a^* + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} (\mathcal{L}_a^* - \mathcal{K}_a^*) = \mathbf{a}_a - \mathbf{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} (\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a) ,$$

$$\mathcal{K}_a^* + \mathcal{L}_a^* - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} (\mathbf{a}_a^* + \mathbf{b}_a^*) = \mathcal{K}_a + \mathcal{L}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} (\mathbf{a}_a + \mathbf{b}_a) ,$$

vagyis

$$2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathbf{a}_a^* = [\mathcal{L}_a^* + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2) \mathcal{K}_a^*] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathbf{b}_a - [\mathcal{K}_a + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2) \mathcal{L}_a] ,$$

$$2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathbf{b}_a^* = [\mathcal{K}_a^* + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2) \mathcal{L}_a^*] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathbf{a}_a - [\mathcal{L}_a + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2) \mathcal{K}_a] .$$

Visszahelyettesítve ezeket a (4.6) és (4.7) összefüggésekbe, az $1 + \mathfrak{s}^2\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{s}^4 = \mathfrak{c}^2$ és $1 - \mathfrak{s}^2(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2) = (1 - 2\mathfrak{s}^2)\mathfrak{c}^2$ azonosságok felhasználásával:

$$\begin{aligned} 2(1 - \mathfrak{s}^2)\mathfrak{c}^2\mathcal{K}_a^* &= 2\mathfrak{c}^2\mathcal{K}_a - 2\mathfrak{s}^2\mathfrak{c}^2\mathcal{L}_a + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathbf{a}_a - \mathfrak{s}^2\mathbf{b}_a) \\ &\quad + [\mathcal{K}_a^* + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2)\mathcal{L}_a^*] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathbf{a}_a - [\mathcal{L}_a + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2)\mathcal{K}_a] \\ &\quad - \mathfrak{s}^2\{[\mathcal{L}_a^* + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2)\mathcal{K}_a^*] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathbf{b}_a - [\mathcal{K}_a + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2)\mathcal{L}_a]\} \\ &= \mathfrak{c}^2(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a) + \mathfrak{c}^2[\mathcal{L}_a^* + (1 - 2\mathfrak{s}^2)\mathcal{K}_a^*] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(1 - \mathfrak{s}^2)\mathfrak{c}^2\mathcal{L}_a^* &= 2\mathfrak{c}^2\mathcal{L}_a - 2\mathfrak{s}^2\mathfrak{c}^2\mathcal{K}_a + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}[\mathbf{b}_a - \mathfrak{s}^2\mathbf{a}_a] \\ &\quad + [\mathcal{L}_a^* + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2)\mathcal{K}_a^*] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathbf{b}_a - [\mathcal{K}_a + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2)\mathcal{L}_a] \\ &\quad - \mathfrak{s}^2\{[\mathcal{K}_a^* + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2)\mathcal{L}_a^*] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathbf{a}_a - [\mathcal{L}_a + (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2)\mathcal{K}_a]\} \\ &= \mathfrak{c}^2(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a) + \mathfrak{c}^2[\mathcal{K}_a^* + (1 - 2\mathfrak{s}^2)\mathcal{L}_a^*] . \end{aligned}$$

Mindkét egyenlet a

$$\mathcal{K}_a^* - \mathcal{L}_a^* = \mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a \tag{4.8}$$

összefüggéshez vezet. Ennek felhasználásával a (4.6) és (4.7) összefüggések különbségéből kapjuk, hogy:

$$\mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathbf{a}_a^* - \mathbf{b}_a^*) = \mathfrak{s}\mathfrak{c}(\mathbf{a}_a - \mathbf{b}_a) + 2\mathfrak{s}^2(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a) .$$

Ez az összefüggés $\mathfrak{s} = 0$ esetén teljesül. Amikor $\mathfrak{s} \neq 0$, oszthatunk vele és

$$\mathbf{a}_a^* - \mathbf{b}_a^* = \mathbf{a}_a - \mathbf{b}_a + 2\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a) \tag{4.9}$$

eredményhez jutunk. Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{s} = 0$ esetén ez is teljesül, így nem vezettünk be hamis megoldást az \mathfrak{s} -sel való osztáskor.

Ezután a levezetett (4.8) és (4.9) eredmények felhasználásával (4.5) és (4.7) összefüggésekből kiküszöböljük \mathcal{K}_a^* és \mathbf{a}_a^* változókat:

$$\mathcal{L}_a^* - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\mathbf{b}_a^* = \frac{1}{\mathfrak{c}^2}(\mathcal{L}_a + \mathfrak{s}^2\mathcal{K}_a) + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\mathbf{a}_a ,$$

$$\mathfrak{s}c\mathcal{L}_a^* + (1 - \mathfrak{s}^2)\mathfrak{b}_a^* = \mathfrak{b}_a + \mathfrak{s}^2\mathfrak{a}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} [2\mathcal{L}_a - (1 - \mathfrak{s}^2)\mathcal{K}_a] .$$

Az előállt egyenletekből most már kifejezhető

$$\mathcal{L}_a^* = \mathcal{L}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a) \quad (4.10)$$

és

$$\frac{\mathfrak{s}}{c}\mathfrak{b}_a^* = \frac{\mathfrak{s}}{c}\mathfrak{b}_a + \frac{\mathfrak{s}^2}{c^2} (\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a) .$$

Utóbbi teljesül $\mathfrak{s} = 0$ esetén. Amikor $\mathfrak{s} \neq 0$, oszthatunk vele és

$$\mathfrak{b}_a^* = \mathfrak{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a) \quad (4.11)$$

összefüggéshez jutunk. Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{s} = 0$ esetén ez is teljesül, így nem vezettünk be hamis megoldást az \mathfrak{s} -sel való osztáskor.

A (4.8) és (4.9) összefüggésekből meghatározhatjuk

$$\mathcal{K}_a^* = \mathcal{K}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a) \quad (4.12)$$

és

$$\mathfrak{a}_a^* = \mathfrak{a}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a)$$

kifejezéseket is.

Végül megjegyezzük, hogy (4.1), (4.10) és (4.12) összefüggésekből

$$\mathcal{L}_a^* = \mathcal{K}_a^* + D_a\phi \quad (4.13)$$

következik.

4.6. A k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvényeinek kifejezése geometriai mennyiségekkel

Felhasználva az előző alfejezet eredményeit, a (2.52) összefüggések megadják a keresett nemeltűnő örvénykomponenseket:

$$\begin{aligned} 2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})}l^b &= \mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a - \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a) , \\ 2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})}n^b &= \mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a) . \end{aligned}$$

Felhasználva továbbá (4.1) összefüggést, az örvények kifejezhetők az alábbi

$$\begin{aligned} 2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})}l^b &= D_a\phi - \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a) , \\ 2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})}n^b &= D_a\phi + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a) \end{aligned} \quad (4.14)$$

alakban, melyeken látszik, hogy az örvények \mathcal{N} nemnulla értékének köszönhető. Ezzel az \mathcal{N} nemeltűnő shift-komponens második interpretációját adjuk meg, a k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvényességének mértékét jelenti. (Az első interpretáció a bázisok Lorentz-forgatásának szöge volt.)

4.7. A K_{ab}^* és L_{ab}^* külső görbületek kapcsolata K_{ab} és L_{ab} külső görbületekkel

A [8, 9, 10] munkákban alkalmazott merőleges kettős fóliázás esetén n^a , l^a normálisok és bázisaik úgy lettek megválasztva, hogy $\mathcal{N} = 0$ összefüggés miatt $n^a = k^a$, valamint $l^a = m^a$ állt fenn. Ezért a merőleges kettős fóliázást választva, a Σ_{t_X} felület külső görbületei csak a K_{ab} és L_{ab} voltak. Nemortogonális kettős fóliázás esetén viszont, mint a 2.5 és 3.3 fejezetekben láthattuk, az k^a és m^a is meghatározzák Σ_{t_X} felületnek még két külső görbületet, melyek K_{ab}^* és L_{ab}^* .

Kevesebb változó használatára törekedve keressük, hogy milyen kapcsolat valósul meg a K_{ab} , L_{ab} és K_{ab}^* , L_{ab}^* külső görbületek között. Az összefüggések megállapításához a (2.28), (2.43) és (3.2) korábbi eredményeket vesszük figyelembe, így a

$$\begin{aligned} K_{ab}^* &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c (\mathbf{c}n_d + \mathbf{s}m_d) \\ &= g_a^c g_b^d \left(\mathbf{c} \tilde{\nabla}_c n_d + n_d \tilde{\nabla}_c \mathbf{c} + \mathbf{s} \tilde{\nabla}_c m_d + m_d \tilde{\nabla}_c \mathbf{s} \right) \\ &= \mathbf{c} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + g_a^c (g_b^d n_d) \tilde{\nabla}_c \mathbf{c} + \mathbf{s} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d + g_a^c (g_b^d m_d) \tilde{\nabla}_c \mathbf{s} \\ &= \mathbf{c} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + \mathbf{s} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d = \mathbf{c} K_{ab} + \mathbf{s} L_{ab} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} L_{ab}^* &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c (-\mathbf{s}k_d + \mathbf{c}l_d) \\ &= g_a^c g_b^d \left(-\mathbf{s} \tilde{\nabla}_c k_d - k_d \tilde{\nabla}_c \mathbf{s} + \mathbf{c} \tilde{\nabla}_c l_d + l_d \tilde{\nabla}_c \mathbf{c} \right) \\ &= -\mathbf{s} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d - g_a^c (g_b^d k_d) \tilde{\nabla}_c \mathbf{s} + \mathbf{c} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d + g_a^c (g_b^d l_d) \tilde{\nabla}_c \mathbf{c} \\ &= -\mathbf{s} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d + \mathbf{c} g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d = \mathbf{c} L_{ab} - \mathbf{s} K_{ab}^* \end{aligned}$$

egyenleteket adódnak. A kapott egyenletrendszerekkel tovább számolva a

$$\begin{aligned} K_{ab}^* &= \mathbf{c} K_{ab} + \mathbf{s} L_{ab}^* = \mathbf{c} K_{ab} + \mathbf{s} (\mathbf{c} L_{ab} - \mathbf{s} K_{ab}^*) \\ &= \mathbf{c} K_{ab} + \mathbf{s} \mathbf{c} L_{ab} - \mathbf{s}^2 K_{ab}^* \\ (1 + \mathbf{s}^2) K_{ab}^* &= \mathbf{c} K_{ab} + \mathbf{s} \mathbf{c} L_{ab} \\ \mathbf{c}^2 K_{ab}^* &= \mathbf{c} K_{ab} + \mathbf{s} \mathbf{c} L_{ab} \\ K_{ab}^* &= \frac{1}{\mathbf{c}} (K_{ab} + \mathbf{s} L_{ab}) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} L_{ab}^* &= \mathbf{c} L_{ab} - \mathbf{s} K_{ab}^* = \mathbf{c} L_{ab} - \mathbf{s} (\mathbf{c} K_{ab} + \mathbf{s} L_{ab}^*) \\ &= \mathbf{c} L_{ab} - \mathbf{s} \mathbf{c} K_{ab} - \mathbf{s}^2 L_{ab}^* \\ (1 + \mathbf{s}^2) L_{ab}^* &= \mathbf{c} L_{ab} - \mathbf{s} \mathbf{c} K_{ab} \\ L_{ab}^* &= \frac{1}{\mathbf{c}} (L_{ab} - \mathbf{s} K_{ab}) \end{aligned}$$

eredményeket kapjuk a K_{ab} , L_{ab} és K_{ab}^* , L_{ab}^* közötti kapcsolatról.

Ezekből könnyen látható, hogy a külső görbületek párjai a Lorentz-forgatással összefüggő transzformációval állnak elő egymásból

$$\begin{pmatrix} K_{ab}^* \\ L_{ab}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & \frac{\mathfrak{s}}{c} \\ -\frac{\mathfrak{s}}{c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ab} \\ L_{ab} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Ez egy térbeli forgatás mátrixa (ortogonális mátrix), a forgatás szöge pedig $\psi = \arccos(\cosh \phi)^{-1}$.

4.8. Összefoglalás

A fejezet végén két táblázatban foglaljuk össze az eddig kapott eredményeket.

Az n^a és l^a bázisvektorokhoz tartozó külső görbület, normális fundamentális forma, normális fundamentális skalár, gyorsulás és örvény, valamint ezek kapcsolata:

$K_{ab} = g_a^c g_b^d \widetilde{\nabla}_c n_d$	$L_{ab} = g_a^c g_b^d \widetilde{\nabla}_c l_d$
$\mathcal{K}_a = g_a^c m^d \widetilde{\nabla}_c n_d$	$\mathcal{L}_a = \mathcal{K}_a + D_a \phi$
$\mathcal{K} = m^d m^c \widetilde{\nabla}_c n_d$	$\mathcal{L} = k^d k^c \widetilde{\nabla}_c l_d$
$\mathbf{a}_a = g_b^d n^c \widetilde{\nabla}_c n_d$	$\mathbf{b}_a = g_b^d l^c \widetilde{\nabla}_c l_d$
$\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{n})} = 0$	$\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{l})} = 0$

A k^a és m^a bázisvektorokhoz tartozó külső görbület, normális fundamentális forma, normális fundamentális skalár, gyorsulás és örvény, valamint ezek kapcsolata egymással és az n^a és l^a bázisvektorokhoz tartozó geometriai mennyiségekkel:

$K_{ab}^* = \frac{1}{c} (K_{ab} + \mathfrak{s} L_{ab})$	$L_{ab}^* = \frac{1}{c} (L_{ab} - \mathfrak{s} K_{ab})$
$\mathcal{K}_a^* = \mathcal{K}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathbf{a}_a + \mathbf{b}_a)$	$\mathcal{L}_b^* = \mathcal{L}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathbf{a}_a + \mathbf{b}_a) = \mathcal{K}_a^* + D_a \phi$
$\mathcal{K}^* = \frac{1}{c} (\mathcal{K} - \mathfrak{s} \mathcal{L}) + \frac{1}{c^2} (l^a - \mathfrak{s} n^a) \widetilde{\nabla}_a \phi$	$\mathcal{L}^* = \frac{1}{c} (\mathfrak{s} \mathcal{K} + \mathcal{L}) + \frac{1}{c^2} (\mathfrak{s} l^a + n^a) \widetilde{\nabla}_a \phi$
$\mathbf{a}_a^* = \mathbf{a}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a) = \mathbf{a}_a - \frac{\mathfrak{s}}{c} D_a \phi$	$\mathbf{b}_a^* = \mathbf{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} (\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a) = \mathbf{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{c} D_a \phi$
$\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} g_c^b = 0$	$\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} g_c^b = 0$
$\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} l^b = \frac{1}{2} D_a \phi - \frac{\mathfrak{s}}{2c} (\mathbf{a}_a + \mathbf{b}_a)$	$\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} n^b = \frac{1}{2} D_a \phi + \frac{\mathfrak{s}}{2c} (\mathbf{a}_a + \mathbf{b}_a)$

5. fejezet

A geometriai és kinematikai mennyiségek kapcsolata

Ebben a fejezetben megkeressük a kapcsolatot a $\{g_{ab}, M^a, M\}$ dinamikai változók deriváltjai és a bevezetett $\{K_{ab}, \mathcal{K}_a, \mathcal{K}\}$, $\{L_{ab}, \mathcal{L}_a, \mathcal{L}\}$, $\{K_{ab}^*, \mathcal{K}_a^*, \mathcal{K}^*\}$, $\{L_{ab}^*, \mathcal{L}_a^*, \mathcal{L}^*\}$ geometriai mennyiségek között. Ehhez be kell vezetnünk a Lie deriválás fogalmát, azaz általánosítanunk kell a koordinátarendszerünkben a parciális deriválás fogalmát.

5.1. A geometriai mennyiségek és Lie-deriváltak kapcsolata

A Lie deriválás segítségével egy kiválasztott hiperfelületbeli folyam mentén történő lokális elmozdulást tudjuk megadni. Tetszőleges f függvény és W^a vektor Lie deriváltja V^a folyam mentén:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{L}}_V f &= V(f) = V^a \partial_a f = V^a \nabla_a f, \\ \tilde{\mathfrak{L}}_V W^a &= [V, W]^a = V^b \nabla_b W^a - W^b \nabla_b V^a.\end{aligned}$$

Ezekből az összefüggésekből bármely ω_a 1-forma és T_b^a tenzor Lie-deriváltjai is előállíthatók:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{L}}_V \omega_a &= V^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a V^b, \\ \tilde{\mathfrak{L}}_V T_b^a &= V^c \nabla_c T_b^a - T_b^c \nabla_c V^a + T_c^a \nabla_b V^c.\end{aligned}$$

A g_{ab} indukált metrika segítségével a Lie derivált is levetíthető a Σ_{t_χ} felületre:

$$\mathfrak{L}_V T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_r} = g_a^c g_{c_1}^{a_1} \dots g_{c_r}^{a_r} g_{b_1}^{d_1} \dots g_{b_q}^{d_q} \tilde{\mathfrak{L}}_V T_{d_1 \dots d_q}^{c_1 \dots c_r}.$$

Amennyiben $T_{d_1 \dots d_q}^{c_1 \dots c_r}$ is a Σ_{t_χ} felületre vetített tenzor, ez a tenzor prociált Lie-deriváltja.

A Σ_{t_χ} felületnek az \mathcal{S}_t és \mathfrak{M}_χ normálsaival képezett külső görbületei kifejezhetők metrikus mennyiségek Lie-deriváltjával a

$$\begin{aligned}K_{ab} &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d = g_a^c (g_b^i g_i^d) \tilde{\nabla}_c n_d = g_a^c g_b^i g_{di} \tilde{\nabla}_c n^d \\ &= g_a^c g_b^i \left(g_{di} \tilde{\nabla}_c n^d + g_{cd} \tilde{\nabla}_i n^d + n^d \tilde{\nabla}_d g_{ci} - g_{cd} \tilde{\nabla}_i n^d - n^d \tilde{\nabla}_d g_{ci} \right) \\ &= g_a^c g_b^i \left(\tilde{\mathfrak{L}}_n g_{ci} - g_{cd} \tilde{\nabla}_i n^d - n^d \tilde{\nabla}_d g_{ci} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_a^c g_b^i \tilde{\mathcal{L}}_n g_{ci} - g_a^c g_b^i g_{cd} \tilde{\nabla}_i n^d - g_a^c g_b^i n^d \tilde{\nabla}_d (\tilde{g}_{ci} + n_c n_i - m_c m_i) \\
&= \mathcal{L}_n g_{ab} - g_b^i (g_a^c g_c^d) \tilde{\nabla}_i n_d = \mathcal{L}_n g_{ab} - g_b^i g_a^d \tilde{\nabla}_i n_d \\
&= \mathcal{L}_n g_{ab} - K_{ab} \rightarrow K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{ab},
\end{aligned}$$

és a

$$\begin{aligned}
L_{ab} &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d = g_a^c g_b^i g_{di} \tilde{\nabla}_c l^d \\
&= g_a^c g_b^i \left(g_{di} \tilde{\nabla}_c l^d + g_{cd} \tilde{\nabla}_i l^d + l^d \tilde{\nabla}_d g_{ci} - g_{cd} \tilde{\nabla}_i l^d - l^d \tilde{\nabla}_d g_{ci} \right) \\
&= \mathcal{L}_l g_{ab} - g_a^c g_b^i g_{cd} \tilde{\nabla}_i l^d - g_a^c g_b^i l^d \tilde{\nabla}_d g_{ci} \\
&= \mathcal{L}_l g_{ab} - g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_d l_c = \mathcal{L}_l g_{ab} - L_{ab} \rightarrow L_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_l g_{ab}
\end{aligned}$$

módon. Hasonlóan beláthatók a

$$\begin{aligned}
K_{ab}^* &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_k g_{ab}, \\
L_{ab}^* &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_m g_{ab}
\end{aligned}$$

összefüggések is.

A (2.38) és (3.3) összefüggéseket figyelembe véve a $\Sigma_{t\chi}$ felületnek az \mathcal{S}_t normálisával képezett normális fundamentális formája a

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_a &= g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d = g_a^c \left(m_d \tilde{\nabla}_c n^d \right) = g_a^c \left(m_d \tilde{\nabla}_c n^d + n^d \tilde{\nabla}_d m_c - n^d \tilde{\nabla}_d m_c \right) \\
&= g_a^c \left(m_d \tilde{\nabla}_c n^d + n^d \tilde{\nabla}_d m_c - n^d \tilde{\nabla}_d m_c \right) \\
&= g_a^c \left(\tilde{\mathcal{L}}_n m_c - n^d \tilde{\nabla}_d m_c \right) = \mathcal{L}_n m_a - g_a^i g_i^c n^d \tilde{\nabla}_d m_c = \mathcal{L}_n m_a + g_a^i m^c \left(n^d \tilde{\nabla}_d g_{ic} \right) \\
&= \mathcal{L}_n m_a + g_a^i m^c \left(n^d \tilde{\nabla}_d g_{ic} + g_{dc} \tilde{\nabla}_i n^d + g_{id} \tilde{\nabla}_c n^d - g_{dc} \tilde{\nabla}_i n^d - g_{id} \tilde{\nabla}_c n^d \right) \\
&= \mathcal{L}_n m_a + g_a^i m^c \left(\tilde{\mathcal{L}}_n g_{ic} - g_{dc} \tilde{\nabla}_i n^d - g_{id} \tilde{\nabla}_c n^d \right) \\
&= \mathcal{L}_n m_a + g_a^i m^c \tilde{\mathcal{L}}_n g_{ic} - g_a^i g_{id} m^c \tilde{\nabla}_c n^d \\
&= \mathcal{L}_n m_a + g_a^i m^c \tilde{\mathcal{L}}_n g_{ic} - (g_a^i g_i^d) m^c \tilde{\nabla}_c n_d = \mathcal{L}_n m_a + g_a^i m^c \tilde{\mathcal{L}}_n g_{ic} - \mathcal{K}_a \\
\rightarrow \mathcal{K}_a &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}_n m_a + g_a^i m^c \tilde{\mathcal{L}}_n g_{ic} \right)
\end{aligned}$$

alakban írható fel. Mivel $\mathcal{L}_a, \mathcal{K}_a^*, \mathcal{L}_a^*$ kifejezhetők $\mathcal{K}_a, \mathcal{N}$ és gyorsulásokkal, előbbieket is szükség szerint megadhatók Lie-deriváltakkal.

Végül a két hiperfelület normális fundamentális skalárjai

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= m^a m^b \tilde{\nabla}_a n_b = m_b \left(m^a \tilde{\nabla}_a n^b \right) = m_b \left(m^a \tilde{\nabla}_a n^b - n^a \tilde{\nabla}_a m^b + n^a \tilde{\nabla}_a m^b \right) \\
&= -m_b \tilde{\mathcal{L}}_n m^b + n^a m_b \tilde{\nabla}_a m^b = -m_b \tilde{\mathcal{L}}_n m^b
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= k^a k^b \tilde{\nabla}_a l_b = k_b \left(k^a \tilde{\nabla}_a l^b \right) = k_b \left(k^a \tilde{\nabla}_a l^b - l^a \tilde{\nabla}_a k^b + l^a \tilde{\nabla}_a k^b \right) \\
&= -k_b \tilde{\mathcal{L}}_l k^b + l^a k_b \tilde{\nabla}_a k^b = -k_b \tilde{\mathcal{L}}_l k^b
\end{aligned}$$

alakban fejezhetők ki Lie-deriválttal. Hasonlóan

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^* &= -l_b \tilde{\mathcal{L}}_k l^b, \\ \mathcal{L}^* &= -n_b \tilde{\mathcal{L}}_m n^b\end{aligned}$$

is következik.

5.2. Az indukált metrika t és χ deriváltjai

Szeretnénk tudni, hogy a $(\partial/\partial t)^a$ és $(\partial/\partial \chi)^a$ folyamok mentén végzett Lie deriválás milyen kapcsolatban áll a külső görbületekkel. Az időderiválást az állandó t által meghatározott \mathcal{S}_t hiperfelületbeli $(\partial/\partial t)^a$ folyam menti Lie derivált fogja jelenteni, míg az állandó χ által meghatározott \mathfrak{M}_χ hiperfelületbeli $(\partial/\partial \chi)^a$ folyam menti Lie derivált térbeli derivált. A $\Sigma_{t\chi}$ hiperfelület egy tetszőleges T_b^a tenzorának Lie deriváltja a $(\partial/\partial t)^a$ és $(\partial/\partial \chi)^a$ folyam mentén:

$$\begin{aligned}\partial_t T_b^a &= \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} T \right)_b^a = \left(g_a^c g_d^b \tilde{\mathcal{L}}_{\frac{\partial}{\partial t}} T \right)_b^a \\ &= g_a^c g_d^b \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \tilde{\nabla}_i T_b^a - g_a^c g_d^b T_b^i \tilde{\nabla}_i \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + g_a^c g_d^b T_i^a \tilde{\nabla}_b \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \\ &= g_a^c g_d^b (N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i) \tilde{\nabla}_i T_b^a - g_a^c g_d^b T_b^i \tilde{\nabla}_i (N n^a + N^a + \mathcal{N} m^a) \\ &\quad + g_a^c g_d^b T_i^a \tilde{\nabla}_b (N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i) \\ &= g_a^c g_d^b \left[N n^i \tilde{\nabla}_i T_b^a + N^i \tilde{\nabla}_i T_b^a + \mathcal{N} m^i \tilde{\nabla}_i T_b^a - T_b^i \tilde{\nabla}_i N n^a - T_b^i \tilde{\nabla}_i N^a \right. \\ &\quad \left. - T_b^i \tilde{\nabla}_i \mathcal{N} m^a + T_i^a \tilde{\nabla}_b N n^i + T_i^a \tilde{\nabla}_b N^i + T_i^a \tilde{\nabla}_b \mathcal{N} m^i \right] \\ &= N g_a^c g_d^b \tilde{\mathcal{L}}_N T_b^a + g_a^c g_d^b \tilde{\mathcal{L}}_N T_b^a + \mathcal{N} g_a^c g_d^b \tilde{\mathcal{L}}_M T_b^a = N \mathcal{L}_N T_b^a + \mathcal{L}_N T_b^a + \mathcal{N} \mathcal{L}_M T_b^a, \\ \partial_\chi T_b^a &= \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial \chi}} T \right)_b^a = \left(g_a^c g_d^b \tilde{\mathcal{L}}_{\frac{\partial}{\partial \chi}} T \right)_b^a \\ &= g_a^c g_d^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^i \tilde{\nabla}_i T_b^a - T_b^i \tilde{\nabla}_i \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a + T_i^a \tilde{\nabla}_b \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^i \right] \\ &= g_a^c g_d^b \left[(M m^i + M^i) \tilde{\nabla}_i T_b^a - T_b^i \tilde{\nabla}_i (M m^a + M^a) + T_i^a \tilde{\nabla}_b (M m^i + M^i) \right] \\ &= g_a^c g_d^b \left[M m^i \tilde{\nabla}_i T_b^a + M^i \tilde{\nabla}_i T_b^a - T_b^i \tilde{\nabla}_i M m^a - T_b^i \tilde{\nabla}_i M^a + T_i^a \tilde{\nabla}_b M m^i + T_i^a \tilde{\nabla}_b M^i \right] \\ &= M g_a^c g_d^b \tilde{\mathcal{L}}_M T_b^a + g_a^c g_d^b \tilde{\mathcal{L}}_M T_b^a = M \mathcal{L}_M T_b^a + \mathcal{L}_M T_b^a.\end{aligned}$$

A $\Sigma_{t\chi}$ hiperfelület g_{ab} 2-dimenziós metrikus tenzorának időderiváltját a

$$\begin{aligned}\partial_t g_{cd} &= \left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} g \right)_{cd} = g_c^a g_d^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \tilde{\nabla}_i g_{ab} + g_{ai} \tilde{\nabla}_b \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i + g_{bi} \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \right] \\ &= (N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i) g_c^a g_d^b \tilde{\nabla}_i g_{ab} + g_c^a g_d^b g_{ai} \tilde{\nabla}_b (N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i) \\ &\quad + g_c^a g_d^b g_{bi} \tilde{\nabla}_a (N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i) \\ &= g_c^a g_d^b \left[(N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i) \tilde{\nabla}_i (n_a n_b - m_a m_b) + g_{ai} \tilde{\nabla}_b (N n^i) + g_{ai} \tilde{\nabla}_b N^i \right. \\ &\quad \left. + g_{ai} \tilde{\nabla}_b (\mathcal{N} m^i) + g_{bi} \tilde{\nabla}_a (N n^i) + g_{bi} \tilde{\nabla}_a N^i + g_{bi} \tilde{\nabla}_a (\mathcal{N} m^i) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_c^a g_d^b \left[N g_{ai} \tilde{\nabla}_b n^i + g_{ai} \tilde{\nabla}_b N^i + \mathcal{N} g_{ai} \tilde{\nabla}_b m^i + N g_{bi} \tilde{\nabla}_a n^i + g_{bi} \tilde{\nabla}_a N^i + \mathcal{N} g_{bi} \tilde{\nabla}_a m^i \right] \\
&= N g_c^a g_d^b \tilde{\nabla}_b n_a + g_c^a g_d^b \tilde{\nabla}_b N_a + \mathcal{N} g_c^a g_d^b \tilde{\nabla}_b m_a + N g_c^a g_d^b \tilde{\nabla}_a n_b + g_c^a g_d^b \tilde{\nabla}_a N_b + \mathcal{N} g_c^a g_d^b \tilde{\nabla}_a m_b \\
&= 2NK_{cd} + 2D_{(c}N_{d)} + 2\mathcal{N}D_{(c}m_{d)} \\
&= 2NK_{cd} + 2D_{(c}N_{d)} + 2N\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}L_{cd}^* \\
&= 2N \left(K_{cd} + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}L_{cd}^* \right) + 2D_{(c}N_{d)} \\
&= 2N\frac{1}{\mathfrak{c}^2} (K_{cd} + \mathfrak{s}L_{cd}) + 2D_{(c}N_{d)} \\
&= 2N\frac{1}{\mathfrak{c}} K_{cd}^* + 2D_{(c}N_{d)}
\end{aligned}$$

összefüggések, és térbeli deriváltját a

$$\begin{aligned}
\partial_\chi g_{cd} &= \left(\mathfrak{L} \frac{\partial}{\partial \chi} g \right)_{cd} = g_c^a g_d^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^i \tilde{\nabla}_i g_{ab} + g_{ai} \tilde{\nabla}_b \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^i + g_{bi} \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^i \right] \\
&= (Mm^i + M^i) g_c^a g_d^b \tilde{\nabla}_i g_{ab} + g_c^a g_d^b g_{ai} \tilde{\nabla}_b (Mm^i + M^i) + g_c^a g_d^b g_{bi} \tilde{\nabla}_a (Mm^i + M^i) \\
&= g_d^b (g_c^a g_{ai}) \tilde{\nabla}_b Mm^i + g_d^b (g_c^a g_{ai}) \tilde{\nabla}_b M^i + g_c^a (g_d^b g_{bi}) \tilde{\nabla}_a Mm^i + g_c^a (g_d^b g_{bi}) \tilde{\nabla}_a M^i \\
&= M g_d^b g_c^i \tilde{\nabla}_b m_i + M g_c^a g_d^i \tilde{\nabla}_a m_i + g_d^b g_c^i \tilde{\nabla}_b M_i + g_c^a g_d^i \tilde{\nabla}_a M_i \\
&= MD_d m_c + MD_c m_d + D_d M_c + D_c M_d = 2MD_{(c}m_{d)} + 2D_{(c}M_{d)} \\
&= \frac{2}{\mathfrak{c}} M (L_{cd} - \mathfrak{s}K_{cd}) + 2D_{(c}M_{d)} \\
&= 2ML_{cd}^* + 2D_{(c}M_{d)}
\end{aligned}$$

összefüggés adják meg.

A külső görbületeket kapcsolatát a dinamikai változók koordinátaderiváltjaival a fenti kifejezések invertálásával kapjuk meg:

$$\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a}N_{b)} \right] - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} L_{ab}^* , \\
L_{ab} &= \frac{\mathfrak{c}}{M} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a}M_{b)} \right] + \mathfrak{s} K_{ab} , \\
K_{ab}^* &= \frac{\mathfrak{c}}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a}N_{b)} \right] , \\
L_{ab}^* &= \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a}M_{b)} \right] ,
\end{aligned}$$

vagy az első két összefüggés expliciten:

$$\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a}N_{b)} \right] - \frac{\mathfrak{s}}{M\mathfrak{c}} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a}M_{b)} \right] , \\
L_{ab} &= \frac{\mathfrak{s}}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a}N_{b)} \right] + \frac{1}{M\mathfrak{c}} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a}M_{b)} \right] .
\end{aligned}$$

Ezek az összefüggések azonosak a korábban levezetett (4.15) eredményekkel.

5.3. A $\tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}})$ és $\tilde{g}(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{g_{\mathbf{B}}} g_{\mathbf{C}})$ mennyiségek 2+1+1 felbontása

Először bebizonyítjuk a következő eredményt.

Állítás:

Amennyiben $\tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, f_{\mathbf{B}})$ =állandó, teljesül a következő összefüggés:

$$\tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}}) = \tilde{g}([f_{\mathbf{A}}, f_{\mathbf{B}}], f_{\mathbf{C}}) - \tilde{g}(f_{\mathbf{C}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}} f_{\mathbf{B}}) . \quad (5.1)$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}}) &= \tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{A}}^a \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}}^b = \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}}(\tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{A}}^a f_{\mathbf{C}}^b) - f_{\mathbf{C}}^b \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}}(\tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{A}}^a) \\ &= -\tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{C}}^b f_{\mathbf{B}}^c \tilde{\nabla}_c f_{\mathbf{A}}^a = -\tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{C}}^b \left(f_{\mathbf{B}}^c \tilde{\nabla}_c f_{\mathbf{A}}^a \pm f_{\mathbf{A}}^c \tilde{\nabla}_c f_{\mathbf{B}}^a \right) \\ &= \tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{C}}^b [f_{\mathbf{A}}, f_{\mathbf{B}}]^a - \tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{C}}^b f_{\mathbf{A}}^c \tilde{\nabla}_c f_{\mathbf{B}}^a \end{aligned}$$

Q.E.D.

A következőkben vizsgálni fogjuk ennek az állításnak sajátos eseteteit, olyankor, amikor rendre az $f_{\mathbf{A}}$, illetve $g_{\mathbf{A}}$ bázisvektorokra alkalmazzuk.

5.3.1. A gyorsulások és normális fundamentális skalárok kapcsolata a koordinátaderiváltakkal

Olyankor, ha $f_{\mathbf{B}} = f_{\mathbf{C}}$, az (5.1) azonosság jobboldalának második tagja azonosan nulla.

Ebben a sajátos esetben a (2.17)-(2.19) Lie-zárójelk segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) f_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}([f_{\mathbf{A}}, \mathbf{n}], \mathbf{n}) f_b^{\mathbf{A}} = \tilde{g}([\mathbf{m}, \mathbf{n}], \mathbf{n}) m_b + \tilde{g}([F_i, \mathbf{n}], \mathbf{n}) F_b^i \\ &= \frac{1}{M} \left[\frac{\partial}{\partial \chi} (\ln N) - M^j \partial_j (\ln N) \right] m_b + \partial_i (\ln N) F_b^i \\ &= \frac{1}{M} \left[\frac{\partial}{\partial \chi} (\ln N) - M^a D_a (\ln N) \right] m_b + D_b (\ln N) . \end{aligned}$$

A számolt kifejezés azonban éppen az n^a vektor (3.5) gyorsulása, α_b (kifejtve, mint az $f_{\mathbf{A}}$ irányú komponense, kontrahálva az $f_{\mathbf{A}}$ bázisvektorral, mindennek a b absztrakt indexű komponense). Így

$$\mathbf{a}_b = D_b (\ln N) \quad (5.2)$$

$$\mathcal{L}^* = -\frac{1}{M} \left[\frac{\partial}{\partial \chi} (\ln N) - M^a D_a (\ln N) \right] . \quad (5.3)$$

Hasonlóan kapjuk meg az m^a vektor gyorsulását, β_b^* -t is:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{m}} \mathbf{m}) f_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}([f_{\mathbf{A}}, \mathbf{m}], \mathbf{m}) f_b^{\mathbf{A}} = \tilde{g}([\mathbf{n}, \mathbf{m}], \mathbf{m}) n_b + \tilde{g}([F_i, \mathbf{m}], \mathbf{m}) F_b^i \\ &= \frac{1}{MN} [-\partial_t M + \partial_{\chi} \mathcal{N} + N^j \partial_j M - M^j \partial_j \mathcal{N}] n_b - \partial_i (\ln M) F_b^i \\ &= \frac{1}{MN} [-\partial_t M + \partial_{\chi} \mathcal{N} + N^a D_a M - M^a D_a \mathcal{N}] n_b - D_b (\ln M) . \end{aligned}$$

Összehasonlítva (3.9) kifejezéssel, kapjuk, hogy

$$\mathbf{b}_b^* = -D_b (\ln M) \quad (5.4)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{MN} [\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}] . \quad (5.5)$$

A k^a vektor gyorsulása

$$\begin{aligned} \tilde{g} \left(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \right) g_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g} ([g_{\mathbf{A}}, \mathbf{k}], \mathbf{k}) g_b^{\mathbf{A}} = \tilde{g} ([\mathbf{l}, \mathbf{k}], \mathbf{k}) l_b + \tilde{g} ([G_i, \mathbf{k}], \mathbf{k}) G_b^i \\ &= \left\{ \partial_t \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) - N^j \partial_j \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) + \frac{\mathfrak{s}}{N} [\partial_t \ln(MN) - N^j \partial_j \ln(MN)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) - M^j \partial_j \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) \right] \right\} l_b + \partial_j \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) G_b^i \\ &= \left\{ \mathcal{S} + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) - M^a D_a \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) \right] \right\} l_b + D_b \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) . \end{aligned}$$

Itt bevezettük az

$$\mathcal{S} = \partial_t \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) - N^a D_a \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) + \frac{\mathfrak{s}}{N} [\partial_t \ln(MN) - N^a D_a \ln(MN)] \quad (5.6)$$

jelölést. Megjegyezzük, hogy merőleges kettős föliázás esetén $\mathcal{S} = 0$. Összehasonlítva (3.8) kifejezéssel, kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}_b^* = D_b \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) , \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L} = -\mathcal{S} - \frac{1}{\mathfrak{c}M} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) - M^a D_a \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) \right] . \quad (5.8)$$

Végül az l^a vektor gyorsulása

$$\begin{aligned} \tilde{g} \left(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{l}} \mathbf{l} \right) g_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g} ([g_{\mathbf{A}}, \mathbf{l}], \mathbf{l}) g_b^{\mathbf{A}} = \tilde{g} ([\mathbf{k}, \mathbf{l}], \mathbf{l}) k_b + \tilde{g} ([G_i, \mathbf{l}], \mathbf{l}) G_b^i \\ &= \frac{1}{MN} [-\partial_t (\mathfrak{c}M) + N^j \partial_j (\mathfrak{c}M)] k_b - \partial_j \ln (\mathfrak{c}M) G_b^i \\ &= \frac{1}{MN} [-\partial_t (\mathfrak{c}M) + N^a D_a (\mathfrak{c}M)] k_b - D_b \ln (\mathfrak{c}M) . \end{aligned}$$

Összehasonlítva (3.7) kifejezéssel, kapjuk, hogy

$$\mathbf{b}_b = -D_b \ln (\mathfrak{c}M) , \quad (5.9)$$

$$\mathcal{K}^* = \frac{1}{MN} [\partial_t (\mathfrak{c}M) - N^a D_a (\mathfrak{c}M)] . \quad (5.10)$$

5.3.2. A normális fundamentális formák kapcsolata a koordinátade-riváltakkal

Ehhez az alábbiakat számoljuk:

$$n^c \tilde{\nabla}_c m_b = \tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{n}} \mathbf{m}) f_b^{\mathbf{A}} = \tilde{g}([f_{\mathbf{A}}, \mathbf{n}], \mathbf{m}) f_b^{\mathbf{A}} - \tilde{g}(\mathbf{m}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}} \mathbf{n}) f_b^{\mathbf{A}}, \quad (5.11)$$

valamint

$$l^c \tilde{\nabla}_c k_b = \tilde{g}(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{l}} \mathbf{k}) g_b^{\mathbf{A}} = \tilde{g}([g_{\mathbf{A}}, \mathbf{l}], \mathbf{k}) g_b^{\mathbf{A}} - \tilde{g}(\mathbf{k}, \tilde{\nabla}_{g_{\mathbf{A}}} \mathbf{l}) g_b^{\mathbf{A}} \quad (5.12)$$

kifejezéseket. Ezek első tagjának számolása az előző alfejezetben ismertetett módszer szerint történik, az eredmény a következő:

$$\begin{aligned} \tilde{g}([f_{\mathbf{A}}, \mathbf{n}], \mathbf{m}) f_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}([\mathbf{m}, \mathbf{n}], \mathbf{m}) m_b + \tilde{g}([F_i, \mathbf{n}], \mathbf{m}) F_b^i \\ &= -\frac{1}{MN} [-\partial_t M + \partial_\chi \mathcal{N} + N^j \partial_j M - M^j \partial_j \mathcal{N}] m_b - \frac{M}{N} \partial_i \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) F_b^i \\ &= \frac{1}{MN} [\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}] m_b - \frac{M}{N} D_b \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}([g_{\mathbf{A}}, \mathbf{l}], \mathbf{k}) g_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}([\mathbf{k}, \mathbf{l}], \mathbf{k}) k_b + \tilde{g}([G_i, \mathbf{l}], \mathbf{k}) G_b^i \\ &= -\left\{ \partial_t \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) - N^j \partial_j \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) + \frac{\mathfrak{s}}{N} [\partial_t \ln(MN) - N^j \partial_j \ln(MN)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{cM} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{c} \right) - M^j \partial_j \ln \left(\frac{N}{c} \right) \right] \right\} k_b - \frac{N}{c^2 M} \partial_i \left(\frac{\mathfrak{s}cM}{N} \right) G_b^i \\ &= -\left\{ \mathcal{S} + \frac{1}{cM} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{c} \right) - M^a D_a \ln \left(\frac{N}{c} \right) \right] \right\} k_b - \frac{N}{c^2 M} D_b \left(\frac{\mathfrak{s}cM}{N} \right). \end{aligned}$$

A (5.11) és (5.12) jobb oldalainak második tagjait pedig a következőképpen alakítjuk:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\mathbf{m}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}} \mathbf{n}) f_b^{\mathbf{A}} &= \left(\tilde{g}_{ad} m^a \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}} n^d \right) f_b^{\mathbf{A}} = \left(m^a f_{\mathbf{A}}^c \tilde{\nabla}_c n_a \right) f_b^{\mathbf{A}} \\ &= \left(m^a n^c \tilde{\nabla}_c n_a \right) \bar{n}_b + \left(m^a m^c \tilde{\nabla}_c n_a \right) \bar{m}_b + \left(m^a F_i^c \tilde{\nabla}_c n_a \right) F_b^i \\ &= -\left(m^a n^c \tilde{\nabla}_c n_a \right) n_b + \left(m^a m^c \tilde{\nabla}_c n_a \right) m_b + \left(m^a F_i^c \tilde{\nabla}_c n_a \right) F_b^i \\ &= \left(n^a n^c \tilde{\nabla}_c m_a \right) \bar{n}_b + \left(m^a m^c \tilde{\nabla}_c n_a \right) m_b + \left(m^a F_i^c \tilde{\nabla}_c n_a \right) F_b^i \\ &= \mathcal{L}^* n_b + \mathcal{K} m_b + \mathcal{K}_b, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\mathbf{k}, \tilde{\nabla}_{g_{\mathbf{A}}} \mathbf{l}) g_b^{\mathbf{A}} &= \left(\tilde{g}_{ad} k^a \tilde{\nabla}_{g_{\mathbf{A}}} l^d \right) g_b^{\mathbf{A}} = \left(k^a g_{\mathbf{A}}^c \tilde{\nabla}_c l_a \right) g_b^{\mathbf{A}} \\ &= \left(k^a k^c \tilde{\nabla}_c l_a \right) \bar{k}_b + \left(k^a l^c \tilde{\nabla}_c l_a \right) \bar{l}_b + \left(k^a G_i^c \tilde{\nabla}_c l_a \right) G_b^i \\ &= -\left(k^a k^c \tilde{\nabla}_c l_a \right) k_b + \left(k^a l^c \tilde{\nabla}_c l_a \right) l_b + \left(k^a G_i^c \tilde{\nabla}_c l_a \right) G_b^i \\ &= -\left(k^a k^c \tilde{\nabla}_c l_a \right) k_b - \left(l^a l^c \tilde{\nabla}_c k_a \right) l_b + \left(k^a G_i^c \tilde{\nabla}_c l_a \right) G_b^i \\ &= -\mathcal{L} k_b - \mathcal{K}^* l_b - \mathcal{L}_b. \end{aligned}$$

Tehát (5.11) és (5.12) a következő alakú:

$$\begin{aligned} n^c \tilde{\nabla}_c m_b &= -\mathcal{L}^* n_b + \left\{ \frac{1}{MN} [\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}] - \mathcal{K} \right\} m_b \\ &\quad - \frac{M}{N} D_b \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) - \mathcal{K}_b, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} l^c \tilde{\nabla}_c k_b &= - \left\{ \mathcal{S} + \frac{1}{cM} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{c} \right) - M^a D_a \ln \left(\frac{N}{c} \right) \right] \right\} k_b + \mathcal{L} k_b \\ &\quad + \mathcal{K}^* l_b - \frac{N}{c^2 M} D_b \left(\frac{scM}{N} \right) + \mathcal{L}_b. \end{aligned} \quad (5.14)$$

A $\Sigma_{t\chi}$ -re eső komponensekből kapjuk, hogy:

$$\mathcal{L}_a^* = -g_a^b n^c \tilde{\nabla}_c m_b = \mathcal{K}_a + \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right), \quad (5.15)$$

$$\mathcal{K}_a^* = g_a^b l^c \tilde{\nabla}_c k_b = \mathcal{L}_a - \frac{N}{c^2 M} D_a \left(\frac{scM}{N} \right). \quad (5.16)$$

Az n^b , illetve k^b irányú komponensekből kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= n^b n^c \tilde{\nabla}_c m_b = \mathcal{L}^*, \\ 0 &= k^b l^c \tilde{\nabla}_c k_b = -\mathcal{L} - \left\{ \mathcal{S} + \frac{1}{cM} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{c} \right) - M^a D_a \ln \left(\frac{N}{c} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

A (5.8) összefüggés figyelembevételét követően mindkét fenti összefüggés azonosság, nem adnak új információt. Végül (5.13) és (5.14) m^b , illetve l^b irányú komponenseiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= m^b n^c \tilde{\nabla}_c m_b = -\mathcal{K} + \frac{1}{MN} [\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}], \\ \mathcal{K}^* &= l^b l^c \tilde{\nabla}_c k_b = \mathcal{K}^*, \end{aligned}$$

melyek (5.5) figyelembevételével ismét azonosságok.

5.4. A normális fundamentális vektorok kapcsolata a koordinátaderiváltakkal

A \mathcal{K}_a normális fundamentális vektort koordinátaderiváltakkal vett kifejezését megkapjuk a megfelelő Lie-zárójel felhasználásával :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_a &= g_{ad} m^c \nabla_c n^d = g_{ad} \left(-[m, n]^d + n^c \tilde{\nabla}_c m^d \right) = -g_{ad} [m, n]^d + g_{ad} n^c \tilde{\nabla}_c m^d \\ &= -g_{ad} [m, n]^d - \mathcal{L}_a^* = -g_{ad} [m, n]^d - \mathcal{K}_a - \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) \\ &= -g_{ad} \frac{1}{MN} \left(-\partial_t M^d + \partial_\chi N^d + N^j \partial_j M^d - M^j \partial_j N^d \right) - \mathcal{K}_a - \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) \\ &= \frac{1}{MN} \left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^j \partial_j M_a + M^j \partial_j N_a \right) - \mathcal{K}_a - \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right), \end{aligned}$$

azaz

$$\mathcal{K}_a = \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) - \frac{M}{2N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) .$$

Az \mathcal{L}_a kapcsolatát a koordinátaderiváltakkal hasonlóan adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a &= -g_{ad} k^c \tilde{\nabla}_c m^d = -g_{ad} \left([k, l]^d + l^c \tilde{\nabla}_c k^d \right) \\ &= -g_{ad} [k, l]^d - g_{ad} l^c \tilde{\nabla}_c k^d = -g_{ad} [k, l]^d - \mathcal{K}_a^* \\ &= -g_{ad} [k, l]^d - \mathcal{L}_a + \frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}cM}{N} \right) \\ &= \frac{1}{MN} (\partial_t M^a - \partial_\chi N^a + M^j \partial_j N^d - N^j \partial_j M^d) - \mathcal{L}_a + \frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}cM}{N} \right) , \end{aligned}$$

azaz

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) + \frac{N}{2\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}cM}{N} \right)$$

alakú. Ugyanezt kapjuk a korábban levezetett $\mathcal{L}_a = \mathcal{K}_a + D_a \phi$ összefüggés felhasználásával is.

A \mathcal{K}_a^* és \mathcal{L}_a , valamint a \mathcal{L}_a^* és \mathcal{K}_a közötti (5.16) és (5.15) kifejezésekből koordinátaderiváltakkal megadhatjuk a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_a^* &= \mathcal{L}_a - \frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}cM}{N} \right) \\ &= \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) - \frac{N}{2\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}cM}{N} \right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a^* &= \mathcal{K}_a + \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) \\ &= \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) + \frac{M}{2N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) \end{aligned}$$

kifejezéseket is.

5.5. Összefoglalás

A geometriai mennyiségek (külső görbületek, normális fundamentális formák és skalárok, illetve a gyorsulások) kapcsolatát a metrikus változók t és χ deriváltjaival az alábbi négy táblázatban foglaljuk össze.

A külső görbületek és koordináta- illetve $\Sigma_{t\chi}$ menti kovariáns deriváltak kapcsolata:

$K_{ab} = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] - \frac{\mathfrak{s}}{M\mathfrak{c}} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right]$
$L_{ab} = \frac{\mathfrak{s}}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] + \frac{1}{M\mathfrak{c}} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right]$
$K_{ab}^* = \frac{\mathfrak{c}}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right]$
$L_{ab}^* = \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right]$

A normális fundamentális formák és koordináta- illetve $\Sigma_{t\chi}$ menti kovariáns deriváltak kapcsolata:

$\mathcal{K}_a = \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) - \frac{M}{2N} D_a \left(\frac{N}{M} \right)$
$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) + \frac{N}{2c^2 M} D_a \left(\frac{cM}{N} \right)$
$\mathcal{K}_a^* = \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) - \frac{N}{2c^2 M} D_a \left(\frac{cM}{N} \right)$
$\mathcal{L}_a^* = \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) + \frac{M}{2N} D_a \left(\frac{N}{M} \right)$

A normális fundamentális skalárok és koordináta- illetve $\Sigma_{t\chi}$ menti kovariáns deriváltak kapcsolata:

$\mathcal{K} = \frac{1}{MN} [\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}]$
$\mathcal{L} = -\mathcal{S} - \frac{1}{cM} [\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{c} \right) - M^a D_a \ln \left(\frac{N}{c} \right)]$
$\mathcal{K}^* = \frac{1}{MN} [\partial_t (cM) - N^a D_a (cM)]$
$\mathcal{L}^* = -\frac{1}{M} [\partial_\chi (\ln N) - M^a D_a (\ln N)]$

A gyorsulások és $\Sigma_{t\chi}$ menti kovariáns deriváltak kapcsolata:

$\mathbf{a}_b = D_b (\ln N)$
$\mathbf{b}_b = -D_b \ln (cM)$
$\mathbf{a}_b^* = D_b \left(\ln \frac{N}{c} \right)$
$\mathbf{b}_b^* = -D_b (\ln M)$

6. fejezet

Gravitációs dinamika

Az általános relativitáselméletben a gravitáció dinamikáját az Einstein-egyenlet adja meg. Utóbbi származtatható az

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} \quad (6.1)$$

Einstein-Hilbert hatásból, variációs elv felhasználásával. Az ADM formalizmusban első lépésként a hatás 3+1 felbontását hajtják végre. Ebben a fejezetben elvégzem a gravitációs hatás 2+1+1 felbontását.

6.1. A Gauss-azonosság

A Gauss-azonosság teremt kapcsolatot a teljes téridő \tilde{R}_{abcd} Riemann-tenzora és esetünkben a 2-dimenziós $\Sigma_{t\chi}$ felület R_{abcd} Riemann-tenzora között. Levezetéséhez a teljes téridő Riemann-tenzorát az $f_{\mathbf{A}} = \{n, m, F_i\}$ bázisban érdemes felbontani.

Elsőként felhasználjuk a R_{abcd} Riemann-tenzor definícióját, mint a kovariáns deriváltak nemkommutálásának mértékét egy tetszőleges $V^a \in T\Sigma_{t\chi}$ kétdimenziós vektorra:

$$\begin{aligned} R_{abcd}V^b &= (D_c D_d - D_d D_c)V_a \\ &= g_c^i g_d^j g_a^k \tilde{\nabla}_i (g_j^m g_k^n \tilde{\nabla}_m V_n) - g_d^i g_c^j g_a^k \tilde{\nabla}_i (g_j^m g_k^n \tilde{\nabla}_m V_n) \\ &= g_c^i g_d^m g_a^n \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_m V_n + g_c^i g_d^m g_a^k \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i g_k^n + g_c^i g_d^j g_a^n \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i g_j^m - \\ &\quad g_d^i g_c^m g_a^n \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_m V_n - g_d^i g_c^m g_a^k \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i g_k^n - g_d^i g_c^j g_a^n \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i g_j^m \\ &= g_c^i g_d^m g_a^n \left(\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_m V_n - \tilde{\nabla}_m \tilde{\nabla}_i V_n \right) + g_c^i g_d^m g_a^k \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i (\tilde{g}_k^n + n^n n_k - m^n m_k) + \\ &\quad g_c^i g_d^j g_a^n \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i (\tilde{g}_j^m + n^m n_j - m^m m_j) - g_d^i g_c^m g_a^k \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i (\tilde{g}_k^n + n^n n_k - m^n m_k) - \\ &\quad g_d^i g_c^j g_a^n \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i (\tilde{g}_j^m + n^m n_j - m^m m_j) \\ &= g_c^i g_d^m g_a^n \left(\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_m V_n - \tilde{\nabla}_m \tilde{\nabla}_i V_n \right) + g_c^i g_d^m g_a^k n^n \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i n_k - g_c^i g_d^m g_a^k m^n \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i m_k + \\ &\quad g_c^i g_d^j g_a^n n^m \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i n_j - g_c^i g_d^j g_a^m m^n \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i m_j - \\ &\quad g_d^i g_c^m g_a^n n^k \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i n_k + g_d^i g_c^m g_a^k m^n \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i m_k - \\ &\quad g_d^i g_c^j g_a^n m^m \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i n_j + g_d^i g_c^j g_a^m m^n \tilde{\nabla}_m V_n \tilde{\nabla}_i m_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g_c^i g_d^m g_a^n \left(\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_m V_n - \tilde{\nabla}_m \tilde{\nabla}_i V_n \right) + 2g_{[c}^i g_{d]}^j \tilde{\nabla}_i n_j g_a^n n^m \tilde{\nabla}_m V_n - g_{[c}^i g_{d]}^j \tilde{\nabla}_i m_j g_a^n m^m \tilde{\nabla}_m V_n + \\
&\quad \left(g_c^m n^n \tilde{\nabla}_m V_n \right) \left(g_c^i g_a^k \tilde{\nabla}_i n_k \right) - \left(g_c^m n^n \tilde{\nabla}_m V_n \right) \left(g_d^i g_a^k \tilde{\nabla}_i n_k \right) \\
&\quad - \left(g_c^m n^n \tilde{\nabla}_m V_n \right) \left(g_d^i g_a^k \tilde{\nabla}_i n_k \right) + \left(g_c^m n^n \tilde{\nabla}_m V_n \right) \left(g_d^i g_a^k \tilde{\nabla}_i m_k \right) \\
&= g_c^i g_d^m g_a^n \tilde{R}_{nsim} V^s + 2 \left(L_{a[c}^* L_{d]b}^* - K_{a[c} K_{d]b} \right) V^b .
\end{aligned}$$

A kapott összefüggés a Gauss-azonosság:

$$R_{abcd} = g_a^i g_b^l g_c^k g_d^m \tilde{R}_{ijkl} + 2 \left(L_{a[c}^* L_{d]b}^* - K_{a[c} K_{d]b} \right) , \quad (6.2)$$

mely kapcsolatot teremt a kétdimenziós felület Riemann-tenzora és külső görbületei, valamint a teljes téridő Riemann-tenzora között.

Gauss eredetileg ennek az összefüggésnek azt a speciális esetét írta fel, ami az euklideszi tér ($\tilde{R}_{ijkl} = 0$) 2+1 felbontására vonatkozik (azaz nem volt benne L_{ac}^*), vagyis az euklideszi térbe ágyazott felületek külső és belső görbületei között talált összefüggést (két dimenzióban a Riemann-tenzor egyetlen független komponessel rendelkezik, ez a Gauss-görbülettel hozható kapcsolatba). Gauss bizonyította be elsőként, hogy a Gauss-görbület csak a metrika függvénye, ezt az eredményét „Theorema Egregium”-nak (figyelemreméltó tételnek) nevezte. A tétel következménye, hogy a külső görbületek nem változtathatók tetszőlegesen, mint ahogy azt a (6.2) összefüggés mutatja.

6.2. A kétszer kontrahált Gauss-azonosság

A (6.2) összefüggés első kontrakciója

$$R_{bd} = g^{ik} g_b^j g_d^l \tilde{R}_{ijkl} + L^* L_{db}^* - K K_{bd} - L_{ad}^* L_b^{*a} + K_{ad} K_b^a , \quad (6.3)$$

míg második kontrakciója a

$$R = g^{ik} g^{jl} \tilde{R}_{ijkl} + (L^*)^2 - K^2 - L_{ab}^* L^{*ab} + K_{ab} K^{ab} \quad (6.4)$$

összefüggést adja. Itt K és L^* rendre a K_{ab} és L_{ab}^* spúrját jelöli. A kétszer kontrahált Gauss-azonosság 2+1+1 alakba írásához szükséges még a 4-dimenziós Riemann-tenzor 2+1+1 felbontása is:

$$\begin{aligned}
g^{ik} g^{jl} \tilde{R}_{ijkl} &= (\tilde{g}^{ik} + n^i n^k - m^i m^k) (\tilde{g}^{jl} + n^j n^l - m^j m^l) \tilde{R}_{ijkl} \\
&= \tilde{R} + 2 (n^j n^l - m^j m^l) \tilde{R}_{jl} - 2 n^i m^j n^k m^l \tilde{R}_{ijkl} .
\end{aligned} \quad (6.5)$$

A szükséges Ricci- és Riemann-tenzor projekciók 2+1+1 felbontása következőképpen történik:

$$\begin{aligned}
m^i n^j n^k m^l \tilde{R}_{ijkl} &= m^i n^k m^l \left(\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_l - \tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_k \right) n_i = m^i n^k m^l \left(\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_l n_i - \tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_k n_i \right) \\
&= m^i n^k m^l \tilde{\nabla}_k (K_{li} + m_l \mathcal{K}_i + m_i \mathcal{K}_l + m_l m_i \mathcal{K} - n_l \mathbf{a}_i + n_l m_i \mathcal{L}^*) \\
&\quad - m^i n^k m^l \tilde{\nabla}_l (K_{ki} + m_k \mathcal{K}_i + m_i \mathcal{K}_k + m_k m_i \mathcal{K} - n_k \mathbf{a}_i + n_k m_i \mathcal{L}^*) \\
&= m^i n^k \tilde{\nabla}_k \mathcal{K}_i + n^k m^l \tilde{\nabla}_k \mathcal{K}_l + n^k \tilde{\nabla}_k \mathcal{K} + \mathcal{L}^* n^k m^l \tilde{\nabla}_k n_l \\
&\quad - n^k m^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{K}_k + \mathcal{K} m_k m^l \tilde{\nabla}_l n^k - m^i m^l \tilde{\nabla}_l \mathbf{a}_i + m^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{L}^* \\
&= -\mathcal{K}^i n^k \tilde{\nabla}_k m_i - \mathcal{K}_l n^k \tilde{\nabla}_k m^l + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - (\mathcal{L}^*)^2 \\
&\quad + \mathcal{K}_k m^l \tilde{\nabla}_l n^k + (\mathcal{K})^2 + \mathbf{a}^i m^l \tilde{\nabla}_l m_i + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* \\
&= \mathcal{K}^k (2\mathcal{L}_k^* + \mathcal{K}_k) - (\mathcal{L}^*)^2 + (\mathcal{K})^2 + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} + \mathbf{a}^i \mathbf{b}_i^*, \tag{6.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n^j n^l \tilde{R}_{jl} &= n^j n^l \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ajbl} = \tilde{g}^{ab} n^l \left(\tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_l - \tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_b \right) n_a \\
&= \tilde{g}^{ab} n^l \tilde{\nabla}_b (K_{la} + m_l \mathcal{K}_a + m_l \mathcal{K}_a + m_l m_a \mathcal{K} - n_l \mathbf{a}_a + n_l m_a \mathcal{L}^*) \\
&\quad - \tilde{g}^{ab} n^l \tilde{\nabla}_l (K_{ba} + m_b \mathcal{K}_a + m_b \mathcal{K}_a + m_b m_a \mathcal{K} - n_b \mathbf{a}_a + n_b m_a \mathcal{L}^*) \\
&= -K^{lb} \tilde{\nabla}_b n_l - \mathcal{K}^b m^l \tilde{\nabla}_b n_l - \mathcal{K}^b m^l \tilde{\nabla}_b n_l - \mathcal{K} m^l m^b \tilde{\nabla}_b n_l + \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b \mathbf{a}_a \\
&\quad - m^b \tilde{\nabla}_b \mathcal{L}^* - \mathcal{L}^* \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b m_a - n^l \tilde{\nabla}_l K - m^a n^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{K}_a - \mathcal{K}^b n^l \tilde{\nabla}_l m_b \\
&\quad - \mathcal{K}^b n^l \tilde{\nabla}_l m_b - m^a n^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{K}_a - \mathcal{K} m^a n^l \tilde{\nabla}_l m_a - \mathcal{K} m^b n^l \tilde{\nabla}_l m_b \\
&\quad - n^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{K} + \mathbf{a}^b n^l \tilde{\nabla}_l n_b - \mathbf{a}^a n^l \tilde{\nabla}_l n_a + \mathcal{L}^* n_b n^l \tilde{\nabla}_l m^b - \mathcal{L}^* n^a n^l \tilde{\nabla}_l m_a \\
&= -K^{lb} K_{bl} - 2\mathcal{K}^b \mathcal{K}_b - (\mathcal{K})^2 + (\mathcal{L}^*)^2 - \mathcal{L}^* L^* \\
&\quad - \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* - \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} K - \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} + \tilde{\nabla}_b \mathbf{a}^b, \tag{6.7}
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
m^j m^l \tilde{R}_{jl} &= m^j m^l \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ajbl} = \tilde{g}^{ab} m^l \left(\tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_l - \tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_b \right) m_a \\
&= \tilde{g}^{ab} m^l \tilde{\nabla}_b (L_{la}^* + n_l \mathcal{L}_a^* + n_a \mathcal{K}_l + n_l n_a \mathcal{L}^* + m_l (\mathbf{b}_a^* + n_a \mathcal{K})) \\
&\quad - \tilde{g}^{ab} m^l \tilde{\nabla}_l (L_{ba}^* + n_b \mathcal{L}_a^* + n_a \mathcal{K}_b + n_b n_a \mathcal{L}^* + m_b (\mathbf{b}_a^* + n_a \mathcal{K})) \\
&= m^l \tilde{\nabla}_b [L_l^{*b} + n_l \mathcal{L}^{*b} + n^b \mathcal{K}_l + n_l n^b \mathcal{L}^* + m_l (\mathbf{b}^{*b} + n^b \mathcal{K})] \\
&\quad - m^l \tilde{\nabla}_l (L^* - \mathcal{L}^*) \\
&= -L^{*lb} \tilde{\nabla}_b m_l + \mathcal{L}^{*b} \mathcal{K}_b - \mathcal{K}_l n^b \tilde{\nabla}_b m^l - \mathcal{L}^* n^b n^l \tilde{\nabla}_b m_l \\
&\quad + \tilde{\nabla}_b \mathbf{b}^{*b} + \mathcal{K} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b n_a + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} L^* + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* \\
&= -L^{*lb} L_{bl}^* + 2\mathcal{K}_l \mathcal{L}^{*l} - (\mathcal{L}^*)^2 + (\mathcal{K})^2 + \mathcal{K} K \\
&\quad + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} L^* + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* + \tilde{\nabla}_b \mathbf{b}^{*b}. \tag{6.8}
\end{aligned}$$

Az $\mathbf{a}_b = D_b(\ln N)$ és $\mathbf{b}_b^* = -D_b(\ln M)$ korábban már levezetett összefüggéseket használjuk az $\mathbf{a}^i \mathbf{b}_i^*$, $\tilde{\nabla}_b \mathbf{a}^b$ és $\tilde{\nabla}_b \mathbf{b}^{*b}$ tagokban, utóbbiak explicit alakja

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_b \mathbf{a}^{*b} &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b \mathbf{a}_a = (g^{ab} - n^a n^b + m^a m^b) \tilde{\nabla}_b \mathbf{a}_a \\
&= D_a \mathbf{a}^a + \mathbf{a}^a (\mathbf{a}_a - \mathbf{b}_a^*) = D_a D^a (\ln N) + D^a (\ln N) D_a (\ln NM) \\
&= D_a \left(\frac{D^a N}{N} \right) + \frac{D^a N}{N} \frac{M D_a N + N D_a M}{NM} \\
&= \frac{D_a D^a N}{N} + \frac{D^a N D_a M}{NM},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_b \mathbf{b}^{*b} &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b \mathbf{b}_a^* = (g^{ab} - n^a n^b + m^a m^b) \tilde{\nabla}_b \mathbf{b}_a^* \\
&= D_a \mathbf{b}^{*a} + \mathbf{b}^{*a} (\mathbf{a}_a - \mathbf{b}_a^*) \\
&= -D_a D^a (\ln M) - D^a (\ln M) [D_a (\ln N) + D_a (\ln M)] \\
&= \frac{D_a M D^a M}{M^2} - \frac{D_a D^a M}{M} - \frac{D^a M D_a N}{NM} - \frac{D_a M D^a M}{M^2} \\
&= - \left(\frac{D_a D^a M}{M} + \frac{D^a M D_a N}{NM} \right).
\end{aligned}$$

Ezeket visszaírva a (6.6), (6.7) és (6.8) egyenletekbe az

$$\begin{aligned}
m^i n^j n^k m^l \tilde{R}_{ijkl} &= \mathcal{K}^k (2\mathcal{L}_k^* + \mathcal{K}_k) - (\mathcal{L}^*)^2 + (\mathcal{K})^2 + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - D^i (\ln N) D_i (\ln M), \\
n^j n^l \tilde{R}_{jl} &= -K^{lb} K_{bl} - \mathcal{L}^* L^* - 2\mathcal{K}^b \mathcal{K}_b - (\mathcal{K})^2 + (\mathcal{L}^*)^2 - \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* \\
&\quad + \frac{D_a D^a N}{N} + \frac{D^a N D_a M}{NM}, \\
m^j m^l \tilde{R}_{jl} &= -L^{*lb} L_{bl}^* + 2\mathcal{K}_l \mathcal{L}^{*l} - (\mathcal{L}^*)^2 + (\mathcal{K})^2 + \mathcal{K} \mathcal{K} + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} L^* + \tilde{\mathcal{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* \\
&\quad - \left(\frac{D_a D^a M}{M} + \frac{D^a M D_a N}{NM} \right) \tag{6.9}
\end{aligned}$$

összefüggéseket kapjuk. Megjegyezzük még, hogy a projekciók számolásánál felhasználtuk a

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a n^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a n_b = K + \mathcal{K}, \\
\tilde{\nabla}_a m^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a m_b = L^* - \mathcal{L}^*
\end{aligned}$$

összefüggéseket.

A (6.4), (6.5) és (6.9) összefüggésekből

$$\begin{aligned}
R &= \tilde{R} + 2n^j n^l \tilde{R}_{jl} - 2m^j m^l \tilde{R}_{jl} + 2m^i n^j n^k m^l \tilde{R}_{ijkl} + (L^*)^2 - (K^*)^2 - L_{ab}^* L^{*ab} + K_{ab} K^{ab} \\
&= \tilde{R} + (L^*)^2 - K^2 - L_{ab}^* L^{*ab} + K_{ab} K^{ab} \\
&\quad - 2K^{lb} K_{bl} - 2\mathcal{L}^* L^* - 4\mathcal{K}^b \mathcal{K}_b - 2(\mathcal{K})^2 + 2(\mathcal{L}^*)^2 - 2\tilde{\mathcal{L}}_n K - 2\tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{K} - 2\tilde{\mathcal{L}}_m \mathcal{L}^* \\
&\quad + 2\frac{D_a D^a N}{N} + 2\frac{D^a N D_a M}{NM} \\
&\quad + 2L^{*lb} L_{bl}^* - 4\mathcal{K}_l \mathcal{L}^{*l} + 2(\mathcal{L}^*)^2 - 2(\mathcal{K})^2 - 2\mathcal{K}K - 2\tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{K} + 2\tilde{\mathcal{L}}_m L^* - 2\tilde{\mathcal{L}}_m \mathcal{L}^* \\
&\quad + 2\frac{D_a D^a M}{M} + 2\frac{D^a M D_a N}{NM} \\
&\quad + 4\mathcal{K}^k \mathcal{L}_k^* + 2\mathcal{K}^k \mathcal{K}_k - 2(\mathcal{L}^*)^2 + 2(\mathcal{K})^2 + 2\tilde{\mathcal{L}}_m \mathcal{L}^* + 2\tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{K} - 2D^i(\ln N) D_i(\ln M) \\
&= \tilde{R} + (L^*)^2 - K^2 + L_{ab}^* L^{*ab} - K_{ab} K^{ab} - 2\mathcal{K}^b \mathcal{K}_b - 2\mathcal{K}(K - \mathcal{K}) + 2\mathcal{L}^*(\mathcal{L}^* - L^*) \\
&\quad - 2\tilde{\mathcal{L}}_n(K + \mathcal{K}) + 2\tilde{\mathcal{L}}_m(L^* - \mathcal{L}^*) + 2\left[\frac{D_a D^a N}{N} + \frac{D_a D^a M}{M} + \frac{D^a M D_a N}{NM}\right]
\end{aligned}$$

azaz a keresett kétszer kontrahált Gauss összefüggés:

$$\begin{aligned}
R &= \tilde{R} - K^2 - K_{ab} K^{ab} + (L^*)^2 + L_{ab}^* L^{*ab} - 2\mathcal{K}^b \mathcal{K}_b - 2\mathcal{K}(K - \mathcal{K}) + 2\mathcal{L}^*(\mathcal{L}^* - L^*) \\
&\quad - 2\tilde{\mathcal{L}}_n(K + \mathcal{K}) + 2\tilde{\mathcal{L}}_m(L^* - \mathcal{L}^*) + 2\left[\frac{D_a D^a N}{N} + \frac{D_a D^a M}{M} + \frac{D^a M D_a N}{NM}\right]. \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Ezzel általánosítottuk a [8, 9]-ben levezetett kétszer kontrahált Gauss-összefüggést.

Merőleges fóliázások határesetében a [8, 9]-ben levezetett kétszer kontrahált Gauss-összefüggést kell visszakapnunk, azonban az $(L_{ab}^* L^{*ab} - K_{ab} K^{ab})$ kombináció előjele nálunk +1, a korábban publikált -3 helyett. Az ellenőrző számolások megerősítették a jelenlegi eredmény helyességét.

6.3. Az Einstein-Hilbert hatás 2+1+1 felbontása

A (6.1) hatásban szereplő görbületi skalár 2+1+1 felbontását az előző alfejezetben végeztem el. A teljes felbontáshoz szükséges még a $\sqrt{-\tilde{g}}$ felbontása. Ezt a [8] függelékében levezették, alakja nem változik a kettős fóliázás nemmerőleges jellege miatt: $\sqrt{-\tilde{g}} = NM\sqrt{g}$. Így az Einstein-Hilbert hatás

$$\begin{aligned}
S_{EH} &= S_{EH}[\{g_{ab}, M^a, M\}; \{K_{ab}, \mathcal{K}^a, \mathcal{K}\}; \{L_{ab}^*, \mathcal{L}^*\}; \{N, N^a, \mathcal{N}\}] \\
&= \int dt \int d\chi \int_{\Sigma_{t\chi}} d^2x NM\sqrt{g} \{R + K^2 + K_{ab} K^{ab} - (L^*)^2 - L_{ab}^* L^{*ab} \\
&\quad + 2\mathcal{K}^a \mathcal{K}_a + 2\mathcal{K}(K - \mathcal{K}) - 2\mathcal{L}^*(\mathcal{L}^* - L^*) + 2\tilde{\mathcal{L}}_n(K + \mathcal{K}) - 2\tilde{\mathcal{L}}_m(L^* - \mathcal{L}^*) \\
&\quad - 2[N^{-1} D_a D^a N + M^{-1} D_a D^a M + (NM)^{-1} D^a M D_a N]\} \quad (6.11)
\end{aligned}$$

alakot ölti. Ebben a hatásban kizárólag a $\Sigma_{t\chi}$ -n értelmezett tenzorok, vektorok és skalárok szerepelnek. Az S_{EH} hatás argumentumai közül $\{g_{ab}, M^a, M\}$ általánosított koordináták, $\{K_{ab}, \mathcal{K}^a, \mathcal{K}\}$ általánosított sebességek, $\{L_{ab}^*, \mathcal{L}^*\}$ általánosított koordináták χ -deriváltjainak szerepét töltik be. Akár a 3+1 felbontásban, $\{N, N^a, \mathcal{N}\}$ időderiváltjai nem szerepelnek a hatásban, és várhatóan itt is a hamiltoni formalizmusra való áttérés során Lagrange-szorzó szerepét töltik majd be.

7. fejezet

Összefoglalás és kitekintés

Az általános relativitáselmélet görbült téridejében a gravitációs hullámok fénysebességgel (határsebességgel) terjednek, kijavítva a gravitáció newtoni leírását. Valahányszor adott vonatkoztatási rendszerben végzünk méréseket, szükségessé válik az idő kitüntetett kezelése. A téridő 3+1 felbontásában, a gravitáció ún. ADM formalizmusában [1] az állandó idejű 3-dimenziós hiperfelületek serege fóliázást alkot. Ha egy térdimenzió is speciális szerepet tölt be, indokolttá válik a téridő 2+1+1 felbontása. Ez lehetséges a kiválasztott idő- és térszerű kongruenciák optikai skalárjainak (örvény, nyírás, expanzió) bevonásával, mint a [7] munkában tárgyalt gravitációs hullámok tárgyalásakor. Ismert olyan formalizmus is, melyben a felbontást merőleges kettős fóliázás biztosítja [8, 9]. Az utóbbit a gömbszimmetrikus téridő-perturbációk páratlan szektorának vizsgálatakor használták [10] a sötét anyag és energia motiválta skalár-tenzor gravitációelméletekben.

Itt említjük meg a [11, 12] munkákban kidolgozott formalizmust is, melyben egy \mathcal{H} fóliázást tovább fóliáztak térszerű S_t felületekkel (a mi jelölésünkben ez $\Sigma_{t\chi}$ -nek felel meg), és szintén használták a normális fundamentál forma fogalmát S_t beágyazásának jellemzésére. A formalizmust térszerű \mathcal{H} esetén a fekete lyukak dinamikus horizontjának tanulmányozására használták [13, 14, 15], fényszerű \mathcal{H} esetén segítségével levezették a horizonton érvényes Damour-Navier-Stokes egyenletet [16, 17, 18], míg időszerű \mathcal{H} esetén az impulzusmomentum értelmezésében játszott szerepet [19].

A jelen dolgozat célja a [8, 9]-ben kidolgozott formalizmus olyan általánosítása volt, mely a páros szektor elemzéséhez szükséges, ahol a mértékszabadság nem használható fel egy metrikus változó eltüntetésére. Az új formalizmusban a korábbi 9 helyett 10 metrikus változó szerepel. A [8, 9]-cel ellentétben ezt úgy valósítottuk meg, hogy a két fóliázás nem merőleges, és két ortonormált bázist határoznak meg.

Az ADM formalizmusban a hiperfelület indukált metrikája és külső görbülete hamiltoni értelemben vett koordináta és impulzus szerepét töltik be. A dolgozatban meghatároztam a kétféle fóliázást jellemző geometriai mennyiségek közül azokat (K_{ab} , \mathcal{K}_a , \mathcal{K}), melyek a metrikus változók időderiváltjaival állnak kapcsolatban, valamint azokat (L_{ab}^* , \mathcal{L}^*), melyek csak térderiváltjaikat tartalmazzák. Elvégeztem a gravitáció Einstein-Hilbert hatásának 2+1+1 felbontását, felírva a gravitációs hatást ezekben a változóiban. Ennek kapcsán kijavítottam egy együtthatót a görbületi skalár korábban publikált 2+1+1 felbontásában.

Eddigi eredményeinkből látszik, hogy (a merőleges kettős fóliázáshoz hasonlóan) a kano-

nikus koordináták a (g_{ab}, M_a, M) metrikus változók lesznek, kanonikus impulzusaikat pedig a $(K_{ab}, \mathcal{K}_a, \mathcal{K})$ mennyiségek adják meg. Például, ha egy $\partial/\partial\chi$ integrálgörbéi mentén terjedő gravitációs hullámot tekintünk, a kétféle (+ és \times) tranzverzális polarizáció hordozója g_{ab} , míg K_{ab} a gravitációs hullám impulzusát határozza meg.

A merőleges kettős fóliázás esetével ellentétben a kiegészítő (csak térderiváltakat tartalmazó) geometriai mennyiségek nem az időszerű fóliázás normálvektorához tartozó (L_{ab}, \mathcal{L}) geometriai mennyiségek lesznek, hanem a térszerű fóliázás által meghatározott m^a bázisvektorhoz tartozó $(L_{ab}^*, \mathcal{L}^*)$ mennyiségek. A formalizmus tartalmaz még 4 Lagrange-szorzó szerepet betöltő metrikus mennyiséget, ezek (a merőleges kettős fóliázás esetén is megjelenő) N lapse és N^i 2-dimenziós shift vektor, valamint a (korábban nullának választott) harmadik shift-komponens, az \mathcal{N} (vagy az ekvivalens információt hordozó ϕ vagy \mathfrak{s} mennyiségek). Az utóbbi metrikus változóról beláttam, hogy meghatározza 1) a bázisok Lorentz-forgatásának szögét, 2) a bázisvektorok örvényességének mértékét.

Az eddigi eredményekből a közeljövőben publikáció készül. Ez lehetőséget teremt majd a gömbszimmetrikus téridő-perturbációk páros szektorának vizsgára a sötét anyag és energia motiválta skalár-tenzor gravitációelméletekben. Másik alkalmazásként a későbbiekben tervezzük a kidolgozott formalizmus felhasználását a kanonikusan kvantálható hengersizimmetrikus gravitációs hullámok hamiltoni tárgyalására is.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Keresztes Zoltánnak szakmai útmutatásait, az új ismeretek megtanítására szánt idejét és türelmét a dolgozat írásának egész ideje alatt. Köszönöm Dr. Gergely Árpád Lászlónak a remek témát a dolgozatomhoz, mely a kezdetektől mostanáig kíváncsisággal tölt el. Továbbá köszönöm segítségét az előző cikkeinek értelmezéséhez, valamint hogy bármikor lehetett kérdésekkel fordulni hozzá. Köszönöm családomnak, hogy aggódva figyelte végig a munkámat és saját fáradságukat félretéve támogattak, mikor szükségem volt rá.

1. Függelék: A kutatási feladatok

Témavezetőmtől kapott feladatomból volt a [8, 9]-ben kidolgozott formalizmus és abban használt számolási módszerek értelmezése, reprodukálása és olyan általánosítása, mely a gömb-szimmetrikus gravitáció perturbációi közül a páros szektor elemzéséhez szükséges. Utóbbira a [8, 9] formalizmusa nem volt alkalmazható (más célra szükséges mértékszabadságot azonos metrikus változó eltüntetésére használt fel, amely a téridő dupla fóliázásának merőlegességét biztosítja [10]). Az új formalizmusban nem szabtuk ki a fóliázások merőlegességét.

A témámhoz sok új fogalommal kellett megismerkednem, mint az indukált metrika, külső görbület, normális fundamentális forma és skalár, prociált kovariáns- és Lie-deriválás és örvény-tenzor. A dolgozatomban szereplő számolások felét önállóan végeztem el, másik felét közösen végeztük. A dolgozatom eredményeinek helyességét a merőleges határeset segítségével [8, 9] ellenőriztem. Számolásaim figyelembevételével készítettem el a 2.1 ábrát, melyen a $\partial/\partial t$ vektort az \mathfrak{M}_χ érintőjeként ábrázolva, javítottam a [8] 2. ábráját.

Dualitási relációk használatával meghatároztam az \mathcal{S}_t térszerű és \mathfrak{M}_χ időszzerű hiperfelületekhez (metszetük $\Sigma_{t\chi}$) adaptált ortonormált bázisok, valamint a kétszeresen fóliázható téridő érintőterén bevezetett koordinátabázisok közötti összefüggéseket. Felhasználásukkal beláttam, hogy az új formalizmusban 10 gravitációs változó marad, ezek a 4-dimenziós metrika független komponensei. Megállapítottam, hogy a merőleges fóliázáshoz képest megjelenő új metrikus változó, az \mathcal{N} shift-komponens, a téridő dupla fóliázása során használt felületek közötti Lorentz-forgatás szögével áll kapcsolatban. További számolásaim azt mutatták, hogy az új metrikus változó az \mathfrak{M}_χ , illetve az \mathcal{S}_t hiperfelületek $\Sigma_{t\chi}$ -re merőleges időszzerű k^a , illetve térszerű m^a érintőinek 3-dimenziós örvényeiként is interpretálható.

Elvégezve az n^a , m^a , k^a , l^a bázisvektorok kovariáns deriváltjainak felbontását, a [8, 9] cikkekhez képest több geometriai mennyiségeket kaptam. Az új mennyiségek közötti összefüggések meghatározásához a [8] C függelékében található módszert használtam, melynek elsajátításához témavezetőm és Dr. Gergely Árpád László nyújtott segítséget. Bebizonyítottam, hogy az új mennyiségek közül egyesek dinamikai változó szerepet töltenek be (K_{ab}^* , \mathcal{K}_a^* , \mathcal{L}_a^* , \mathcal{K}^*), mások csupán a metrikus változók térbeli deriváltjait tartalmazzák (L_{ab}^* , \mathcal{L}^*). Általánosított koordinátáknak a (g_{ab}, M_a, M) metrikus változókat választva, az általánosított sebességek a $(K_{ab}, \mathcal{K}_a, \mathcal{K})$ kinematikai mennyiségekkel állnak rendre kapcsolatban.

Az Einstein-Hilbert hatás 2+1+1 felbontásához [8, 9] eljárását és témavezetőm útmutatásait követve, kiszámoltam a kétszer kontrahált Gauss összefüggésben szereplő Ricci- és Riemann-tenzor projekciók, majd a görbületi skalár 2+1+1 felbontását (ennek során kijavítottam a [8, 9]-ben megadott egyik együtthatót). Beláttam azt is, hogy az Einstein-Hilbert hatás 2+1+1 felbontásában az N , N^a , \mathcal{N} metrikus változók időderiváltjai nem szerepelnek.

2. Függelék: A Frobenius-tétel és duális alakja

A Frobenius-tétel tárgyalásához először szükségünk van a hiperfelület fogalmának bevezetésére. Ha \mathcal{H} egy p -dimenziós sokaság és megadható egy $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$, C^r leképezés, amely \mathcal{H} és annak $\Phi(\mathcal{H})$ képe között homeomorfizmust létesít (ahol $\Phi(\mathcal{H})$ az \mathcal{M} -ből örökölt altopológiát hordozza), akkor \mathcal{H} -t beágyazott alsokaságnak nevezzük [21]. A [22] terminológiáját követve, a 2- vagy 3-dimenziójú beágyazott alsokaságra felület- illetve hiperfelületként hivatkozok.

Ha az n -dimenziós \mathcal{M} sokaság összes x pontjában kiválasztjuk a $T\mathcal{M}_x$ érintőtérnek egy m -dimenziós W_x alterét, olyan módon, hogy a $W = \bigcup_x W_x$ halmazt C^∞ vektormezők alkossák, akkor nem biztos, hogy meg tudunk adni olyan beágyazott alsokaságot, amelynek érintőterei minden pontban W_x -el egyeznek meg. Ha van ilyen sokaság azt integrális alsokaságnak nevezzük. Hogy mikor található integrális alsokaság, arra a Frobenius-tétel ad szükséges és elégséges feltételt.

Frobenius-tétel vektori alakja [23]:

Az \mathcal{M} sokaság összes x pontjának tangens terében adott W_x m -dimenziós alterek $W = \bigcup_x W_x$ halmaza meghatároz egy integrális alsokaságot, akkor és csak akkor, ha tetszőleges W_x -beli vektormezők Lie-zárójelei is W -be esnek. Vagyis

$$W \ni [Y, Z]^a \equiv Y^b \partial_b Z^a - Z^b \partial_b Y^a = Y^b \tilde{\nabla}_b Z^a - Z^b \tilde{\nabla}_b Y^a ,$$

ha $Y^a, Z^a \in W$. (A fenti összefüggésben a $\tilde{\nabla}$ kovariáns deriválás az \mathcal{M} sokaságon bevezetett \tilde{g}_{ab} metrikával kompatibilis, azaz $\tilde{\nabla}_c \tilde{g}_{ab} = 0$.) A bizonyítása megtalálható például a [20]-ben.

A érintőnyaláb elemeivel megfogalmazott Frobenius-tételt szokás átírni a koérintőnyaláb elemeivel kifejezve. Ehhez bevezetjük a $T\mathcal{M}_x$ érintőtér duálisának azon $U_x^* \subset T^*\mathcal{M}_x$ $n - m$ dimenziós alterét, amelynek a W_x a nulltere, vagyis $U_x^* \mu_a$ elemei a W_x Y^a vektoraihoz zérust rendelnek: $\mu_a Y^a = 0$.

Frobenius-tétel duális alakja [23]:

A W_x m -dimenziós alterek W nyalábja meghatároz egy integrális alsokaságot, akkor és csak akkor, ha minden $\omega_a \in U^* = \bigcup_x U_x^*$ kovariáns deriváltja az alábbi alakban írható:

$$\tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = \sum_{i=1}^{n-m} \eta_{[a}^{(i)} V_{b]}^{(i)} , \quad (1)$$

ahol $V_b^{(i)} \in T^*\mathcal{M}$ tetszőleges 1-forma mezők és valamennyi $\eta_a^{(i)} \in U^*$.

Bizonyítás: Legyen $Y^a, Z^a \in W$ és $\mu_a \in U^*$. A W nyáláb és csak akkor határoz meg egy integrális alsokaságot, ha

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_a [Y, Z]^a = \mu_a \left(Y^b \tilde{\nabla}_b Z^a - Z^b \tilde{\nabla}_b Y^a \right) \\ &= -Y^b Z^a \tilde{\nabla}_b \mu_a + Z^b Y^a \tilde{\nabla}_b \mu_a = -2Y^a Z^b \tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} . \end{aligned} \quad (2)$$

Az utóbbi kifejezés nyilvánvalóan elűnhik, ha μ_a kovariáns deriváltja (1) alakú, hiszen $Y^a \eta_a^{(i)} = Z^a \eta_a^{(i)} = 0$. Azt kell belátnunk, hogy ha μ_a kovariáns deriváltja az (1)-től eltérő, akkor (2) nem teljesül. Tehát legyen

$$\tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = \sum_{i=1}^m \xi_a^{(i)} V_b^{(i)} ,$$

ahol $V_b^{(i)} \in T^* \mathcal{M}_x$ tetszőleges 1-formák és valamennyi $\xi_a^{(i)} \in U_x$. Mivel m -dimenziós U_x térben m darab lineárisan független $\xi_a^{(i)}$ választható, ezért elegendő megmutatni, hogy a

$$\tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = \xi_a V_b, \quad (3a)$$

választás nem jó (ahol ξ_a nem arányos V_a -val), mert lineárisan független ξ_a -kból alkotott ilyen mennyiségek tetszőleges lineáris kombinációja sem fogja teljesíteni (2) egyenletet. A (3a) választás nem lesz jó mert ez esetben tetszőleges Y^a, Z^a -re írhatjuk hogy:

$$0 = 2Y^a Z^b \tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = (Y^a Z^b - Y^b Z^a) \xi_a V_b .$$

Az Y^a -t válasszuk meg W -ben úgy, hogy $Y^a \xi_a = 0$ és $Y^a V_a \neq 0$ teljesüljön, ekkor a (3a) egyenletből következik, hogy $Z^a \xi_a = 0$, ami tetszőleges $Z^a \in W$ -re nem állhat fent.

Q.E.D.

Speciális esetben, amennyiben a hiperfelületek $(n-1)$ -dimenziósak (egy normálisuk van, a $\mu^a = \tilde{g}^{ab} \mu_b$), a Frobenius-tétel duális megfogalmazása szerint akkor létezik az $(n-1)$ -dimenziós hiperfelület, ha

$$\tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = \mu_{[a} V_{b]} . \quad (4)$$

Ennek bizonyítása hasonló:

$$\begin{aligned} 2Y^a Z^b \tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} &= 2Y^a Z^b \mu_{[a} V_{b]} = Y^a Z^b \mu_a V_b - Y^a Z^b \mu_b V_a \\ &= (Y^a \mu_a) (Z^b V_b) - (Y^a V_a) (Z^b \mu_b) \\ &= 0 (Z^b V_b) - (Y^a V_a) 0 = 0 . \end{aligned}$$

Bontsuk fel a metrikus tenzort $\tilde{g}_{ab} = \epsilon \mu_a \mu_b + h_{ab}$ alakba, ahol h_{ab} az indukált metrika és $\epsilon = \mu^a \mu_a = \pm 1$. Belátható, hogy

$$0 = \tilde{\nabla}_b (\mu^a \mu_a) = \mu^a \tilde{\nabla}_b \mu_a + \mu_a \tilde{\nabla}_b \mu^a = 2\mu^a \tilde{\nabla}_b \mu_a \rightarrow \mu^a \tilde{\nabla}_b \mu_a = 0 . \quad (5)$$

Az (4) összefüggés hiperfelületre eső, arra merőleges és vegyes projekciói a

$$h_a^c h_b^d \tilde{\nabla}_{[c} \mu_{d]} ; \mu^a \mu^b \tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = 0 ; h_a^c h_b^d \tilde{\nabla}_{[c} \mu_{d]} . \quad (6)$$

Ezek közül az első pontosan az örvénytenzor:

$$\omega_{ab} \equiv \nabla_{[a}\mu_{b]} \equiv h_a^c h_b^d \tilde{\nabla}_{[c}\mu_{d]} . \quad (7)$$

A képletben szereplő ∇ az indukált metrikával kompatibilis kovariáns deriválást jelöli, ami a $\tilde{\nabla}$ kovariáns derivált projekciójaként áll elő. Megjegyezzük, hogy bevezethető az $\omega_a = 1/2\epsilon^{bc}\omega_{bc}$ örvényvektor is. Mivel ϵ -től függetlenül

$$h_b^a \mu_a = (\tilde{g}_b^a - \epsilon \mu^a \mu_b) \mu_a = \tilde{g}_b^a \mu_a - \epsilon \mu_a \mu^a \mu_b = \mu_b - \epsilon^2 \mu_b = 0 ,$$

ezért μ^b hiperfelület-merőleges vektor örvénymentes

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &= h_a^c h_b^d \mu_{[c} V_{d]} = \frac{1}{2} [h_a^c h_b^d \mu_c V_d - h_a^c h_b^d \mu_d V_c] \\ &= \frac{1}{2} [(h_a^c \mu_c) (h_b^d V_d) - (h_a^c V_c) (h_b^d \mu_d)] = 0 . \end{aligned} \quad (8)$$

Beláttuk tehát, hogy a Frobenius tétel teljesülése μ_a forma és ezzel együtt μ^a normális örvénymentességét is jelenti.

Végül, a vegyes projekció a μ^a kongruencia gyorsulásának kifejezését adja meg V_a és μ_a függvényében:

$$\begin{aligned} \mu^b \tilde{\nabla}_{[a}\mu_{b]} &= \mu^b \mu_{[a} V_{b]} \\ \mu^b (\nabla_a \mu_b - \nabla_b \mu_a) &= \mu^b (\mu_a V_b - \mu_b V_a) \\ \mu^b \nabla_a \mu_b - \mu^b \nabla_b \mu_a &= \mu_a \mu^b V_b - \mu^b \mu_b V_a \\ \mu^b \nabla_b \mu_a &= \epsilon V_a - \mu_a \mu^b V_b . \end{aligned} \quad (9)$$

Irodalomjegyzék

- [1] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, 7. fejezet, 227–265, szerkesztő L. Witten, Wiley, New York, (1962).
- [2] C. W. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, p. 527, W. A. Freeman and Company (1973).
- [3] C. J. Isham, K. V. Kuchař, *Representations of space-time diffeomorphisms I. II.*, Ann. Phys. (N.Y.), **164**, 288 (1985), *ibid.* **164**, 316 (1985).
- [4] B. Mongwane, *On the Hyperbolicity and Stability of 3+1 Formulations of Metric $f(R)$ Gravity*, (2016), [arXiv:1610.07224].
- [5] C. Clarkson, *A Covariant approach for perturbations of rotationally symmetric spacetimes*, Phys. Rev. D **76**, 104034 (2007) [arXiv:0708.1398].
- [6] C. A. Clarkson, R. K. Barrett, *Covariant perturbations of Schwarzschild black holes*, Class. Quant. Grav. **20**, 3855 (2003) [gr-qc/0209051].
- [7] Z. Keresztes, M. Forsberg, M. Bradley, P. K. S. Dunsby, L. Á. Gergely, *Gravitational, shear and matter waves in Kantowski-Sachs cosmologies*, J. Cosmol. Astropartic. Phys. **11**, 042 (2015) [arXiv:1507.08300 [gr-qc]].
- [8] L. Á. Gergely, Z. Kovács, *Gravitational dynamics in $s+1+1$ dimensions*, Phys. Rev. D **72**, 064015 (2005). A (β_a) mennyiségek jelölései ebben a munkában (λ_a) .
- [9] Z. Kovács, L. Á. Gergely, *Gravitational dynamics in $s+1+1$ dimensions II. Hamiltonian theory*, Phys. Rev. D **77**, 024003 (2008).
- [10] R. Kase, L. Á. Gergely, S. Tsujikawa, *Effective field theory of modified gravity on spherically symmetric background: leading order dynamics and the odd mode perturbations*, Phys. Rev. D **90**, 124019 (2014) [arXiv:1406.2402 [hep-th]].
- [11] E. Gourgoulhon, S. Bonazzola, *Noncircular axisymmetric stationary spacetimes*, Phys. Rev. D **48**, 2635 (1993).
- [12] E. Gourgoulhon, *Generalized Damour-Navier-Stokes equation applied to trapping horizons*, Phys. Rev. D **72**, 104007 (2005).

-
- [13] A. Ashtekar, B. Krishnan, *Isolated and Dynamical Horizons and Their Applications*, Living Rev. Relativity 7, 10 (2004).
- [14] A. Ashtekar, B. Krishnan, *Dynamical Horizons: Energy, Angular Momentum, Fluxes, and Balance Laws*, Phys. Rev. Lett. **89**, 261101 (2002).
- [15] A. Ashtekar, B. Krishnan, *Dynamical horizons and their properties*, Phys. Rev. D **68**, 104030 (2003).
- [16] T. Damour, *Thèse de doctorat d'État*, Université Paris 6 (1979).
- [17] T. Damour, *Proceedings of the Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, ed. R. Ruffini (North-Holland, Amsterdam, 1982), p. 587.
- [18] E.ourgoulhon, J. L. Jaramillo, *A 3+1 perspective on null hypersurfaces and isolated horizons*, Phys. Rept. **423**, 159-294 (2006) [arXiv:gr-qc/0503113].
- [19] J. D. Brown, *Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action*, J.W. York, Phys. Rev. D **47**, 1407 (1993).
- [20] Th. Frankel, *The Geometry of Physics*, An Introduction, Cambridge Univ. Press (2012).
- [21] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, 23. old., Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (1973)
- [22] J. A. Schouten, *Der Ricci Kalkül*, Springer Verlag (1924).
- [23] R. Wald, *General Relativity*, 434-436.old., Appendix B.3, The University of Chicago Press (1984).