Szegedi Tudományegyetem
TTIK Elméleti Fizikai Tanszék

SZAKDOLGOZAT

Gravitációs dinamika kétszeresen fóliázható téridőkben

Készítette: Nagy Cecília
Fizika BSc szakos hallgató

Témavezető: Dr. Keresztes Zoltán
egyetemi adjunktus

Szeged
2017

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés: A téridő 2+1+1-es felbontásai

A speciális relativitáselmélet egyesíti a teret és az időt, egyetlen téridőbe. Az általános relativitáselmélet abban lép tovább, hogy megengedi a téridő görbültségét is. Ez nem más, mint a gravitáció, melyhez tartozó newtoni potenciált a 10 független komponenssel rendelkező $\widetilde{g}_{ab}$ metrikus tenzor általánosít.

A tér és idő egységes kezelése ellenére vitathatatlan az idő kiválasztott szerepe, hiszen az időfejlődés jövőirányba történik. Ezért már az általános relativitáselmélet korai éveiben vizsgálták a téridő 3+1 felbontását, a gravitáció ún. Arnowitt-Deser-Misner (ADM) formalizmusát [1]. A 3-dimenziós hiperfelületek serege egy fóliázást alkot. Hiperfelületről hiperfelületre folytonosan változik az időparaméter értéke, míg egy hiperfelületen belül azonos. Ebben a formalizmusban a 4-dimenziós metrika helyét a 3-dimenziós hiperfelületeken indukált metrika (6 változó) és azok külső görbülete (6 változó) veszi át, melyek kanonikus párokat határoznak meg. Az Einstein egyenletek helyére ezeknek a pároknak a hamiltoni fejlődésegyenlete lép. A változókra ezenkívül minden időpontban teljesülő kényszeregyenletek is vonatkoznak. Ezek a Hamiltoni- és a Diffeomorfizmus- (impulzus-) kényszerek. A 3+1 felbontás azért nem triviális, mert általános esetben nincs kiválasztott idő, így az összes választható időfüggvényre alkalmazható kell legyen („many-fingered time" formalizmus [2, 3]). Az ADM felbontást a közelmúltban általánosították f(R) gravitációelméletekre is [4].

Olyankor, ha a tér rendelkezik egy (általában szimmetria által) kiválasztott iránnyal, indokolt lehet a tér további felbontása, így a téridő 2+1+1 felbontása állhat elő. Ezt a legáltalánosabb esetben úgy dolgozták ki, hogy mindkét kiválasztott irány rendelkezik, expanzióval, nyírással és örvénnyel is [5]. Ezt alkalmazták gömbszimmetrikus téridők perturbációira [6], illetve az anizotróp Kantowski-Sachs téridő perturbációira is [7].

Ismert a téridő olyan sokkal egyszerűbb 2+1+1 felbontása is, mely két, egymásra *merőleges* fóliázáson alapul [8, 9]. Ilyenkor az egyik hiperfelület-sereg $\mathcal{S}_t$ hiperfelületeit állandó t idő jellemzi, így ez a hiperfelület-sereg térszerű, n^a normálisa pedig időszerű és normált, $n_a n^a = -1$. A második hiperfelület-sereg $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületeit pedig állandó χ koordináta jellemzi, ez a hiperfelület-sereg időszerű, l^a normálisa térszerű és normált, $l_a l^a = 1$. A Frobenius tétel értelmében ekkor mindkét vektormező örvénymentes (ennek bizonyítását a 2.

Függelékben fogjuk látni). Ugyancsak teljesül, hogy a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a &\equiv Nn^a + N^a \ , \\ \left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a &\equiv Ml^a + M^a \ ,\end{aligned}$$

fejlődési vektorok az $\mathfrak{M}_\chi$, illetve $\mathcal{S}_t$ hiperfelületek érintői. A hiperfelületek metszete a $\Sigma_{t\chi}$ 2-dimenziós felület, melyen az indukált metrika g_{ab}. Az N^a és M^a shift-vektorok $\Sigma_{t\chi}$ érintői, N és M pedig lapse-függvények. Összesen tehát 9 metrikus változó van: a g_{ab} metrika 3 független komponense; az N^a és M^a shift vektorok $2+2$ komponense; valamint az N, M lapse függvények. A metrikus változók számának csökkenése problémát jelentett az ún. módosított gravitációelméletek effektív térelméleti tárgyalásában [10]. A változók számának 10-ről 9-re csökkenése egy koordináta megválasztásával, azaz gravitációs mérték-transzformáció elhasználásával egyenértékű, így a mérték-rögzítés után is marad a megoldásban tetszőleges időfüggvény, azaz olyan nem-fizikai mérték-módus, mely a perturbációk fizikai értelmezését zavarja.

A probléma kiküszöböléséhez kívánatos lenne egy olyan módosított 2+1+1 felbontás, melyben a gravitációs változók száma legalább 10, de jóval kisebb az általános (kinematikai mennyiségek használatán alapuló) 2+1+1 felbontás változóinak számánál [5]. Ezt a [8, 9] forrásokban, dupla fóliázás feltevése mellett kidolgozott formalizmus olyan általánosításával fogjuk elérni, amelyben a fóliázások merőlegességét nem követeljük meg.

A dolgozat második fejezetében bevezetjük azt a két ortogonális bázist, melyek egyenként a két hiperfelülethez illeszkednek. Megvizsgáljuk a bázisok kapcsolatát egymással és a koordinátabázissal, valamint tárgyaljuk a bázisvektorok örvényességét. Szintén itt adjuk meg a bázisvektorok algebráját. Két független értelmezést adunk a tizedik metrikus függvényre, megmutatjuk, hogy egyrészt a bázisok közötti Lorentz-forgatással, másrészt a bázisvektorok örvényességével függ össze. A harmadik fejezetben a bázisvektorok kovariáns deriváltjainak 2+1+1 felbontását dolgozzuk ki és ezzel kapcsolatos geometriai mennyiségeket (külső görbületek, normális fundamentális formák, normális fundamentális skalárok) vezetünk be. A negyedik fejezetben összefüggéseket állapítunk meg a geometriai mennyiségek között. Az ötödik fejezetben a geometriai mennyiségek és a metrikus függvények idő-, illetve térderiváltjai közötti kapcsolatot vizsgáljuk. Ennek segítségével kiválasztjuk a Lagrange-értelemben sebességeknek, illetve hamiltoni értelembe impulzusoknak tekinthető geometriai mennyiségeket. A hatodik fejezetben elvégezzük az Einstein-Hilbert hatás 2+1+1 felbontásához szükséges számolásokat és megadjuk a hatást a hamiltoni képre történő áttéréshez alkalmas alakban. A hiperfelületek létezésével kapcsolatos Frobenius-tételt és duális alakját a 2. Függelékben tárgyaljuk.

A dolgozatban a következő jelöléseket használjuk: a latin- illetve görög indexek absztrakt indexek 4, illetve 3 dimenzióban (azaz csupán a tenzor-jelleget jelölik), a vastag kis- és nagybetűs latin indexek pedig (például $\mathbf{i}$, illetve $\mathbf{A}$) 2, illetve 4-dimenziós bázisvektorok nevében jelennek meg.

2. fejezet

A nemortogonális kettős fóliázás

A [8, 9] cikkekben kidolgozott formalizmust úgy általánosítjuk, hogy az állandó t által meghatározott $\mathcal{S}_t$ és az állandó χ által meghatározott $\mathfrak{M}_\chi$ fóliázások ne legyenek merőlegesek egymásra. A kétszeresen fóliázható $\mathcal{B}$ téridő érintőterén bevezetjük az $e_{\mathbf{A}} = \{\partial/\partial t, \partial/\partial\chi, E_{\mathbf{i}}\}$ bázist (itt $E_{\mathbf{i}}$ a $\Sigma_{t\chi}$ érintőterének ortonormált elemei) és ennek duális $e^{\mathbf{B}} = \left\{dt, d\chi, E^{\mathbf{j}}\right\}$ bázisát az 1-formák terén.

Legyen az $\mathcal{S}_t$ normálisa továbbra is n^a, a rá (így a $\Sigma_{t\chi}$-re is) merőleges térszerű normális pedig m^a. Az $\mathcal{S}_t$ hiperfelülethez adaptált ortonormált bázis így $f_{\mathbf{A}} = \{n, m, F_{\mathbf{i}}\}$, a duális bázis az 1-formák terén pedig $f^{\mathbf{B}} = \left\{\bar{n}, \bar{m}, F^{\mathbf{j}}\right\}$. Az $\mathfrak{M}_\chi$ normálisa pedig továbbra is l^a, a rá (így a $\Sigma_{t\chi}$-re is) merőleges időszerű normális pedig k^a. Az $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelülethez adaptált ortonormált bázis $g_{\mathbf{A}} = \{k, l, F_{\mathbf{i}}\}$, a duális bázis az 1-formák terén pedig $g^{\mathbf{B}} = \left\{\bar{k}, \bar{l}, F^{\mathbf{j}}\right\}$.

A 4-dimenziós metrika tehát két ekvivalens módon is felbontható

$$\tilde{g}_{ab} = -n_a n_b + m_a m_b + g_{ab} \ , \tag{2.1}$$
$$\tilde{g}_{ab} = -k_a k_b + l_a l_b + g_{ab} \ . \tag{2.2}$$

(Míg a $\tilde{g}_{ab}$ metrika vegyes indexű alakja a Kronecker-szimbólummal azonos, a g_{ab} vegyes indexű alakja a $\Sigma_{t\chi}$-re vetítő projektor.)

Megjegyezzük még, hogy választhatunk

$$E_{\mathbf{i}} = F_{\mathbf{i}} = G_{\mathbf{i}} = \frac{\partial}{\partial y^{\mathbf{i}}} \tag{2.3}$$

koordinátabázist.

Könnyen belátható a vektorok időszerű vagy térszerű jellegéből és a dualitási relációkból, hogy:

$$\begin{aligned} \bar{n}_a &= -n_a \ , \quad \bar{m}_a = m_a \ , \\ \bar{k}_a &= -k_a \ , \quad \bar{l}_a = l_a \ . \end{aligned}$$

A koordinátavektorok [8, 9] cikkekben bevezetett felbontását következőképpen általánosítjuk:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = N n^a + N^a + \mathcal{N} m^a \ , \tag{2.4}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a = M m^a + M^a + \mathcal{M} n^a \ . \tag{2.5}$$

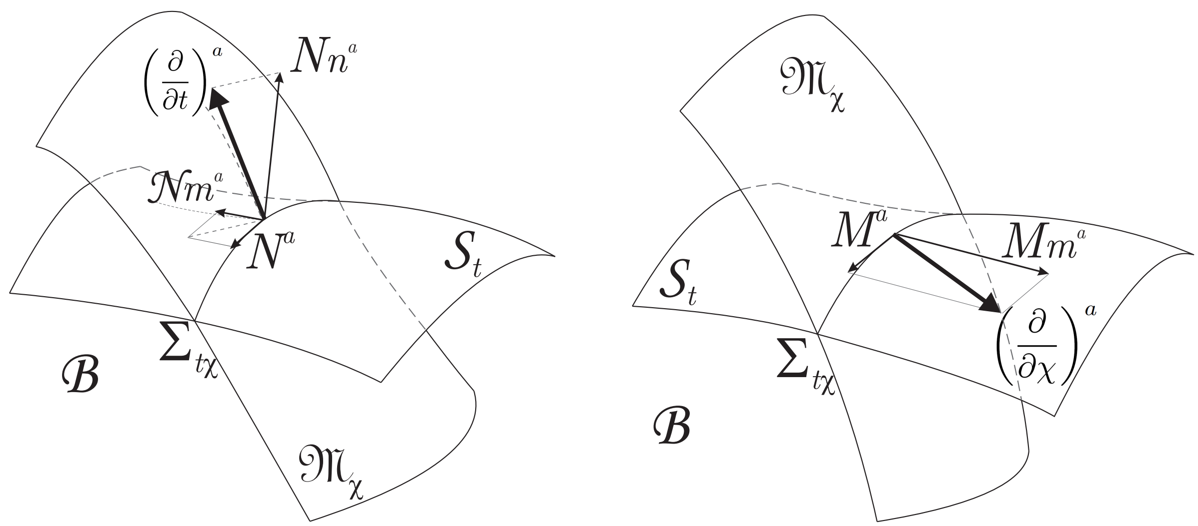
Itt $\mathcal{N}$ és $\mathcal{M}$ a háromdimenziós shift vektorok $\Sigma_{t\chi}$-re merőleges komponensei. A g_{ab} kétdimenziós metrika 3 független komponensével együtt így a gravitációt (egyelőre) 11 változó jellemzi.

A $\partial/\partial t$ időfejlődési vektor időszerűségének (és az N^a térszerűségének) következménye, hogy

$$N^2 - \mathcal{N}^2 > g_{ab} N^a N^b \geq 0 \ ,$$

a jövőirányítottsága miatt pedig N pozitív.

A kettős fóliázás részleteit az 2.1 ábra mutatja be.



2.1. ábra. A téridő kettős fóliázásában szerepet játszó hiperfelületek, a hozzájuk adaptált bázisvektorok, valamint a t és χ irányú fejlődések (itt már felhasználtuk a később levezetendő 2.9 összefüggést).

2.1. Az $n^a, m^a, \Sigma_{t\chi}$ felbontás

2.1.1. Az $e^{\mathbf{B}}$ és $f^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolata

A duális vektorbázisok kapcsolatát a (2.3)-(2.5) összefüggések tartalmazzák. Az 1-forma bázisok kapcsolatát

$$\bar{n} = \alpha^{-1} dt \ , \tag{2.6}$$

$$\bar{m} = \rho^{-1} dt + \sigma^{-1} d\chi \ , \tag{2.7}$$

$$F^{\mathbf{j}} = A^{\mathbf{j}}_t dt + A^{\mathbf{j}}_\chi d\chi + \left(A^{-1}\right)^{\mathbf{j}}_{\mathbf{i}} E^{\mathbf{i}} \tag{2.8}$$

módon adhatjuk meg, az ismeretlen $\alpha, \rho, \sigma, A^{\mathbf{j}}_t, A^{\mathbf{j}}_\chi$ és $(A^{-1})^{\mathbf{j}}_{\mathbf{i}}$ együtthatókat pedig az $\langle e^{\mathbf{B}}, e_{\mathbf{A}} \rangle = \delta^{\mathbf{B}}_{\mathbf{A}} = \langle f^{\mathbf{B}}, f_{\mathbf{A}} \rangle$ dualitási relációk segítségével határozhatjuk meg.

A $\Sigma_{t\chi}$-re merőleges rész dualitási relációiból indulunk ki. A (2.6) és (2.7) kifejezések invertálásának, azaz

$$\begin{aligned} dt &= \alpha\bar{n} \ , \\ d\chi &= \sigma\left(\bar{m} - \frac{\alpha}{\rho}\bar{n}\right) \end{aligned}$$

segítségével az alábbi összefüggések adódnak:

$$1 = \left\langle dt, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \alpha N \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{N} \ ,$$

valamint

$$0 = \left\langle dt, \frac{\partial}{\partial \chi}\right\rangle = \frac{\mathcal{M}}{N} \quad \rightarrow \quad \mathcal{M} = 0 \ . \tag{2.9}$$

Ezzel az eredménnyel az eredetileg 11 gravitációs változó közül az egyik eltűnik, csak 10 marad, ami ugyanannyi, mint a 4-dimenziós metrika független komponenseinek száma. Továbbá

$$1 = \left\langle d\chi, \frac{\partial}{\partial \chi}\right\rangle = \sigma M \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{M} \ ,$$

$$0 = \left\langle d\chi, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{M}\left(\mathcal{N} - \frac{1}{\rho}\right) \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{1}{\mathcal{N}} \ ,$$

tehát

$$dt = \frac{1}{N}\bar{n} \ , \tag{2.10}$$

$$d\chi = \frac{1}{M}\left(\bar{m} - \frac{\mathcal{N}}{N}\bar{n}\right) \ . \tag{2.11}$$

Az $f^{\mathbf{B}}$ bázis kifejezését az $e^{\mathbf{B}}$ bázis segítségével az

$$E^{\mathbf{i}} = A^{\mathbf{i}}_{\mathbf{j}}\left[F^{\mathbf{j}} - \frac{1}{N}\left(A^{\mathbf{j}}_t - \frac{\mathcal{N}}{M}A^{\mathbf{j}}_\chi\right)\bar{n} - \frac{1}{M}A^{\mathbf{j}}_\chi\bar{m}\right]$$

összefüggés teszi teljessé. Az $A^{\mathbf{j}}_t, A^{\mathbf{j}}_\chi, (A^{-1})^{\mathbf{j}}_{\mathbf{i}}$ együtthatók meghatározhatók a maradék dualitási relációkból (az $N^a = N^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}$ és $M^a = M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}$ felbontások bevezetése után):

$$\begin{aligned} \delta^{\mathbf{i}}_{\mathbf{k}} &= \langle E^{\mathbf{i}}, E_{\mathbf{k}}\rangle = A^{\mathbf{i}}_{\mathbf{k}} \quad \rightarrow \quad A^{\mathbf{i}}_{\mathbf{k}} = \delta^{\mathbf{i}}_{\mathbf{k}} \ , \\ 0 &= \left\langle E^{\mathbf{i}}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = N^{\mathbf{i}} - A^{\mathbf{i}}_t \quad \rightarrow \quad A^{\mathbf{i}}_t = N^{\mathbf{i}} \ , \\ 0 &= \left\langle E^{\mathbf{i}}, \frac{\partial}{\partial \chi}\right\rangle = M^{\mathbf{i}} - A^{\mathbf{i}}_\chi \rightarrow \quad A^{\mathbf{i}}_\chi = M^{\mathbf{i}} \ , \end{aligned}$$

azaz

$$E^{\mathbf{i}} = F^{\mathbf{i}} - \frac{1}{N}\left(N^{\mathbf{i}} - \frac{\mathcal{N}}{M}M^{\mathbf{i}}\right)\bar{n} - \frac{1}{M}M^{\mathbf{i}}\bar{m} \ . \tag{2.12}$$

A $\langle dt, E_{\mathbf{i}}\rangle$ és $\langle d\chi, E_{\mathbf{i}}\rangle$ dualitási feltételek triviálisan teljesülnek.

Összefoglalva, a két duális bázis kapcsolata:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= N dt \ , \\ \bar{m} &= \mathcal{N} dt + M d\chi \ , \\ F^{\mathbf{j}} &= N^{\mathbf{j}} dt + M^{\mathbf{j}} d\chi + E^{\mathbf{j}} \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

2.1.2. Az $\mathcal{S}_t$ felületsereg létezése és n^a örvénymentessége

Az alábbiakban részletesebben is megvizsgáljuk az $\mathcal{M} = 0$ eredményünk következményeit.

Ehhez először a (2.4) és (2.5) egyenletekből, még $\mathcal{M}$ megtartásával, kifejezzük az n^a, m^a vektorokat:

$$n^a = \frac{M}{(MN - \mathcal{M}\mathcal{N})}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \frac{\mathcal{N}}{M}\left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a - N^a + \frac{\mathcal{N}}{M}M^a\right] , \tag{2.14}$$

$$m^a = \frac{N}{(MN - \mathcal{M}\mathcal{N})}\left[-\frac{\mathcal{M}}{N}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a + \frac{\mathcal{M}}{N}N^a - M^a\right] . \tag{2.15}$$

Két vektor Lie-zárójele egy f tesztfüggvény segítségével következőképpen számolható:

$$\begin{aligned}
[V,W]f &= V^b\partial_b\left(W^a\partial_a f\right) - W^b\partial_b\left(V^a\partial_a f\right)\\
&= V^b\partial_b^a W\partial_a f + V^bW^a\partial_b\partial_a f - W^b\partial_b V^a\partial_a f - W^bV^a\partial_b\partial_a f\\
&= \left(V^b\partial_b^a W - W^b\partial_b V^a\right)\partial_a f \ .
\end{aligned}$$

Azaz

$$[V,W]^a = V^b\partial_b^a W - W^b\partial_b V^a \ .$$

Ezt követően kiszámoljuk az m és $F_{\mathbf{i}}$ bázisvektorok Lie-zárójelét. A Lie-zárójel számolása a következőképpen történik. A számolásban megjelenő $f_{\mathbf{B}}$ bázisvektorokat áttranszformáljuk koordinátabázisba a (2.14)-(2.15) összefüggések, valamint a (2.3) segítségével, majd elvégezzük a deriválásokat, végül visszatranszformálunk az $f_{\mathbf{B}}$ bázisba. Tehát lépésenként

$$\begin{aligned}
[m,F_{\mathbf{i}}]^a &= m^b\partial_b F_{\mathbf{i}}^a - F_{\mathbf{i}}^b\partial_b m^a = m^b\partial_b\delta_{\mathbf{i}}^a - \delta_{\mathbf{i}}^b\partial_b m^a = -\delta_{\mathbf{i}}^b\partial_b m^a\\
&= -\partial_{\mathbf{i}}\left\{\left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}\right)\left[-\frac{\mathcal{M}}{N}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a + \frac{\mathcal{M}}{N}N^a - M^a\right]\right\}\\
&= -\partial_{\mathbf{i}}\left\{\left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}\right)\left[-\frac{\mathcal{M}}{N}\delta_t^a + \delta_\chi^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N}N^{\mathbf{j}} - M^{\mathbf{j}}\right)\delta_{\mathbf{j}}^a\right]\right\}\\
&= -\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N}\right)^{-1}\left[-\frac{\mathcal{M}}{N}\delta_t^a + \delta_\chi^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N}N^{\mathbf{j}} - M^{\mathbf{j}}\right)\delta_{\mathbf{j}}^a\right]\\
&\quad -\frac{N}{(MN - \mathcal{M}\mathcal{N})}\partial_{\mathbf{i}}\left[-\frac{\mathcal{M}}{N}\delta_t^a + \delta_\chi^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N}N^{\mathbf{j}} - M^{\mathbf{j}}\right)\delta_{\mathbf{j}}^a\right]\\
&= \left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}\right)^2\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N}\right)\left[-\frac{\mathcal{M}}{N}\delta_t^a + \delta_\chi^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N}N^{\mathbf{j}} - M^{\mathbf{j}}\right)\delta_{\mathbf{j}}^a\right]\\
&\quad -\left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}\right)\left\{-\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right)\delta_t^a + \left[\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right)N^{\mathbf{j}} + \frac{\mathcal{M}}{N}\partial_{\mathbf{i}}N^{\mathbf{j}} - \partial_{\mathbf{i}}M^{\mathbf{j}}\right]\delta_{\mathbf{j}}^a\right\} .
\end{aligned}$$

Ebbe visszahelyettesítve $f_{\mathbf{A}}$ bázisvektorokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N}[m,F_{\mathbf{i}}]^a = &\left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}\right)\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N}\right)\\
&\times\left[-\frac{\mathcal{M}}{N}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a + \left(\frac{\mathcal{M}}{N}N^{\mathbf{j}} - M^{\mathbf{j}}\right)\delta_{\mathbf{j}}^a\right]\\
&-\left\{-\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \left[\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right)N^{\mathbf{j}} + \frac{\mathcal{M}}{N}\partial_{\mathbf{i}}N^{\mathbf{j}} - \partial_{\mathbf{i}}M^{\mathbf{j}}\right]\delta_{\mathbf{j}}^a\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{N}{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}\right) \partial_{\mathbf{i}} \left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N}\right) \\
&\times \left[-\frac{\mathcal{M}}{N}\left(Nn^a + N^a + \mathcal{N}m^a\right) + \left(Mm^a + M^a + \mathcal{M}n^a\right) + \left(\frac{\mathcal{M}}{N}N^{\mathbf{j}} - M^{\mathbf{j}}\right)\delta_{\mathbf{j}}^a\right] \\
&- \left\{-\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right)\left(Nn^a + N^a + \mathcal{N}m^a\right) + \left[\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right)N^{\mathbf{j}} + \frac{\mathcal{M}}{N}\partial_{\mathbf{i}}N^{\mathbf{j}} - \partial_{\mathbf{i}}M^{\mathbf{j}}\right]\delta_{\mathbf{j}}^a\right\} \\
&= \left\{N\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right)n^a + \left[\mathcal{N}\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right) + \partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N}\right)\right]m^a + \left(\partial_{\mathbf{i}}M^{\mathbf{j}} - \frac{\mathcal{M}}{N}\partial_{\mathbf{i}}N^{\mathbf{j}}\right)F_{\mathbf{j}}^a\right\}
\end{aligned}
$$

vagyis

$$
\begin{aligned}
\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N}\left[m, F_{\mathbf{j}}\right]^a &= N\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right)n^a + \left(\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}} - \frac{\mathcal{M}}{N}\partial_{\mathbf{j}}N^{\mathbf{i}}\right)F_{\mathbf{i}}^a \\
&+ \left[\mathcal{N}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{M}}{N}\right) + \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{MN - \mathcal{M}\mathcal{N}}{N}\right)\right]m^a \ . \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Amennyiben $\mathcal{M} = 0$, a (2.16) Lie-zárójelben az n^a irányú tag eltűnik, így

$$
\left[m, F_{\mathbf{j}}\right]^a = \partial_{\mathbf{j}}\left(\ln M\right)m^a + \frac{\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}}{M}F_{\mathbf{i}}^a \qquad (2.17)
$$

az eredmény. Tehát a Frobenius-tétel értelmében (2. Függelék) az $\{m, F_{\mathbf{i}}\}$ vektorok $\mathcal{M} = 0$ esetén valóban az $\mathcal{S}_t$ hiperfelület érintőterét feszítik ki. A Frobenius-tétel duális megfogalmazása értelmében pedig n^a örvénymentes.

Az $\mathcal{M} = 0$ feltételből és (2.5) felbontásból az is látszik, hogy $\partial/\partial\chi$ érintője lesz az $\mathcal{S}_t$ hiperfelületnek. A további számolásoknál mindenütt felhasználjuk az $\mathcal{M} = 0$ eredményünket, azaz a 4-dimenziós $\tilde{g}_{ab}$ metrika 10 független komponense helyett a $g_{ab}, N^a, M^a, N, M, \mathcal{N}$ mennyiségek 10 független komponense fejezi ki a gravitációt.

2.1.3. Az $f_{\mathbf{B}}$ bázis algebrája és m^a örvényessége

Felmerül, hogy az m^a bázisvektor, a rá merőleges n^a bázisvektorhoz hasonlóan, örvénymentes-e. Ennek tisztázása érdekében kiszámoljuk az $f_{\mathbf{B}}$ bázisvektorok algebráját, felhasználva a (2.3), (2.4), (2.5), (2.14) és (2.15) összefüggések $\mathcal{M} = 0$ alesetét.

Az $f^{\mathbf{B}}$ bázisvektorok algebráját a (2.17), az $[F_{\mathbf{i}}, F_{\mathbf{j}}]^a = \delta_{\mathbf{ij}}$ és a következő összefüggések adják meg:

$$
\begin{aligned}
\left[n, F_{\mathbf{j}}\right]^a &= n^b\partial_b\delta_{\mathbf{j}}^a - \delta_{\mathbf{j}}^b\partial_b n^a \\
&= \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)\left[-\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{\mathcal{N}}{M}\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^a + N^a - \frac{\mathcal{N}}{M}M^a\right] \\
&\quad + \frac{1}{N}\left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^a + \partial_{\mathbf{j}}N^a - \partial_{\mathbf{j}}\frac{\mathcal{N}}{M}M^a - \frac{\mathcal{N}}{M}\partial_{\mathbf{j}}M^a\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathcal{N}}{M}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a \\
&\quad +\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)N^a + \frac{1}{N}\partial_{\mathbf{j}}N^a - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathcal{N}}{M}\right)M^a - \frac{1}{N}\frac{\mathcal{N}}{M}\partial_{\mathbf{j}}M^a \\
&= -\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)(Nn^a + N^a + \mathcal{N}m^a) + \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathcal{N}}{M}\right)(Mm^a + M^a) \\
&\quad +\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)N^a + \frac{1}{N}\partial_{\mathbf{j}}N^a - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathcal{N}}{M}\right)M^a - \frac{1}{N}\frac{\mathcal{N}}{M}\partial_{\mathbf{j}}M^a \\
&= \partial_{\mathbf{j}}(\ln N)\,n^a + \frac{M}{N}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right)m^a + \frac{1}{N}\left[\partial_{\mathbf{j}}N^a - \frac{\mathcal{N}}{M}\partial_{\mathbf{j}}M^a\right]
\end{aligned}
$$

tehát

$$
[n, F_{\mathbf{j}}]^a = \partial_{\mathbf{j}}(\ln N)\,n^a + \frac{M}{N}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right)m^a + \frac{1}{N}\left[\partial_{\mathbf{j}}N^{\mathbf{i}} - \frac{\mathcal{N}}{M}\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}\right]F_{\mathbf{i}}^a\ . \tag{2.18}
$$

Az $f^{\mathbf{B}}$ bázis $\{n, F_{\mathbf{i}}\}$ vektorainak (2.18) Lie-zárójelében az m^a irányú tag nem tűnik el (kivéve az $\mathfrak{s} = 0 = \mathcal{N} = N\tanh\phi$ esetet, melyet a [8, 9] munkák tárgyaltak és melyet a jelen munkában általánosítani szeretnénk). Tehát az $\{n, F_{\mathbf{i}}\}$ vektorok nem feszítenek ki hiperfelület-tangensteret és így az m^a nem hiperfelület-merőleges, hanem örvényes vektormező.

Hasonlóan számolandó

$$
\begin{aligned}
[n, m]^a &= n^b\partial_b m^a - m^b\partial_b n^a = n^b\partial_b\left\{\frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^a - M^a\right]\right\} \\
&\quad -m^b\partial_b\left\{\frac{1}{N}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \frac{\mathcal{N}}{M}\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^a - N^a + \frac{\mathcal{N}}{M}M^a\right]\right\} \\
&= n^b\partial_b\left[\frac{1}{M}\left(\delta_\chi^a - M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a\right)\right] - m^b\partial_b\left[\frac{1}{N}\left(\delta_t^a - \frac{\mathcal{N}}{M}\delta_\chi^a - N^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a + \frac{\mathcal{N}}{M}M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a\right)\right] \\
&= \frac{1}{N}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b - \frac{\mathcal{N}}{M}\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^b - N^b + \frac{\mathcal{N}}{M}M^b\right] \\
&\quad \left[\partial_b\left(\frac{1}{M}\right)\delta_\chi^a - \partial_b\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a - \frac{1}{M}\partial_b M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a\right] \\
&\quad -\frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^b - M^b\right]\left[\partial_b\left(\frac{1}{N}\right)\delta_t^a - \partial_b\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)\delta_\chi^a - \partial_b\left(\frac{1}{N}\right)N^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{N}\partial_b N^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a + \partial_b\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_b M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a\right] \\
&= \frac{1}{N}\left[\partial_t\left(\frac{1}{M}\right)\delta_\chi^a - \partial_t\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a - \frac{1}{M}\partial_t M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a\right] \\
&\quad -\frac{\mathcal{N}}{MN}\left[\partial_\chi\left(\frac{1}{M}\right)\delta_\chi^a - \partial_\chi\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a - \frac{1}{M}\partial_\chi M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a\right] \\
&\quad +\frac{1}{N}\left[-N^{\mathbf{j}} + \frac{\mathcal{N}}{M}M^{\mathbf{j}}\right]\left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{M}\right)\delta_\chi^a - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a - \frac{1}{M}\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a\right] \\
&\quad -\frac{1}{M}\left[\partial_\chi\left(\frac{1}{N}\right)\delta_t^a - \partial_\chi\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)\delta_\chi^a - \partial_\chi\left(\frac{1}{N}\right)N^{\mathbf{i}}\delta_{\mathbf{i}}^a\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{N}\partial_\chi N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} + \partial_\chi\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_\chi M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\Bigg] \\
& +\frac{1}{M}M^{\mathbf{j}}\left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)\delta^a_t - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)\delta^a_\chi - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right. \\
& \left. -\frac{1}{N}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} + \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{1}{N}\left[\partial_t\left(\frac{1}{M}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^a - \partial_t\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} - \frac{1}{M}\partial_t M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right] \\
& -\frac{\mathcal{N}}{MN}\left[\partial_\chi\left(\frac{1}{M}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^a - \partial_\chi\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} - \frac{1}{M}\partial_\chi M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right] \\
& +\frac{1}{N}\left[-N^{\mathbf{j}} + \frac{\mathcal{N}}{M}M^{\mathbf{j}}\right]\left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{M}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^a - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} - \frac{1}{M}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right] \\
& -\frac{1}{M}\left[\partial_\chi\left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \partial_\chi\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^a - \partial_\chi\left(\frac{1}{N}\right)N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right. \\
& \left. -\frac{1}{N}\partial_\chi N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} + \partial_\chi\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_\chi M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right] \\
& +\frac{1}{M}M^{\mathbf{j}}\left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\right)^a - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right. \\
& \left. -\frac{1}{N}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} + \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}} + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{1}{N}\left[\partial_t\left(\frac{1}{M}\right)\left(Mm^a + M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right) - \partial_t\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} - \frac{1}{M}\partial_t M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right] \\
& -\frac{\mathcal{N}}{MN}\left[\partial_\chi\left(\frac{1}{M}\right)\left(Mm^a + M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right) - \partial_\chi\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} - \frac{1}{M}\partial_\chi M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right] \\
& +\frac{1}{N}\left[-N^{\mathbf{j}} + \frac{\mathcal{N}}{M}M^{\mathbf{j}}\right]\left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{M}\right)\left(Mm^a + M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right) - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{M}\right)M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} - \frac{1}{M}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right] \\
& -\frac{1}{M}\left[\partial_\chi\left(\frac{1}{N}\right)\left(Nn^a + N^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} + \mathcal{N}m^a\right) - \partial_\chi\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)\left(Mm^a + M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right)\right. \\
& \left. -\partial_\chi\left(\frac{1}{N}\right)N^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} - \frac{1}{N}\partial_\chi N^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} + \partial_\chi\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_\chi M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right] \\
& +\frac{1}{M}M^{\mathbf{j}}\left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)\left(Nn^a + N^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} + \mathcal{N}m^a\right) - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)\left(Mm^a + M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right)\right. \\
& \left. -\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{N}\right)N^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} - \frac{1}{N}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} + \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{MN}\right)M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}} + \frac{\mathcal{N}}{MN}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}}F^a_{\mathbf{i}}\right] .
\end{aligned}
$$

Tehát:

$$
\begin{aligned}
[n,m]^a \;=\; & \frac{1}{M}\left[\partial_\chi\left(\ln N\right) - \frac{1}{M}M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\ln N\right)\right]n^a \\
& +\frac{1}{MN}\left[-\partial_t M + \partial_\chi\mathcal{N} + N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} M - M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\mathcal{N}\right]m^a \\
& +\frac{1}{MN}\left(-\partial_t M^{\mathbf{i}} + \partial_\chi N^{\mathbf{i}} + N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}} - M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}}\right)F^a_{\mathbf{i}} \; . \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Ezzel befejeztük az $f_{\mathbf{B}}$ bázis algebrájának számolását, melyet az alábbi táblázatban foglalunk össze:

	$[n,m]^a$	$[n,F_{\mathbf{j}}]^a$	$[m,F_{\mathbf{j}}]^a$
n^a	$\frac{1}{M}\left[\partial_\chi(\ln N)-\frac{1}{M}M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}(\ln N)\right]$	$\partial_{\mathbf{j}}(\ln N)$	0
m^a	$\frac{1}{MN}\left[-\partial_t M+\partial_\chi\mathcal{N}+N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}M-M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\mathcal{N}\right]$	$\frac{M}{N}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right)$	$\partial_{\mathbf{j}}(\ln M)$
$F_{\mathbf{i}}^a$	$\frac{1}{MN}\left(-\partial_t M^{\mathbf{i}}+\partial_\chi N^{\mathbf{i}}+N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}-M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}N^{\mathbf{i}}\right)$	$\frac{1}{N}\left[\partial_{\mathbf{j}}N^{\mathbf{i}}-\frac{\mathcal{N}}{M}\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}\right]$	$\frac{\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}}{M}$

2.2. Az $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok közötti Lorentz-forgatás

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy az $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok közötti Lorentz-forgatás kapcsolatban áll a [8, 9] munkákhoz képest itt megtartandó $\mathcal{N}$ shift komponenssel.

Első lépésben szükségünk lesz az $e^{\mathbf{B}}$ és a $g^{\mathbf{B}}$ bázis-formák kapcsolatára:

$$\bar{l} = \beta^{-1}d\chi \ , \tag{2.20}$$

$$\bar{k} = \gamma^{-1}d\chi+\eta^{-1}dt \ , \tag{2.21}$$

$$G^{\mathbf{i}} = B_t^{\mathbf{i}}dt+B_\chi^{\mathbf{i}}d\chi+\left(B^{-1}\right)_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}E^{\mathbf{j}} \ . \tag{2.22}$$

Szeretnénk, hogy az $\bar{l}$ és $\bar{m}$ 1-formák χ-vel, valamint $\bar{k}$ és $\bar{n}$ 1-formák t-vel ugyanúgy változzanak, ezért $sgn(\beta)=sgn(M)$ és $sgn(\eta)=1$. A β, γ, η, $B_t^{\mathbf{i}}$, $B_\chi^{\mathbf{i}}$ és $\left(B^{-1}\right)_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}$ ismeretlen együtthatókat részben itt, teljességükben a következő fejezetben határozzuk meg. Invertáljuk a (2.20) és (2.21) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} d\chi &= \beta\bar{l} \ , \\ dt &= \eta\left(\bar{k}-\frac{\beta}{\gamma}\bar{l}\right) \ . \end{aligned}$$

A (2.3)-(2.5) kifejezések segítségével és az $\left\langle e^{\mathbf{B}},e_{\mathbf{A}}\right\rangle=\delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}}$ dualitási feltételekből előállnak a $\bar{k}$, $\bar{l}$ 1-formák $e_{\mathbf{A}}$ bázisban felvett komponensei:

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle d\chi,\frac{\partial}{\partial\chi}\right\rangle=\beta M\left\langle\bar{l},m\right\rangle \ \rightarrow \quad \left\langle\bar{l},m\right\rangle=\frac{1}{\beta M} \ , \\ 0 &= \left\langle d\chi,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle=\beta N\left\langle\bar{l},n\right\rangle+\frac{\mathcal{N}}{M} \ \rightarrow \quad \left\langle\bar{l},n\right\rangle=-\frac{\mathcal{N}}{N\beta M} \ , \\ 0 &= \left\langle dt,\frac{\partial}{\partial\chi}\right\rangle=\eta\left(M\left\langle\bar{k},m\right\rangle-\frac{1}{\gamma}\right) \ \rightarrow \quad \left\langle\bar{k},m\right\rangle=\frac{1}{\gamma M} \ , \\ 1 &= \left\langle dt,\frac{\partial}{\partial t}\right\rangle= \ \eta\left(N\left\langle\bar{k},n\right\rangle+\frac{\mathcal{N}}{\gamma M}\right) \rightarrow \quad \left\langle\bar{k},n\right\rangle=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{\eta}-\frac{\mathcal{N}}{\gamma M}\right) \ . \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} k_a &= -\left(k_b n^b\right)n_a+\left(k_b m^b\right)m_a \ , \\ l_a &= -\left(l_b n^b\right)n_a+\left(l_b m^b\right)m_a \ , \end{aligned}$$

belátható, hogy

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \langle \bar{k}, n \rangle \bar{n} + \langle \bar{k}, m \rangle \bar{m} \ ,\\ \bar{l} &= \langle \bar{l}, n \rangle \bar{n} + \langle \bar{l}, m \rangle \bar{m} \ ,\end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{\mathcal{N}}{\gamma M}\right)\bar{n} + \frac{1}{\gamma M}\bar{m} \ ,\\ \bar{l} &= \frac{1}{\beta M}\left(-\frac{\mathcal{N}}{N}\bar{n} + \bar{m}\right) \ . \qquad (2.23)\end{aligned}$$

Az $\langle f^{\mathbf{B}}, f_{\mathbf{A}} \rangle = \delta^{\mathbf{B}}_{\mathbf{A}}$ dualitási relációk felhasználásával pedig levezethetők az alábbiak:

$$1 = \langle \bar{l}, l \rangle = \frac{1}{(\beta M)^2}\left(\frac{N^2}{N^2} - \frac{\mathcal{N}^2}{N^2}\right) \rightarrow \quad \beta M = \frac{\left(N^2 - \mathcal{N}^2\right)^{1/2}}{N} \qquad (2.24)$$

(a gyökvonásnál a $sgn\,(\beta) = sgn\,(M)$ feltevés értelmében a pozitív gyököt választottuk),

$$0 = \langle \bar{l}, k \rangle = \frac{-\mathcal{N}}{\beta M N^2}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{\mathcal{N}}{\gamma M} + \frac{N^2}{\gamma M \mathcal{N}}\right) \ \rightarrow \ \frac{1}{\eta} = \frac{\mathcal{N}^2 - N^2}{\gamma M \mathcal{N}} \qquad (2.25)$$

(ebből $sgn\,(\gamma) = -sgn\,(M\mathcal{N})$ következik), végül

$$1 = \langle \bar{k}, k \rangle = \frac{1}{(\gamma M)^2}\frac{(N^2 - \mathcal{N}^2)}{\mathcal{N}^2} \ \rightarrow \ -\gamma M = \frac{\left(N^2 - \mathcal{N}^2\right)^{1/2}}{\mathcal{N}} \qquad (2.26)$$

(a gyökvonásnál a negatív gyököt választottuk $sgn\,(\gamma) = -sgn\,(M\mathcal{N})$ miatt).

A (2.24), (2.25), (2.26) összefüggéseket visszahelyettesítve a (2.23) egyenletekbe:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{N\bar{n} - \mathcal{N}\bar{m}}{\left(N^2 - \mathcal{N}^2\right)^{1/2}} \ ,\\ \bar{l} &= \frac{-\mathcal{N}\bar{n} + N\bar{m}}{\left(N^2 - \mathcal{N}^2\right)^{1/2}}\end{aligned}$$

adódik, amiből

$$\begin{pmatrix} k_a \\ l_a \end{pmatrix} = \left(N^2 - \mathcal{N}^2\right)^{-1/2}\begin{pmatrix} N & \mathcal{N} \\ \mathcal{N} & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_a \\ m_a \end{pmatrix}$$

következik. Bevezetve a $\mathcal{N} = N \tanh\phi$ jelölést, a transzformáció Lorentz-forgatásnak felel meg:

$$\begin{pmatrix} k_a \\ l_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_a \\ m_a \end{pmatrix} \ . \qquad (2.27)$$

Bevezetjük még a további egyszerűsítő jelöléseket is: $\mathfrak{s} = \sinh\phi$ és $\mathfrak{c} = \cosh\phi$, így $\mathcal{N} = (\mathfrak{s}/\mathfrak{c})\,N$. A felsőindexes vektorokra ugyanaz a transzformáció vonatkozik:

$$\begin{pmatrix} k^a \\ l^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{c} & \mathfrak{s} \\ \mathfrak{s} & \mathfrak{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n^a \\ m^a \end{pmatrix} \ , \qquad (2.28)$$

a bázis-formákra pedig az inverz-transzponált Lorentz-transzformáció:

$$\begin{pmatrix} \bar{k} \\ \bar{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{c} & -\mathfrak{s} \\ -\mathfrak{s} & \mathfrak{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{m} \end{pmatrix} .$$

Az $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolatát a következő fejezet végén lesz teljes, az $F^{\mathbf{j}}$ és $G^{\mathbf{j}}$ formák közötti összefüggés megadásával.

2.3. A $k^a, l^a, \Sigma_{t\chi}$ felbontás

2.3.1. Az $e^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolata

A (2.4), (2.5) és (2.28) felhasználásával levezethetők a fejlődésvektorok $f_{\mathbf{A}}$-bázisbeli felbontásai:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = \frac{N}{\mathfrak{c}} k^a + N^{\mathbf{i}} G^a_{\mathbf{i}} , \tag{2.29}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a = M\left(-\mathfrak{s} k^a + \mathfrak{c} l^a\right) + M^{\mathbf{i}} G^a_{\mathbf{i}} . \tag{2.30}$$

A (2.20)-(2.22) egyenletekben szereplő β, γ, η, $B^{\mathbf{i}}_t$, $B^{\mathbf{i}}_\chi$ és $(B^{-1})^{\mathbf{i}}_{\mathbf{j}}$ együtthatókra eddig a (2.24)-(2.26) kifejezéseket határoztuk meg:

$$\frac{1}{\beta} = M\mathfrak{c} , \quad \frac{1}{\eta} = \frac{N}{\mathfrak{c}} , \quad \frac{1}{\gamma} = -M\mathfrak{s} ,$$

így

$$\begin{aligned} \bar{k} &= -M\mathfrak{s} d\chi + \frac{N}{\mathfrak{c}} dt , \\ \bar{l} &= M\mathfrak{c} d\chi , \end{aligned} \tag{2.31}$$

és

$$\begin{aligned} d\chi &= \frac{\bar{l}}{M\mathfrak{c}} , \\ dt &= \frac{1}{N}\left(\mathfrak{c}\bar{k} + \mathfrak{s}\bar{l}\right) . \end{aligned}$$

A többi együttható meghatározásához felhasználjuk még (2.22) összefüggést, így kapjuk, hogy:

$$E^{\mathbf{j}} = B^{\mathbf{j}}_{\mathbf{i}} \left[G^{\mathbf{i}} - B^{\mathbf{i}}_t \frac{1}{N}\left(\mathfrak{c}\bar{k} + \mathfrak{s}\bar{l}\right) - B^{\mathbf{i}}_\chi \frac{\bar{l}}{M\mathfrak{c}} \right]$$

valamint a szükséges $\left\langle e^{\mathbf{B}}, e_{\mathbf{A}} \right\rangle = \delta^{\mathbf{B}}_{\mathbf{A}} = \left\langle g^{\mathbf{B}}, g_{\mathbf{A}} \right\rangle$ dualitási feltételekből:

$$\begin{aligned} \delta^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} &= \left\langle E^{\mathbf{j}}, E_{\mathbf{k}} \right\rangle = B^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} \rightarrow \quad B^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} = \delta^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} , \\ 0 &= \left\langle E^{\mathbf{j}}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = N^{\mathbf{j}} - B^{\mathbf{j}}_t \quad \rightarrow \quad B^{\mathbf{j}}_t = N^{\mathbf{j}} , \\ 0 &= \left\langle E^{\mathbf{j}}, \frac{\partial}{\partial \chi} \right\rangle = M^{\mathbf{j}} - B^{\mathbf{j}}_\chi \rightarrow \quad B^{\mathbf{j}}_\chi = M^{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

(a többi dualitási reláció triviálisan teljesül).

Összefoglalva, a (2.31) és a

$$G^{\mathbf{j}} = N^{\mathbf{j}} dt + M^{\mathbf{j}} d\chi + E^{\mathbf{j}} = F^{\mathbf{j}} \tag{2.32}$$

teszi teljessé az $e^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok kapcsolatát, valamint mind az $e^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$, mind az $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok közötti összefüggéseket is. Továbbá eredményként kaptuk, hogy az $F^{\mathbf{j}}$ és $G^{\mathbf{j}}$ formák megegyeznek. Ennek az az oka, hogy a shift vektorok közösek az $f^{\mathbf{B}}$ és a $g^{\mathbf{B}}$ bázisokban.

2.3.2. Az $\mathfrak{M}_\chi$ felületsereg létezése és l^a örvénymentessége

A bizonyításhoz szükség lesz a (2.29) és (2.30) egyenletekből kifejezett k^a, l^a vektorokra:

$$\begin{aligned} k^a &= \frac{\mathfrak{c}}{N}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^{\mathbf{i}} G^a_{\mathbf{i}} \ , &(2.33)\\ l^a &= \frac{\mathfrak{s}}{N}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^{\mathbf{i}}\right) G^a_{\mathbf{i}} \ . &(2.34)\end{aligned}$$

Ezt követően vizsgáljuk meg az k^a és $G^a_{\mathbf{j}}$ bázisvektorok Lie-zárójelét, felhasználva fenti, valamint (2.3) összefüggéseket:

$$\begin{aligned} [k, G_{\mathbf{j}}]^a &= k^b \partial_b \delta^a_{\mathbf{j}} - \delta^b_{\mathbf{j}} \partial_b k^a = -\partial_{\mathbf{j}} k^a = -\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\delta^a_t - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^{\mathbf{i}} \delta^a_{\mathbf{i}}\right)\\ &= -\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right)\delta^a_t + \left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right) N^{\mathbf{i}} + \frac{\mathfrak{c}}{N}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}}\right]\delta^a_{\mathbf{i}}\\ &= -\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right)\left(\frac{N}{\mathfrak{c}} k^a + N^{\mathbf{i}} G^a_{\mathbf{i}}\right) + \left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right) N^{\mathbf{i}} + \frac{\mathfrak{c}}{N}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}}\right] G^a_{\mathbf{i}}\\ &= -\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right)\frac{N}{\mathfrak{c}} k^a + \frac{\mathfrak{c}}{N}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}} G^a_{\mathbf{i}} \ , \end{aligned}$$

azaz

$$[k, G_{\mathbf{j}}]^a = \partial_{\mathbf{j}}\left(\ln\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) k^a + \frac{\mathfrak{c}}{N}\left(\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}}\right) G^a_{\mathbf{i}} \ , \tag{2.35}$$

Mivel a Lie-zárójelben az l^a irányú tag eltűnik, a Frobenius-tétel értelmében a $\{k, G_{\mathbf{i}}\}$ vektorok az $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelület érintőterét feszítik ki. A Frobenius-tétel duális megfogalmazása értelmében így l^a örvénymentes.

A (2.29) felbontásból pedig az látszik, hogy $\partial/\partial t$ érintője lesz az $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületnek.

2.3.3. A $g_{\mathbf{B}}$ bázis algebrája és k^a örvényessége

A $g_{\mathbf{B}}$ bázisvektorok algebráját a (2.35), a $[G_{\mathbf{i}}, G_{\mathbf{j}}]^a = \delta_{\mathbf{ij}}$ és a következőkben számolandó két Lie-zárójel adják meg. Ezek közül az első:

$$\begin{aligned} [l, G_{\mathbf{j}}]^a &= l^b \partial_b \delta^a_{\mathbf{j}} - \delta^b_{\mathbf{j}} \partial_b l^a = -\partial_{\mathbf{j}} l^a = -\partial_{\mathbf{j}}\left[\frac{\mathfrak{s}}{N}\delta^a_t + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\delta^a_\chi - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^{\mathbf{i}}\right)\delta^a_{\mathbf{i}}\right]\\ &= -\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right)\delta^a_t - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{\mathfrak{c}M}\right)\delta^a_\chi + \left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) N^{\mathbf{i}} + \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{\mathfrak{c}M}\right) M^{\mathbf{i}} + \frac{\mathfrak{s}}{N}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}}\right]\delta^a_{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right)\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}k^a + N^{\mathbf{i}}G^a_{\mathbf{i}}\right) - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{\mathfrak{c}M}\right)\left(M\left(-\mathfrak{s}k^a + \mathfrak{c}l^a\right) + M^{\mathbf{i}}G^a_{\mathbf{i}}\right) \\
&\quad + \left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right)N^{\mathbf{i}} + \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{\mathfrak{c}M}\right)M^{\mathbf{i}} + \frac{\mathfrak{s}}{N}\partial_{\mathbf{j}}N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}\right]G^a_{\mathbf{i}} \\
&= -\frac{N}{\mathfrak{c}^2M}\left[\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right)\mathfrak{c}M + \partial_{\mathbf{j}}\left(\mathfrak{c}M\right)\frac{\mathfrak{s}}{N}\right]k^a - \partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{\mathfrak{c}M}\right)M\mathfrak{c}l^a + \left[\frac{\mathfrak{s}}{N}\partial_{\mathbf{j}}N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}\right]G^a_{\mathbf{i}} \ ,
\end{aligned}
$$

azaz

$$
[l, G_{\mathbf{j}}]^a = -\frac{N}{\mathfrak{c}^2M}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right)k^a + \partial_{\mathbf{j}}\ln\left(\mathfrak{c}M\right)l^a + \left[\frac{\mathfrak{s}}{N}\partial_{\mathbf{j}}N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}\right]G^a_{\mathbf{i}} \ . \tag{2.36}
$$

A $g_{\mathbf{B}}$ bázis $\{l, G_{\mathbf{j}}\}$ vektorai tehát nem feszítenek ki hiperfelületet-tangensteret, mivel (2.36) Lie-zárójelük nem záródik. Ezért k^a is örvényes vektor (kivéve az $\mathfrak{s} = 0 = \mathcal{N} = N\tanh\phi$ esetet), akárcsak m^a az $f_{\mathbf{B}}$ bázisban.

Az utolsó hiányzó Lie-zárójel pedig:

$$
\begin{aligned}
[k, l]^a &= k^b\partial_b l^a - l^b\partial_b k^a \\
&= \left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\delta^b_t - \frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{j}}\delta^b_{\mathbf{j}}\right)\partial_b\left[\frac{\mathfrak{s}}{N}\delta^a_t + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\delta^a_\chi - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N}N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}M^{\mathbf{i}}\right)\delta^a_{\mathbf{i}}\right] \\
&\quad - \left[\frac{\mathfrak{s}}{N}\delta^b_t + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\delta^b_\chi - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N}N^{\mathbf{j}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}M^{\mathbf{j}}\right)\delta^b_{\mathbf{j}}\right]\partial_b\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\delta^a_t - \frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right) \\
&= \frac{\mathfrak{c}}{N}\partial_t\left[\frac{\mathfrak{s}}{N}\delta^a_t + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\delta^a_\chi - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N}N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}M^{\mathbf{i}}\right)\delta^a_{\mathbf{i}}\right] \\
&\quad - \frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left[\frac{\mathfrak{s}}{N}\delta^a_t + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\delta^a_\chi - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N}N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}M^{\mathbf{i}}\right)\delta^a_{\mathbf{i}}\right] \\
&\quad - \frac{\mathfrak{s}}{N}\partial_t\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\delta^a_t - \frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right) - \frac{1}{\mathfrak{c}M}\partial_\chi\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\delta^a_t - \frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\mathfrak{s}}{N}N^{\mathbf{j}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}M^{\mathbf{j}}\right)\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\delta^a_t - \frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{i}}\delta^a_{\mathbf{i}}\right) \\
&= \left[\frac{\mathfrak{c}}{N}\partial_t\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) - \frac{\mathfrak{s}}{N}\partial_t\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right) - \frac{1}{\mathfrak{c}M}\partial_\chi\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right) - \frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\mathfrak{s}}{N}N^{\mathbf{j}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}M^{\mathbf{j}}\right)\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right)\right]\delta^a_t + \left[\frac{\mathfrak{c}}{N}\partial_t\left(\frac{1}{\mathfrak{c}M}\right) - \frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{\mathfrak{c}M}\right)\right]\delta^a_\chi \\
&\quad + \left[-\frac{\mathfrak{c}}{N}\partial_t\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right)N^{\mathbf{i}} + \frac{\mathfrak{s}}{N}\partial_t\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right)N^{\mathbf{i}} - \frac{\mathfrak{c}}{N}\partial_t\left(\frac{1}{\mathfrak{c}M}\right)M^{\mathbf{i}} - \frac{1}{MN}\partial_t M^{\mathbf{i}}\right]\delta^a_{\mathbf{i}} \\
&\quad + \left[\frac{1}{\mathfrak{c}M}\partial_\chi\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right)N^{\mathbf{i}} + \frac{\mathfrak{c}}{N}\frac{1}{\mathfrak{c}M}\partial_\chi N^{\mathbf{i}}\right]\delta^a_{\mathbf{i}} \\
&\quad + \left\{\left[\frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) - \left(\frac{\mathfrak{s}}{N}N^{\mathbf{j}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}M^{\mathbf{j}}\right)\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{c}}{N}\right)\right]N^{\mathbf{i}}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathfrak{c}}{N}N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{\mathfrak{c}M}\right)M^{\mathbf{i}} - \frac{1}{MN}\left(M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}N^{\mathbf{i}} - N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}M^{\mathbf{i}}\right)\right\}\delta^a_{\mathbf{i}} \ ,
\end{aligned}
$$

amely a $g_{\mathbf{B}}$ bázisra való visszatérés után a következőt adja

$$\begin{aligned}
[k,l]^a = & \left\{\partial_t\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) - N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) + \frac{\mathfrak{s}}{N}\left[\partial_t \ln(MN) - N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\ln(MN)\right]\right. \\
& \left. + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) - M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right]\right\} k^a \\
& + \frac{1}{MN}\left[-\partial_t(\mathfrak{c}M) + N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}(\mathfrak{c}M)\right] l^a \\
& + \frac{1}{MN}\left[-\partial_t M^{\mathbf{i}} + \partial_\chi N^{\mathbf{i}} - M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}} + N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}}\right] G^a_{\mathbf{i}} \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Ezzel befejeztük a $g_{\mathbf{B}}$ bázis algebrájának számolását, melyet az alábbi táblázatban foglalunk össze:

	$[k,l]^a$	$[k,G_{\mathbf{j}}]^a$	$[l,G_{\mathbf{j}}]^a$
k^a	$\left\{\partial_t\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) - N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) + \frac{\mathfrak{s}}{N}\left[\partial_t \ln(MN) - N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\ln(MN)\right] + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) - M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right]\right\}$	$\partial_{\mathbf{j}}\left(\ln\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)$	$-\frac{N}{\mathfrak{c}^2 M}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right)$
l^a	$\frac{1}{MN}\left[-\partial_t(\mathfrak{c}M) + N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}(\mathfrak{c}M)\right]$	0	$\partial_{\mathbf{j}}\ln(\mathfrak{c}M)$
$G^a_{\mathbf{i}}$	$\frac{1}{MN}\left[-\partial_t M^{\mathbf{i}} + \partial_\chi N^{\mathbf{i}} - M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}} + N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}}\right]$	$\frac{\mathfrak{c}}{N}\left(\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}}\right)$	$\frac{\mathfrak{s}}{N}\partial_{\mathbf{j}} N^{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\partial_{\mathbf{j}} M^{\mathbf{i}}$

Megjegyezzük, hogy amennyiben a k^a, l^a vektorok merőlegesek egymásra, azaz $\mathcal{N} = 0 = \mathfrak{s}$ és $\mathfrak{c} = 1$, a fenti és a 2.1.3 alfejezet végén megadott táblázatokban megadott algebrák azonosak, megegyeznek a [8, 9] munkákban használtakkal.

2.4. Az $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelület-normálisok örvénymentességének következményei

A 2.1.2 és 2.3.2 alfejezetben megmutattuk a Frobenius-tételt alkalmazva (a Lie-zárójel záródásával), hogy $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületek léteznek. Bevezetjük most a 4-es metrika $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületeken indukált

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{ab} &= m_a m_b + g_{ab} , \\
\bar{g}_{ab} &= -k_a k_b + g_{ab}
\end{aligned}$$

metrikáit.

Az n^a (l^a) vektor merőleges az $\mathcal{S}_t$ ($\mathfrak{M}_\chi$) hiperfelületre. Az 7 függelékben ismertetett duális Frobenius-tétel értelmében ekkor az n^a és l^a vektorok 3-dimenziós örvénytenzorai eltűnnek:

$$\hat{\omega}^{(\mathbf{n})}_{ab} \equiv \hat{g}^c_{[a}\hat{g}^d_{b]}\tilde{\nabla}_c n_d = 0 , \qquad (2.38)$$

$$\bar{\omega}^{(\mathbf{l})}_{ab} \equiv \bar{g}^c_{[a}\bar{g}^d_{b]}\tilde{\nabla}_c l_d = 0 . \qquad (2.39)$$

Ezekből közvetlenül láthatók a következő azonosságok:

$$\begin{aligned}
\hat{g}^c_a \hat{g}^d_b \tilde{\nabla}_c n_d &= \hat{g}^c_a \hat{g}^d_b \tilde{\nabla}_d n_c , \\
\bar{g}^c_a \bar{g}^d_b \tilde{\nabla}_c l_d &= \bar{g}^c_a \bar{g}^d_b \tilde{\nabla}_d l_c . \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

A (2.38) összefüggés átírható a következő alakba:

$$\begin{aligned}
0 &= 2\hat{g}^c_{[a}\hat{g}^d_{b]}\tilde{\nabla}_c n_d = 2\hat{g}^c_a\hat{g}^d_b\tilde{\nabla}_{[c}n_{d]} = (m_a m^c + g^c_a)\left(m_b m^d + g^d_b\right)\left(\tilde{\nabla}_c n_d - \tilde{\nabla}_d n_c\right) \\
&= g^c_a g^d_b\tilde{\nabla}_c n_d - g^c_a g^d_b\tilde{\nabla}_d n_c + m_a m^c g^d_b\tilde{\nabla}_c n_d - m_a m^c g^d_b\tilde{\nabla}_d n_c \\
&\quad + m_b m^d g^c_a\tilde{\nabla}_c n_d - m_b m^d g^c_a\tilde{\nabla}_d n_c \\
&= 2g^c_{[a}g^d_{b]}\tilde{\nabla}_c n_d + m_a m^c g^d_b\tilde{\nabla}_c n_d - m_a m^d g^c_b\tilde{\nabla}_c n_d + m_b m^d g^c_a\tilde{\nabla}_c n_d - m_b m^c g^d_a\tilde{\nabla}_c n_d \\
&= 2g^c_{[a}g^d_{b]}\tilde{\nabla}_c n_d + 2m^c m_{[a}g^d_{b]}\tilde{\nabla}_c n_d - 2m^d m_{[a}g^c_{b]}\tilde{\nabla}_c n_d \\
&= 2g^c_{[a}g^d_{b]}\tilde{\nabla}_c n_d + 2m_{[a}g^d_{b]}m^c\left(\tilde{\nabla}_c n_d - \tilde{\nabla}_d n_c\right) \; . \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Hasonlóan, a (2.39) összefüggés is átírható:

$$\begin{aligned}
0 &= 2\bar{g}^c_{[a}\bar{g}^d_{b]}\tilde{\nabla}_c l_d = 2\bar{g}^c_a\bar{g}^d_b\tilde{\nabla}_{[c}l_{d]} \\
&= (g^c_a - k_a k^c)\left(g^d_b - k_b k^d\right)\left(\tilde{\nabla}_c l_d - \tilde{\nabla}_d l_c\right) \\
&= \left(g^c_a g^d_b - g^c_a k_b k^d - g^d_b k_a k^c + k_a k^c k_b k^d\right)\left(\tilde{\nabla}_c l_d - \tilde{\nabla}_d l_c\right) \\
&= g^c_a g^d_b\tilde{\nabla}_c l_d - g^c_a g^d_b\tilde{\nabla}_d l_c - g^c_a k_b k^d\tilde{\nabla}_c l_d + g^c_a k_b k^d\tilde{\nabla}_d l_c \\
&\quad - g^d_b k_a k^c\tilde{\nabla}_c l_d + g^d_b k_a k^c\tilde{\nabla}_d l_c + k_a k^c k_b k^d\tilde{\nabla}_c l_d - k_a k^c k_b k^d\tilde{\nabla}_d l_c \\
&= 2g^c_{[a}g^d_{b]}\tilde{\nabla}_c l_d + 2k^c g^d_{[a}k_{b]}\left(\tilde{\nabla}_c l_d - \tilde{\nabla}_d l_c\right) \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

alakba. A fenti összefüggések m^b, illetve k^b kontrakciói újabb azonosságokat adnak a 3.2 alfejezetben szerepet játszó $\mathcal{K}_a \equiv g^c_a m^d\tilde{\nabla}_c n_d$ és $\mathcal{L}_a \equiv g^c_a k^d\tilde{\nabla}_c l_d$ normális fundamentális formákra:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_a &\equiv g^c_a m^d\tilde{\nabla}_c n_d = g^c_a m^d\tilde{\nabla}_d n_c \; , \\
\mathcal{L}_a &\equiv g^c_a k^d\tilde{\nabla}_c l_d = g^c_a k^d\tilde{\nabla}_d l_c \; . \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

A (2.41) és (2.42) összefüggések $\Sigma_{t\chi}$ felületre eső projekciók pedig az alábbiakban értelmezett 2-dimenziós örvénytenzorok eltűnését mutatják:

$$\omega^{(n)}_{ab} \equiv g^c_{[a}g^d_{b]}\tilde{\nabla}_c n_d = 0 \; , \qquad (2.44)$$

$$\omega^{(l)}_{ab} \equiv g^c_{[a}g^d_{b]}\tilde{\nabla}_c l_d = 0 \; . \qquad (2.45)$$

A (2.40) és (2.43) összefüggéseket a következő fejezetben használjuk majd fel, az $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületek kinematikai mennyiségei kapcsolatának vizsgálatakor. A (2.44) és (2.45) összefüggésekből pedig a 3.2 alfejezetben szintén szerepet játszó külső görbületek szimmetriája látszik:

$$\begin{aligned}
K_{ab} &\equiv g^c_a g^d_b\tilde{\nabla}_c n_d = g^c_{(a}g^d_{b)}\tilde{\nabla}_c n_d = K_{ba} \; . \\
L_{ab} &\equiv g^c_a g^d_b\tilde{\nabla}_c l_d = g^c_{(a}g^d_{b)}\tilde{\nabla}_c l_d = L_{ba} \; . \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Ez a szimmetria függetlenül is belátható: az első (2.13) és a második (2.31) összefüggésekből a normálisok

$$\begin{aligned}
n_a &= -N\tilde{\nabla}_a t \; , \\
l_a &= M\mathfrak{c}\tilde{\nabla}_a \chi \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

alakban írhatók. Ezeket behelyettesítve a külső görbületek (2.46) definícióiba, nyilvánvalóan szimmetrikus kifejezésekhez jutunk.

2.5. A k^a és m^a bázisvektorok 2-dimenziós örvénymentessége

Állítás:

Bár a k^a és m^a (a teljes $\mathcal{B}$ érintőterében) örvényes vektorok, a $\Sigma_{t\chi}$ normálisaiként (a $\{k^a, G^a_{\mathbf{i}}\}$, illetve $\{m^a, F^a_{\mathbf{i}}\}$ érintőterekben) örvénymentesek lesznek:

$$\omega^{(\mathbf{k})}_{ab} \equiv g^c_{[a} g^d_{b]} \tilde{\nabla}_c k_d = 0 \ ,$$

$$\omega^{(\mathbf{m})}_{ab} \equiv g^c_{[a} g^d_{b]} \tilde{\nabla}_c m_d = 0 \ .$$

Bizonyítás:

A második (2.13) és a első (2.31) összefüggésből a k^a és m^a vektorokra

$$\begin{aligned} k_a &= M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_a\chi - \frac{N}{\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_a t \ , \\ m_a &= N\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_a t \ + M\tilde{\nabla}_a\chi \end{aligned} \tag{2.48}$$

kifejezések adódnak. Segítségükkel

$$\begin{aligned} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c k_d &= g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\chi - \frac{N}{\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_d t \right) \\ &= g^c_a g^d_b \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d\chi - \frac{N}{\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_c\tilde{\nabla}_d t \right) + g^c_a g^d_b \left[\tilde{\nabla}_c (M\mathfrak{s})\,\tilde{\nabla}_d\chi - \tilde{\nabla}_c \left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) \tilde{\nabla}_d t \right] \\ &= g^c_a g^d_b \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c t \right) + g^c_a g^d_b \left[\frac{1}{M\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_c (M\mathfrak{s})\, l_d + \frac{1}{N}\tilde{\nabla}_c \left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) n_d \right] \\ &= g^c_a g^d_b \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c t \right) \\ &= g^c_a g^d_b \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c t \right) + g^c_a g^d_b \left[\frac{1}{M\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_d (M\mathfrak{s})\, l_c + \frac{1}{N}\tilde{\nabla}_d \left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) n_c \right] \\ &= g^c_a g^d_b \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_d\tilde{\nabla}_c t \right) + g^c_a g^d_b \left[\tilde{\nabla}_d (M\mathfrak{s})\,\tilde{\nabla}_c\chi - \tilde{\nabla}_d \left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) \tilde{\nabla}_c t \right] \\ &= g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_d \left(M\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_c\chi - \frac{N}{\mathfrak{c}}\tilde{\nabla}_c t \right) \\ &= g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_d k_c = g^c_b g^d_a \tilde{\nabla}_c k_d \\ &\rightarrow \quad \omega^{(\mathbf{k})}_{ab} \equiv g^c_{[a} g^d_{b]} \tilde{\nabla}_d k_c = 0 \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c m_d &= g^c_b g^d_a \tilde{\nabla}_c m_d \\ &\rightarrow \quad \omega^{(\mathbf{m})}_{ab} \equiv g^c_{[a} g^d_{b]} \tilde{\nabla}_d m_c = 0 \ . \end{aligned}$$

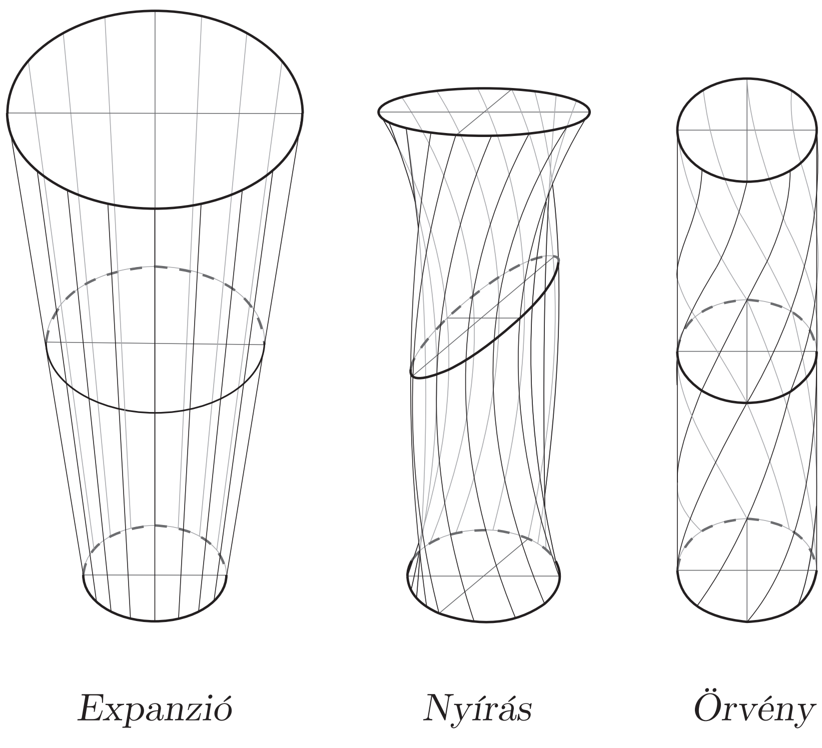
A levezetésben felhasználtuk (2.47) összefüggéseket is. Q.E.D.

A fenti összefüggések segítségével belátható, hogy a $\Sigma_{t\chi}$ felület k^a és m^a normálisai is meghatároznak két külső görbületet:

$$
\begin{aligned}
K^*_{ab} &\equiv g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c k_d = g^c_{(a} g^d_{b)} \tilde{\nabla}_c k_d = K^*_{ba} \ . \\
L^*_{ab} &\equiv g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c m_d = g^c_{(a} g^d_{b)} \tilde{\nabla}_c m_d = L^*_{ba} \ .
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

2.6. A k^a és m^a bázisvektorok 3-dimenziós örvényei

Egy kongruencia (görbesereg) jól jellemezhető kinematikai jellemzőkkel. Ezek közül az expanzió a kör keresztmetszetű kongruencia kerületének növekedését vagy csökkenését, a nyírás a kör ellipszissé deformálását (ilyen a gravitációs hullámok hatása is), az örvény pedig a tengely körüli elfordulását okozza (2.2 ábra). A három nevezett mennyiségből ún. optikai skalárok értelmezhetők. Nem merőleges kettős fóliázás esetén látni fogjuk, hogy a 2-dimenziós örvények eltűnnek, és a nyírással, expanzióval a külső görbületek állnak kapcsolatban.



2.2. ábra. Kongruencia expanziója, nyírása és örvénye. A kongruenciát megadó vektormező kovariáns deriváltjának kongruenciára merőleges projekciója szimmetrikus és antiszimmetrikus részekre bontható. Előbbinek a spúrja, illetve spúrmentes részei az expanzió és a nyírás, utóbbi az örvény. Örvénymentes esetben a szimmetrikus rész a külső görbület.

A k^a és m^a bázisvektorok örvényének tárgyalásához 2 újabb 3-dimenziós metrikát kell bevezetnünk:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{ab} &= -n_a n_b + g_{ab} \ , \\ \hat{h}_{ab} &= l_a l_b + g_{ab} \ . \end{aligned}$$

A 3-dimenziós örvényeket következőképpen értelmezzük:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^{(\mathbf{k})}_{ab} &\equiv \hat{h}^c_{[a} \hat{h}^d_{b]} \tilde{\nabla}_c k_d \neq 0 \ , \\ \bar{\omega}^{(\mathbf{m})}_{ab} &\equiv \bar{h}^c_{[a} \bar{h}^d_{b]} \tilde{\nabla}_c m_d \neq 0 \ . \end{aligned}$$

Elvégezzük ezek 2+1 felbontását:

$$\begin{aligned} 2\hat{\omega}^{(\mathbf{k})}_{ab} &= 2\hat{h}^c_{[a} \hat{h}^d_{b]} \tilde{\nabla}_c k_d = 2\hat{h}^c_a \hat{h}^d_b \tilde{\nabla}_{[c} k_{d]} = \left(l_a l^c + g^c_a\right)\left(l_b l^d + g^d_b\right)\left(\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c\right) \\ &= g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c k_d - g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_d k_c + l_a l^c g^d_b \tilde{\nabla}_c k_d - l_a l^c g^d_b \tilde{\nabla}_d k_c \\ &\quad + l_b l^d g^c_a \tilde{\nabla}_c k_d - l_b l^d g^c_a \tilde{\nabla}_d k_c \\ &= 2 g^c_{[a} g^d_{b]} \tilde{\nabla}_c k_d + 2 l^c l_{[a} g^d_{b]} \tilde{\nabla}_c k_d - 2 l^d l_{[a} g^c_{b]} \tilde{\nabla}_c k_d \\ &= 2 g^c_{[a} g^d_{b]} \tilde{\nabla}_c k_d + 2 l_{[a} g^d_{b]} l^c \left(\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c\right) \ , \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} 2\bar{\omega}^{(\mathbf{m})}_{ab} &= 2\bar{h}^c_{[a} \bar{h}^d_{b]} \tilde{\nabla}_c m_d = 2\bar{h}^c_a \bar{h}^d_b \tilde{\nabla}_{[c} m_{d]} \\ &= \left(g^c_a - n_a n^c\right)\left(g^d_b - n_b n^d\right)\left(\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c\right) \\ &= \left(g^c_a g^d_b - g^c_a n_b n^d - g^d_b n_a n^c + n_a n^c n_b n^d\right)\left(\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c\right) \\ &= g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c m_d - g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_d m_c - g^c_a n_b n^d \tilde{\nabla}_c m_d + g^c_a n_b n^d \tilde{\nabla}_d m_c \\ &\quad - g^d_b n_a n^c \tilde{\nabla}_c m_d + g^d_b n_a n^c \tilde{\nabla}_d m_c \\ &= 2 g^c_{[a} g^d_{b]} \tilde{\nabla}_c m_d + 2 n^c g^d_{[a} n_{b]} \left(\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c\right) \ . \end{aligned}$$

Az előző alfejezetben bizonyított 2-dimenziós örvénymentességek miatt a k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvénytenzorainak kifejezései

$$\begin{aligned} \hat{\omega}^{(\mathbf{k})}_{ab} &= l_{[a} g^d_{b]} l^c \left(\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c\right) \ , \\ \bar{\omega}^{(\mathbf{m})}_{ab} &= -n_{[a} g^d_{b]} n^c \left(\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c\right) \end{aligned} \tag{2.50}$$

lesznek.

Az (2.50) összefüggések l^b, illetve n^b kontrakciói megadják a k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvénytenzorainak nemeltűnő komponenseit. A 3.2 alfejezetben szintén szerepet játszó $\mathcal{K}^*_a \equiv g^c_a l^d \tilde{\nabla}_c k_d$ és $\mathcal{L}^*_a \equiv -g^c_a n^d \tilde{\nabla}_c m_d$ mennyiségeket felhasználva a 3-dimenziós örvénytenzorok a

$$\begin{aligned} 2\hat{\omega}^{(\mathbf{k})}_{ab} l^b &= -g^d_a l^c \left(\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c\right) = -\mathcal{K}^*_a - g^d_a k^c \tilde{\nabla}_d l_c = -\mathcal{K}^*_a + \mathcal{L}_a \ , \\ 2\bar{\omega}^{(\mathbf{m})}_{ab} n^b &= -g^d_a n^c \left(\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c\right) = \mathcal{L}^*_a - g^d_a m^c \tilde{\nabla}_d n_c = \mathcal{L}^*_a - \mathcal{K}_a \ . \end{aligned} \tag{2.51}$$

alakban adhatók meg. Felfoghatók ezek az összefüggések úgy is, mint a $\mathcal{K}_a^*$ és $\mathcal{L}_a^*$ mennyiségek kifejezései a $\mathcal{K}_a$ és $\mathcal{L}_a$ normális fundamentális formákkal, valamint a k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvénytenzoraival:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_a^* &= \mathcal{L}_a - 2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} l^b \ , \\ \mathcal{L}_a^* &= \mathcal{K}_a + 2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} n^b \ . \end{aligned} \tag{2.52}$$

3. fejezet

A kovariáns deriváltak 2+1+1 felbontásai

3.1. A $\Sigma_{t\chi}$ felületen indukált kovariáns derivált

Egy tetszőleges $\tilde{T}^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_r}$ 4-es tenzor kovariáns deriváltját a $\Sigma_{t\chi}$ hiperfelületre a g^b_a indukált metrika segítségével vetítjük:

$$D_a\tilde{T}^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_q} \equiv g^c_a g^{a_1}_{c_1}\dots g^{a_r}_{c_r} g^{d_1}_{b_1}\dots g^{d_q}_{b_q}\tilde{\nabla}_c\tilde{T}^{c_1\dots c_r}_{d_1\dots d_q} \ , \tag{3.1}$$

Megmutatható, hogy amennyiben $\tilde{T}^{a_1\dots a_r}_{b_1\dots b_r}$ a $\Sigma_{t\chi}$ hiperfelület tangens és kotangens tereinek szorzatán értelmezett, a (3.1) kifejezés pontosan a g_{ab} indukált metrikával kompatibilis konnexióval képezett kovariáns derivált lesz. Ez könnyen belátható, ha felhasználjuk a $\tilde{\nabla}_a\tilde{g}_{cb} = 0$ feltételt, valamint a következő projekciós tulajdonságokat

$$\begin{aligned}
g^a_b n_a &= \left(\tilde{g}^a_b + n^a n_b - m^a m_b\right) n_a = \tilde{g}^a_b n_a + n_a n^a n_b - n_a m^a m_b = n_b - n_b = 0 \ , \\
g^a_b m_a &= \left(\tilde{g}^a_b + n^a n_b - m^a m_b\right) m_a = \tilde{g}^a_b m_a + m_a n^a n_b - m_a m^a m_b = m_b - m_b = 0 \ , \\
g^a_b k_a &= \left(\tilde{g}^a_b + k^a k_b - l^a l_b\right) k_a = \tilde{g}^a_b k_a + k_a k^a k_b - k_a l^a l_b = k_b - k_b = 0 \ , \\
g^a_b l_a &= \left(\tilde{g}^a_b + k^a k_b - l^a l_b\right) l_a = \tilde{g}^a_b l_a + l_a k^a k_b - l_a l^a l_b = l_b - l_b = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

melyekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\nabla}_a\left(g_{bc}n^c\right) = g_{bc}\tilde{\nabla}_a n^c + n^c\tilde{\nabla}_a g_{bc} \quad \rightarrow \quad g_{bc}\tilde{\nabla}_a n^c = -n^c\tilde{\nabla}_a g_{bc} \ , \\
0 &= \tilde{\nabla}_a\left(g_{bc}m^c\right) = g_{bc}\tilde{\nabla}_a m^c + m^c\tilde{\nabla}_a g_{bc} \quad \rightarrow \quad g_{bc}\tilde{\nabla}_a m^c = -m^c\tilde{\nabla}_a g_{bc} \ , \\
0 &= \tilde{\nabla}_a\left(g_{bc}k^c\right) = g_{bc}\tilde{\nabla}_a k^c + k^c\tilde{\nabla}_a g_{bc} \quad \rightarrow \quad g_{bc}\tilde{\nabla}_a k^c = -k^c\tilde{\nabla}_a g_{bc} \ , \\
0 &= \tilde{\nabla}_a\left(g_{bc}l^c\right) = g_{bc}\tilde{\nabla}_a l^c + l^c\tilde{\nabla}_a g_{bc} \quad \rightarrow \quad g_{bc}\tilde{\nabla}_a l^c = -l^c\tilde{\nabla}_a g_{bc} \ .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ha a hiperfelületen indukált kovariáns deriválást elvégezzük az indukált metrikán a

$$\begin{aligned}
D_a g_{bc} &= g^i_a g^j_b g^k_c \tilde{\nabla}_i\left(\tilde{g}_{jk} + n_j n_k - m_j m_k\right) \\
&= g^i_a g^j_b g^k_c \left(\tilde{\nabla}_i\tilde{g}_{jk} + n_j\tilde{\nabla}_i n_k + n_k\tilde{\nabla}_i n_j - m_j\tilde{\nabla}_i m_k - m_k\tilde{\nabla}_i m_j\right) \\
&= g^i_a g^j_b g^k_c n_j\tilde{\nabla}_i n_k + g^i_a g^j_b g^k_c n_k\tilde{\nabla}_i n_j - g^i_a g^j_b g^k_c m_j\tilde{\nabla}_i m_k - g^i_a g^j_b g^k_c m_k\tilde{\nabla}_i m_j = 0
\end{aligned}$$

eredményt kapjuk, mely igazolja az állítást.

A szokásos 3+1 felbontásban a hiperfelület normálisának hiperfelületre vetített kovariáns deriváltja a hiperfelület külső görbülete, melyről belátható, hogy az indukált metrika időderiváltjával áll kapcsolatban, ezért kinematikai mennyiség [1].

A jelenlegi formalizmus két háromdimenziós hiperfelületet is tartalmaz, az $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$-t, ezek metszete pedig a $\Sigma_{t\chi}$ kétdimenziós felület. A két hiperfelület n^a és l^a normálisai a $\Sigma_{t\chi}$ felületnek is (egymásra nemmerőleges) normálisai.

A következő két alfejezetben a hiperfelület-normálisok kovariáns deriváltjainak 2+1+1 felbontását végezzük el.

3.2. A $\Sigma_{t\chi}$ felület külső görbületei, normális fundamentális formái és skalárjai

A (2.38), (2.39) és a(3.1) összefüggéseket alkalmazva az $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületek normálisaira jellemző geometriai fogalmakat tudunk bevezetni.

Ehhez végezzük el az $\mathcal{S}_t$ hiperfelület-normális kovariáns deriváltjának 2+1+1 felbontását:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a n_b &= \tilde{g}_a^c \tilde{g}_b^d \tilde{\nabla}_c n_d = (g_a^c - n^c n_a + m^c m_a)\left(g_b^d - n^d n_b + m^d m_b\right)\tilde{\nabla}_c n_d \\
&= (g_a^c - n^c n_a + m^c m_a)\left(g_b^d + m^d m_b\right)\tilde{\nabla}_c n_d \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + g_a^c m^d m_b \tilde{\nabla}_c n_d + g_b^d m^c m_a \tilde{\nabla}_c n_d - n^c n_a g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d \\
&\quad - n^c n_a m^d m_b \tilde{\nabla}_c n_d + m^c m_a m^d m_b \tilde{\nabla}_c n_d \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + m_b\left(g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d\right) + m_a\left(g_b^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d\right) - n_a\left(g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c n_d\right) \\
&\quad - n_a m_b\left(n^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d\right) + m_a m_b\left(m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d\right) \\
&= K_{ab} + 2m_{(a}\mathcal{K}_{b)} + m_a m_b \mathcal{K} - n_a \mathfrak{a}_b + n_a m_b \mathcal{L}^* \ .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

A $K_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d$ a $\Sigma_{t\chi}$ felületnek (az $\mathcal{S}_t$ normálisával képezett) külső görbülete, a $\mathcal{K}_a = g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d$ a normális fundamentális formája, a $\mathcal{K} = m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d$ a normális fundamentális skalárja [22], az $\mathfrak{a}_b = g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c n_d$ és $\mathcal{L}^* = n^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d$ tagok pedig az n^a sebességű megfigyelő $\alpha^c \equiv n^d \tilde{\nabla}_d n^c$ nemgravitációs gyorsulásának (mely teljesíti az $n_c \alpha^c = 0$ feltételt) további 2+1 felbontásából származó komponensei:

$$\begin{aligned}
\alpha^b &= n^a \tilde{\nabla}_a n^b = n^a \tilde{\nabla}_a\left(\tilde{g}_c^b n^c\right) = \tilde{g}_c^b n^a \tilde{\nabla}_a n^c = \left(g_c^b - n_c n^d + m_c m^d\right) n^a \tilde{\nabla}_a n^c \\
&= g_c^b n^a \tilde{\nabla}_a n^c + m_c m^b n^a \tilde{\nabla}_a n^c = \mathfrak{a}^b - m^b n^a n^c \tilde{\nabla}_a m_c = \mathfrak{a}^b - m^b \mathcal{L}^* \ .
\end{aligned} \tag{3.5}$$

A (2.39) és (3.1) használatával az $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelület-normális kovariáns deriváltjának a 2+1+1 felbontása hasonló módon végezhető el:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a l_b &= \tilde{g}_a^c \tilde{g}_b^d \tilde{\nabla}_c l_d = (g_a^c - k^c k_a + l^c l_a)\left(g_b^d - k^d k_b\right)\tilde{\nabla}_c l_d \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d - g_a^c k^d k_b \tilde{\nabla}_c l_d - g_b^d k^c k_a \tilde{\nabla}_c l_d + g_b^d l^c l_a \tilde{\nabla}_c l_d \\
&\quad - l^c l_a k^d k_b \tilde{\nabla}_c l_d + k^c k_a k^d k_b \tilde{\nabla}_c l_d
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d - k_b\left(g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d\right) - k_a\left(g_b^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d\right) + l_a\left(g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d\right) \\
&\quad - l_a k_b\left(k^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d\right) + k_a k_b\left(k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d\right) \\
&= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d + k_b\left(-g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d\right) + k_a\left(-g_b^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d\right) + l_a\left(g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d\right) \\
&\quad + l_a k_b\left(l^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d\right) + k_a k_b\left(k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d\right) \\
&= L_{ab} + 2k_{(a}\mathcal{L}_{b)} + k_a k_b \mathcal{L} + l_a \mathfrak{b}_b + l_a k_b \mathcal{K}^* \ . \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Itt a $\Sigma_{t\chi}$ (az $\mathfrak{M}_\chi$ normálisával képezett) külső görbülete az $L_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d$, normális fundamentális formája az $\mathcal{L}_a = -g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d$ (a minuszt a jelölések későbbi egyszerűsödése miatt vezettük be, [8] nyomán), $\mathcal{L} = k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d$ a normális fundamentális skalárja, a $\mathfrak{b}_b = g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d$ és $\mathcal{K}^* = l^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d$ az l^a normális $\beta^b \equiv l^a \tilde{\nabla}_a l^b$ nemgravitációs „gyorsulását” adják meg, mely teljesíti az $l_c \beta^c = 0$ feltételt és 2+1 felbontása

$$
\begin{aligned}
\beta^b &= l^a \tilde{\nabla}_a l^b = \tilde{g}_c^b l^a \tilde{\nabla}_a l^c = \left(g_c^b - k_c k^d + l_c l^d\right) l^a \tilde{\nabla}_a l^c \\
&= g_c^b l^a \tilde{\nabla}_a l^c - k_c k^b l^a \tilde{\nabla}_a l^c = \mathfrak{b}^b + k^b l^a l^c \tilde{\nabla}_a k_c = \mathfrak{b}^b - k^b \mathcal{K}^* \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

alakú.

A [8, 9] munkákban ismertetett merőleges fóliázások esetén a (3.4) és (3.6) felbontásokban megjelenő $\mathcal{L}^*$ és $\mathcal{K}^*$ mennyiségek helyett $\mathcal{L}$ és $\mathcal{K}$ szerepelt. Az ott is bevezetett$\{K_{ab}, \mathcal{K}_a, \mathcal{K}\}$ és $\{L_{ab}, \mathcal{L}_a, \mathcal{L}\}$ mennyiségek közül az első csoport kinematikai szereppel bírt, míg a második térszerű gradiensekkel állt kapcsolatban. A nemmerőleges fóliázásokon alapuló jelenlegi felbontásban a fenti mennyiségek kapcsolatát az időszerű és térszerű deriváltakkal a későbbiekben fogjuk tisztázni.

3.3. A k_a és m_a kovariáns deriváltjainak felbontása

A k_a és m_a formák kovariáns deriváltjainak felbontásai

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a k_b &= \tilde{g}_a^c \tilde{g}_b^d \tilde{\nabla}_c k_d = \left(g_a^c - k^c k_a + l^c l_a\right)\left(g_b^d - k^d k_b + l^d l_b\right) \tilde{\nabla}_c k_d \\
&= \left(g_a^c - k^c k_a + l^c l_a\right)\left(g_b^d + l^d l_b\right) \tilde{\nabla}_c k_d = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d - g_b^d k^c k_a \tilde{\nabla}_c k_d \\
&\quad + g_b^d l^c l_a \tilde{\nabla}_c k_d + g_a^c l^d l_b \tilde{\nabla}_c k_d - k^c k_a l^d l_b \tilde{\nabla}_c k_d + l^c l_a l^d l_b \tilde{\nabla}_c k_d \\
&= K_{ab}^* + l_a\left(g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d\right) + l_b\left(g_a^c l^d \tilde{\nabla}_c k_d\right) \\
&\quad + l_a l_b\left(l^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d\right) - k_a\left(g_b^d k^c \tilde{\nabla}_c k_d + l_b k^c l^d \tilde{\nabla}_c k_d\right) \\
&= K_{ab}^* + l_a\left(g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d\right) - l_b\left(g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d\right) \\
&\quad + l_a l_b \mathcal{K}^* - k_a\left(\mathfrak{a}_b^* - l_b \mathcal{L}\right) \\
&= K_{ab}^* + l_a \mathcal{K}_b^* + l_b \mathcal{L}_a + l_a l_b \mathcal{K}^* - k_a\left(\mathfrak{a}_b^* - l_b \mathcal{L}\right) \ ,
\end{aligned}
$$

és

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a m_b &= \tilde{g}_a^c \tilde{g}_b^d \tilde{\nabla}_c m_d = (g_a^c - n^c n_a + m^c m_a)\left(g_b^d - n^d n_b + m^d m_b\right)\tilde{\nabla}_c m_d \\
&= (g_a^c - n^c n_a + m^c m_a)\left(g_b^d - n^d n_b\right)\tilde{\nabla}_c m_d = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d - g_b^d n^c n_a \tilde{\nabla}_c m_d \\
&\quad + g_b^d m^c m_a \tilde{\nabla}_c m_d - g_a^c n^d n_b \tilde{\nabla}_c m_d + n^c n_a n^d n_b \tilde{\nabla}_c m_d - m^c m_a n^d n_b \tilde{\nabla}_c m_d \\
&= L^*_{ab} - n_a\left(g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d\right) - n_b\left(g_a^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d\right) \\
&\quad + n_a n_b\left(n^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d\right) + m_a\left(g_b^d m^c \tilde{\nabla}_c m_d\right) - m_a n_b\left(n^d m^c \tilde{\nabla}_c m_d\right) \\
&= L^*_{ab} - n_a\left(g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d\right) + n_b\left(g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d\right) \\
&\quad + n_a n_b\left(n^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d\right) + m_a\left(g_b^d m^c \tilde{\nabla}_c m_d\right) + m_a n_b\left(m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d\right) \\
&= L^*_{ab} + n_a \mathcal{L}^*_b + n_b \mathcal{K}_a + n_a n_b \mathcal{L}^* + m_a\left(\mathfrak{b}^*_b + n_b \mathcal{K}\right) ,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a korábban bevezetett definíciókat a $K^*_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d$ (illetve $L^*_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d$) mennyiségekre, melyek a $\Sigma_{t\chi}$ felület k^a (illetve m^a) kongruenciákkal képezett külső görbületei. A 2.5 alfejezetben bizonyított eredményt is felhasználtuk, miszerint a k^a (illetve m^a) kongruenciák az általuk és a $\Sigma_{t\chi}$ felület tangenstere által kifeszített 3-dimenziós térben számolt 2-dimenziós örvénye eltűnik. A k^a nemgravitációs gyorsulásának komponensei

$$\begin{aligned}
\alpha^*_b &= k^a \tilde{\nabla}_a k_b = \tilde{g}_b^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i = \left(g_b^i - k^i k_b + l^i l_b\right) k^a \tilde{\nabla}_a k_i = \left(g_b^i + l^i l_b\right) k^a \tilde{\nabla}_a k_i \\
&= g_b^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i + l_b\left(l^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i\right) = \mathfrak{a}^*_b - l_b k^i k^a \tilde{\nabla}_a l_i = \mathfrak{a}^*_b - l_b \mathcal{L} ,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

míg az m^a nemgravitációs gyorsulása

$$\begin{aligned}
\beta^*_b &= m^a \tilde{\nabla}_a m_b = \tilde{g}_b^i m^a \tilde{\nabla}_a m_i = \left(g_b^i - n^i n_b + m^i m_b\right) m^a \tilde{\nabla}_a m_i = \left(g_b^i - n^i n_b\right) m^a \tilde{\nabla}_a m_i \\
&= g_b^i m^a \tilde{\nabla}_a m_i - n_b m^a n^i \tilde{\nabla}_a m_i = \mathfrak{b}^*_b + n_b m^a m^i \tilde{\nabla}_a n_i = \mathfrak{b}^*_b + n_b \mathcal{K} ,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ezek szintén megjelentek a felbontásban (itt bevezettük $\mathfrak{a}^*_b = g_b^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i$ és $\mathfrak{b}^*_b = g_b^i m^a \tilde{\nabla}_a m_i$ mennyiségeket). Végül bevezettük a $\mathcal{L}^*_b = -g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d$ és $\mathcal{K}^*_b = g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d$ mennyiségeket is, melyekről megjegyezzük, hogy a $\mathcal{K}_b$ és $\mathcal{L}_b$ mennyiségekkel ellentétben ezek nem normális fundamentális formák. Azonban (2.52) segítségével kifejezhetők $\mathcal{K}_b$ és $\mathcal{L}_b$ normális fundamentális formákkal valamint az m^a és k^a vektorok 3-dimenziós örvényeivel.

3.4. Összefoglalás

Az n^a, l^a, k^a, m^a bázisvektorokhoz tartozó külső görbület, normális fundamentális forma, normális fundamentális skalár és gyorsulás mennyiségeket az alábbi táblázat foglalja össze:

$K_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d$	$L_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d$	$K^*_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c k_d$	$L^*_{ab} = g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c m_d$
$\mathcal{K}_a = g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d$	$\mathcal{L}_a = -g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d$	$\mathcal{K}^*_a = g_a^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d$	$\mathcal{L}^*_a = -g_a^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d$
$\mathcal{K} = m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d$	$\mathcal{L} = k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d$	$\mathcal{K}^* = l^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d$	$\mathcal{L}^* = n^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d$
$\mathfrak{a}_a = g_a^d n^c \tilde{\nabla}_c n_d$	$\mathfrak{b}_a = g_a^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d$	$\mathfrak{a}^*_a = g_a^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i$	$\mathfrak{b}^*_a = g_a^i m^a \tilde{\nabla}_a m_i$

4. fejezet

A bevezetett geometriai mennyiségek közötti kapcsolat

4.1. A $\mathcal{K}_a$ és $\mathcal{L}_a$ normális fundamentális formák kapcsolata

A [8, 9] munkákban a merőlegesség miatt $\mathcal{N} = 0$ fennállt, ezért a $n^a = k^a$ valamint $l^a = m^a$ összefüggések teljesültek, így a $\mathcal{K}_a = \mathcal{L}_a$ kapcsolat állt fenn a normális fundamentál formák között. Nem ortogonális kettős fóliázás esetén ettől eltérő eredményt kapunk, melyek az (5), (2.28) összefüggések segítségével áll elő. Elvégezve a behelyettesítéseket az

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a &= -g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d = -g_a^c \left(\mathfrak{c} n^d + \mathfrak{s} m^d\right) \tilde{\nabla}_c \left(\mathfrak{s} n_d + \mathfrak{c} m_d\right) \\
&= \left(-\mathfrak{c} g_a^c n^d - \mathfrak{s} g_a^c m^d\right) \left(\mathfrak{s} \tilde{\nabla}_c n_d + n_d \tilde{\nabla}_c \mathfrak{s} + \mathfrak{c} \tilde{\nabla}_c m_d + m_d \tilde{\nabla}_c \mathfrak{c}\right) \\
&= \mathfrak{c} g_a^c \tilde{\nabla}_c \mathfrak{s} - \mathfrak{c}^2 g_a^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d - \mathfrak{s}^2 g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d - \mathfrak{s} g_a^c \tilde{\nabla}_c \mathfrak{c} \\
&= \mathfrak{c} g_a^c \tilde{\nabla}_c \mathfrak{s} + \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s} g_a^c \tilde{\nabla}_c \mathfrak{c} = \mathcal{K}_a + \mathfrak{c} D_a \mathfrak{s} - \mathfrak{s} D_a \mathfrak{c} \\
&= \mathcal{K}_a + \mathfrak{c}^2 D_a \tanh \phi \ ,
\end{aligned}$$

azaz

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{K}_a + D_a \phi \tag{4.1}$$

eredmény adódik. A későbbi számolásoknál törekszünk majd csak az egyik fundamentális vektor használnatára. Megjegyezzük, hogy a [8, 9] munkákban ismertetett formalizmushoz képest a ϕ-t tartalmazó tag új járulékot ad a kinematikai mennyiségek közötti kapcsolathoz, ez pontosan a fóliázások nemmerőleges jellegéből adódik.

4.2. A $\mathcal{K}^*$ és $\mathcal{L}^*$ normális fundamentális skalárok kapcsolata $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ normális fundamentális skalárokkal

Mivel a [8, 9, 10] munkákban alkalmazott merőleges kettős fóliázás esetén n^a, l^a, $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ szerepelnek a (3.4) és (3.6) felbontásokban k^a, m^a, $\mathcal{L}^*$ és $\mathcal{K}^*$ mennyiségek helyett, megpróbáljuk $\mathcal{L}^*$ és $\mathcal{K}^*$ mennyiségeket kifejezni a korábbi $\{K_{ab},\ \mathcal{K}_a,\ \mathcal{K}\}$ és $\{L_{ab},\ \mathcal{L}_a,\ \mathcal{L}\}$ változókkal, valamint a merőlegességtől való eltérést megadó ϕ szöggel. Felhasználva az (5) definíciót és az

$\mathcal{S}_t$, $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelület normálisai között fellépő kapcsolatot a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* &= n^a n^b \tilde{\nabla}_a m_b = \left(\mathfrak{c}k^a - \mathfrak{s}l^a\right)\left(\mathfrak{c}k^b - \mathfrak{s}l^b\right)\tilde{\nabla}_a\left(-\mathfrak{s}k_b + \mathfrak{c}l_b\right) \\
&= \left(\mathfrak{c}^2 k^a k^b - \mathfrak{sc}l^a k^b - \mathfrak{sc}k^a l^b + \mathfrak{s}^2 l^a l^b\right) \\
&\quad \left(-k_b\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} - \mathfrak{s}\tilde{\nabla}_a k_b + l_b\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\tilde{\nabla}_a l_b\right) \\
&= \mathfrak{c}^2 k^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} + \mathfrak{c}^3 k^a k^b\tilde{\nabla}_a l_b - \mathfrak{sc}l^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} - \mathfrak{sc}^2 l^a k^b\tilde{\nabla}_a l_b \\
&\quad + \mathfrak{s}^2\mathfrak{c}k^a l^b\tilde{\nabla}_a k_b - \mathfrak{sc}k^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} - \mathfrak{s}^3 l^a l^b\tilde{\nabla}_a k_b + \mathfrak{s}^2 l^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} \\
&= \mathfrak{c}^2 k^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} + \mathfrak{c}^3\mathcal{L} - \mathfrak{sc}l^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} + \mathfrak{sc}^2\mathcal{K}^* - \mathfrak{s}^2\mathfrak{c}\mathcal{L} \\
&\quad - \mathfrak{sc}k^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} - \mathfrak{s}^3\mathcal{K}^* + \mathfrak{s}^2 l^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} \\
&= \mathfrak{c}^3\left(1 - \tanh^2\phi\right)\mathcal{L} + \mathfrak{sc}^2\left(1 - \tanh^2\phi\right)\mathcal{K}^* \\
&\quad + \mathfrak{c}\left(\mathfrak{c}k^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} - \mathfrak{s}k^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c}\right) + \mathfrak{s}\left(\mathfrak{s}l^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} - \mathfrak{c}l^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s}\right) \\
&= \mathfrak{c}\mathcal{L} + \mathfrak{s}\mathcal{K}^* + \mathfrak{c}^3 k^a\tilde{\nabla}_a\tanh\phi - \mathfrak{sc}^2 l^a\tilde{\nabla}_a\tanh\phi \\
&= \mathfrak{c}\mathcal{L} + \mathfrak{s}\mathcal{K}^* + \left(\mathfrak{c}k^a - \mathfrak{s}l^a\right)\mathfrak{c}^2\tilde{\nabla}_a\tanh\phi \\
&= \mathfrak{c}\mathcal{L} + \mathfrak{s}\mathcal{K}^* + n^a\tilde{\nabla}_a\phi\ ,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^* &= l^a l^b\tilde{\nabla}_a k_b = \left(\mathfrak{s}n^a + \mathfrak{c}m^a\right)\left(\mathfrak{s}n^b + \mathfrak{c}m^b\right)\tilde{\nabla}_a\left(\mathfrak{c}n_b + \mathfrak{s}m_b\right) \\
&= \left(\mathfrak{s}^2 n^a n^b + \mathfrak{sc}n^a m^b + \mathfrak{sc}m^a n^b + \mathfrak{c}^2 m^a m^b\right) \\
&\quad \left(\mathfrak{c}\tilde{\nabla}_a n_b + n_b\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} + \mathfrak{s}\tilde{\nabla}_a m_b + m_b\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s}\right) \\
&= -\mathfrak{s}^2 n^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} + \mathfrak{s}^3 n^a n^b\tilde{\nabla}_a m_b + \mathfrak{sc}^2 n^a m^b\tilde{\nabla}_a n_b + \mathfrak{sc}n^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} \\
&\quad - \mathfrak{sc}m^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} + \mathfrak{s}^2\mathfrak{c}n^b m^a\tilde{\nabla}_a m_b + \mathfrak{c}^3 m^a m^b\tilde{\nabla}_a n_b + \mathfrak{c}^2 m^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} \\
&= -\mathfrak{s}^2 n^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} + \mathfrak{s}^3\mathcal{L}^* - \mathfrak{sc}^2\mathcal{L}^* + \mathfrak{sc}n^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} \\
&\quad - \mathfrak{sc}m^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} - \mathfrak{s}^2\mathfrak{c}\mathcal{K} + \mathfrak{c}^3\mathcal{K} + \mathfrak{c}^2 m^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} \\
&= \mathfrak{s}^3\mathcal{L}^* - \mathfrak{sc}^2\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}^3\mathcal{K} - \mathfrak{s}^2\mathfrak{c}\mathcal{K} + \mathfrak{sc}n^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} \\
&\quad - \mathfrak{s}^2 n^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} + \mathfrak{c}^2 m^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} - \mathfrak{sc}m^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c} \\
&= \mathfrak{sc}^2\left(\tanh^2\phi - 1\right)\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}^3\left(1 - \tanh^2\phi\right)\mathcal{K} \\
&\quad + \mathfrak{s}\left(\mathfrak{c}n^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} - \mathfrak{s}n^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c}\right) + \mathfrak{c}\left(\mathfrak{c}m^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{s} - \mathfrak{s}m^a\tilde{\nabla}_a\mathfrak{c}\right) \\
&= -\mathfrak{s}\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}\mathcal{K} + \mathfrak{sc}^2 n^a\tilde{\nabla}\tanh\phi + \mathfrak{c}^3 m^a\tilde{\nabla}\tanh\phi \\
&= -\mathfrak{s}\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}\mathcal{K} + \mathfrak{sc}^2 n^a\tilde{\nabla}_a\tanh\phi + \mathfrak{c}^3 m^a\tilde{\nabla}_a\tanh\phi \\
&= -\mathfrak{s}\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}\mathcal{K} + \mathfrak{c}^2\left(\mathfrak{s}n^a + \mathfrak{c}m^a\right)\tilde{\nabla}_a\tanh\phi \\
&= -\mathfrak{s}\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}\mathcal{K} + l^a\tilde{\nabla}_a\phi
\end{aligned}$$

összefüggéseket kapjuk. Kifejezve az egyenletrendszerből a $\mathcal{L}^*$ és $\mathcal{K}^*$ változókat, a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* &= \mathfrak{c}\mathcal{L} + \mathfrak{s}\mathcal{K}^* + n^a\tilde{\nabla}_a\phi = \mathfrak{c}\mathcal{L} + \mathfrak{s}\left(-\mathfrak{s}\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}\mathcal{K} + l^a\tilde{\nabla}_a\phi\right) + n^a\tilde{\nabla}_a\phi \\
&= \mathfrak{c}\mathcal{L} - \mathfrak{s}^2\mathcal{L}^* + \mathfrak{sc}\mathcal{K} + \mathfrak{s}l^a\tilde{\nabla}_a\phi + n^a\tilde{\nabla}_a\phi\ , \\
\left(1 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{L}^* &= \mathfrak{sc}\mathcal{K} + \mathfrak{c}\mathcal{L} + \left(\mathfrak{s}l^a + n^a\right)\tilde{\nabla}_a\phi\ , \\
\mathfrak{c}^2\mathcal{L}^* &= \mathfrak{c}\left(\mathfrak{s}\mathcal{K} + \mathcal{L}\right) + \left(\mathfrak{s}l^a + n^a\right)\tilde{\nabla}_a\phi\ , \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

és

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}^* &= -\mathfrak{s}\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}\mathcal{K} + l^a\tilde{\nabla}_a\phi = -\mathfrak{s}\left(\mathfrak{c}\mathcal{L} + \mathfrak{s}\mathcal{K}^* + n^a\tilde{\nabla}_a\phi\right) + \mathfrak{c}\mathcal{K} + l^a\tilde{\nabla}_a\phi \\
&= -\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathcal{L} - \mathfrak{s}^2\mathcal{K}^* - \mathfrak{s}n^a\tilde{\nabla}_a\phi + \mathfrak{c}\mathcal{K} + l^a\tilde{\nabla}_a\phi \ , \\
\left(1+\mathfrak{s}^2\right)\mathcal{K}^* &= \mathfrak{c}\mathcal{K} - \mathfrak{s}c\mathcal{L} + \left(l^a - \mathfrak{s}n^a\right)\tilde{\nabla}_a\phi \ , \\
\mathfrak{c}^2\mathcal{K}^* &= \mathfrak{c}\left(\mathcal{K} - \mathfrak{s}\mathcal{L}\right) + \left(l^a - \mathfrak{s}n^a\right)\tilde{\nabla}_a\phi
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

eredemény adódik. Ezek segítségével a $\mathcal{L}^*$ és $\mathcal{K}^*$ mennyiségek szükség esetén kifejezhetők a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ mennyiségekkel.

4.3. Az $\mathfrak{a}_a^*$ és $\mathfrak{b}_a^*$ gyorsulások kapcsolata $\mathfrak{a}_a$ és $\mathfrak{b}_a$ gyorsulásokkal

A merőleges kettős fóliázás választásakor bevezetett $\mathfrak{a}_a$ és $\mathfrak{b}_a$ gyorsulások mellett a nemortogonális kettős fóliázás miatt még két gyorsulást kellett bevezetni, melyeket a k^a és m^a vektorok gyorsulásaként definiáltunk. A $\mathfrak{a}_a^*$, $\mathfrak{b}_a^*$ és $\mathfrak{a}_a$, $\mathfrak{b}_a$ gyorsulások közötti összefőggések megadásához a (5), (2.28), (2.43) és (3.2) kifejezéseket felhasználása szükséges. A bázisok közötti transzformációkkal a

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}_a^* &= g_a^c k^d\tilde{\nabla}_d k_c = g_a^c\left(\mathfrak{c}n^d + \mathfrak{s}m^d\right)\tilde{\nabla}_d\left(\mathfrak{c}n_c + \mathfrak{s}m_c\right) \\
&= \left(\mathfrak{c}g_a^c n^d + \mathfrak{s}g_a^c m^d\right)\left(\mathfrak{c}\tilde{\nabla}_d n_c + n_c\tilde{\nabla}_d\mathfrak{c} + \mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d m_c + m_c\tilde{\nabla}_d\mathfrak{s}\right) \\
&= \mathfrak{c}^2 g_a^c n^d\tilde{\nabla}_d n_c + \mathfrak{s}\mathfrak{c}g_a^c n^d\tilde{\nabla}_d m_c + \mathfrak{s}\mathfrak{c}g_a^c m^d\tilde{\nabla}_d n_c + \mathfrak{s}^2 g_a^c m^d\tilde{\nabla}_d m_c \\
&= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*\right) + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}_b + \mathfrak{s}^2\mathfrak{b}_b^*
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}_a^* &= g_a^c m^d\tilde{\nabla}_d m_c = g_a^c\left(-\mathfrak{s}k^d + \mathfrak{c}l^d\right)\tilde{\nabla}_d\left(-\mathfrak{s}k_c + \mathfrak{c}l_c\right) \\
&= \left(-\mathfrak{s}g_a^c k^d + \mathfrak{c}g_a^c l^d\right)\left(-\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d k_c - k_c\tilde{\nabla}_d\mathfrak{s} + \mathfrak{c}\tilde{\nabla}_d l_c + l_c\tilde{\nabla}_d\mathfrak{c}\right) \\
&= \mathfrak{s}^2 g_a^c k^d\tilde{\nabla}_d k_c - \mathfrak{s}\mathfrak{c}g_a^c k^d\tilde{\nabla}_d l_c - \mathfrak{s}\mathfrak{c}g_a^c l^d\tilde{\nabla}_d k_c + \mathfrak{c}^2 g_a^c l^d\tilde{\nabla}_d l_c \\
&= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_b^*\right) + \mathfrak{s}^2\mathfrak{a}_b^* + \mathfrak{c}^2\mathfrak{b}_b
\end{aligned}
$$

részeredményt kapjuk, így a fennálló kapcsolatra a

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*\right) + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}_a + \mathfrak{s}^3\mathfrak{c}\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*\right) + \mathfrak{s}^4\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{c}^2\mathfrak{s}^2\mathfrak{b}_a \\
\left(1-\mathfrak{s}^4\right)\mathfrak{a}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*\right) + \mathfrak{s}^3\mathfrak{c}\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*\right) + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}_a + \mathfrak{c}^2\mathfrak{s}^2\mathfrak{b}_a
\end{aligned}
$$

$$
\left(1-\mathfrak{s}^2\right)\mathfrak{a}_a^* = \mathfrak{a}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left[\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*\right) + \mathfrak{s}^2\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*\right)\right] + \mathfrak{s}^2\mathfrak{b}_a \ , \tag{4.4}
$$

valamint

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*\right) + \mathfrak{s}^2\left[\mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*\right) + \mathfrak{c}^2\mathfrak{a}_a + \mathfrak{s}^2\mathfrak{b}_a^*\right] + \mathfrak{c}^2\mathfrak{b}_a \\
\left(1-\mathfrak{s}^4\right)\mathfrak{b}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*\right) + \mathfrak{s}^3\mathfrak{c}\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*\right) + \mathfrak{s}^2\mathfrak{c}^2\mathfrak{a}_a + \mathfrak{c}^2\mathfrak{b}_a
\end{aligned}
$$

$$
\left(1-\mathfrak{s}^2\right)\mathfrak{b}_a^* = \mathfrak{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left[\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a^*\right) + \mathfrak{s}^2\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*\right)\right] + \mathfrak{s}^2\mathfrak{a}_a \tag{4.5}
$$

összefüggések adódnak.

4.4. A $\mathcal{K}_a^*$ és $\mathcal{L}_a^*$ mennyiségek kapcsolata $\mathcal{K}_a$ és $\mathcal{L}_a$ normális fundamentális formákkal

Ebben az alfejezetben a $\mathcal{K}_a^*$, $\mathcal{L}_a^*$ és $\mathcal{K}_a$, $\mathcal{L}_a$ normális fundamentális vektorok kapcsolatát keressük az (5), (2.28), (2.43) és (3.2) összefüggés segítségével. A felbontás alatt a mennyiségek azonosításához az előző fejezet végén megadott táblázatot használtuk.

A $\mathcal{K}_a^*$ normális fundamentális vektor esetén a

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_a^* &= g_a^c l^d \tilde{\nabla}_d k_c = g_a^c \left(\mathfrak{s} n^d + \mathfrak{c} m^d\right) \tilde{\nabla}_d \left(\mathfrak{c} n_c + \mathfrak{s} m_c\right) \\
&= \left(\mathfrak{s} g_a^c n^d + \mathfrak{c} g_a^c m^d\right)\left(\mathfrak{c}\tilde{\nabla}_d n_c + n_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{c} + \mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d m_c + m_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{s}\right) \\
&= \mathfrak{s}\mathfrak{c} g_a^c n^d \tilde{\nabla}_d n_c + \mathfrak{s}^2 g_a^c n^d \tilde{\nabla}_d m_c + \mathfrak{c}^2 g_a^c m^d \tilde{\nabla}_d n_c + \mathfrak{s}\mathfrak{c} g_a^c m^d \tilde{\nabla}_d m_c \\
&= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a^* + \mathfrak{c}^2 g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d + \mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_a^* \\
&= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a^*
\end{aligned}$$

részösszefüggést kaptuk. Látszik, hogy szükség lesz a továbbiakban az $\mathcal{L}_a^*$ felírására a k^a, l^a bázis segítségével. A számoláshoz használt összefüggések ugyanazok, így a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a^* &= -g_a^c n^d \tilde{\nabla}_d m_c = -g_a^c \left(\mathfrak{c} k^d - \mathfrak{s} l^d\right) \tilde{\nabla}_d \left(-\mathfrak{s} k_c + \mathfrak{c} l_c\right) \\
&= \left(-\mathfrak{c} g_a^c k^d + \mathfrak{s} g_a^c l^d\right)\left(-\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_d k_c - k_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{s} + \mathfrak{c}\tilde{\nabla}_d l_c + l_c \tilde{\nabla}_d \mathfrak{c}\right) \\
&= \mathfrak{c}\mathfrak{s} g_a^c k^d \tilde{\nabla}_d k_c - \mathfrak{c}^2 g_a^c k^d \tilde{\nabla}_d l_c - \mathfrak{s}^2 g_a^c l^d \tilde{\nabla}_d k_c + \mathfrak{s}\mathfrak{c} g_a^c l^d \tilde{\nabla}_d l_c \\
&= \mathfrak{c}\mathfrak{s}\mathfrak{a}_a^* - \mathfrak{c}^2 g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a^* + \mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_a \\
&= \mathfrak{c}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a^*
\end{aligned}$$

kifejezés adódik. A két egyenletrendszerből a

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a^* \\
&= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \left[\mathfrak{c}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a^*\right] \\
&= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left[\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right) - \mathfrak{s}^2\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right)\right] + \mathfrak{c}^2\left(\mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a\right) + \mathfrak{s}^4 \mathcal{K}_a^* \\
\left(1 - \mathfrak{s}^4\right) \mathcal{K}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left[\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right) - \mathfrak{s}^2\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right)\right] + \mathfrak{c}^2\left(\mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a\right) \\
\left(1 - \mathfrak{s}^2\right) \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a^* &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left[\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right) - \mathfrak{s}^2\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right)\right] + \mathfrak{c}^2\left(\mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a\right)
\end{aligned}$$

$$\left(1 - \mathfrak{s}^2\right) \mathcal{K}_a^* = \mathcal{K}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left[\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right) - \mathfrak{s}^2\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right)\right] - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a \ , \tag{4.6}$$

és

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a^* &= \mathfrak{c}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a^* \\
&= \mathfrak{c}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \left[\mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right) + \mathfrak{c}^2 \mathcal{K}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{L}_a^*\right] \\
&= \mathfrak{c}\mathfrak{s}\left[\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right) - \mathfrak{s}^2\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right)\right] + \mathfrak{c}^2\left(\mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a\right) + \mathfrak{s}^4 \mathcal{L}_a^* \\
\left(1 - \mathfrak{s}^4\right) \mathcal{L}_a^* &= \mathfrak{c}\mathfrak{s}\left[\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right) - \mathfrak{s}^2\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right)\right] + \mathfrak{c}^2\left(\mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a\right) \\
\left(1 - \mathfrak{s}^2\right) \mathfrak{c}^2 \mathcal{L}_a^* &= \mathfrak{c}\mathfrak{s}\left[\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right) - \mathfrak{s}^2\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right)\right] + \mathfrak{c}^2\left(\mathcal{L}_a - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a\right)
\end{aligned}$$

$$\left(1 - \mathfrak{s}^2\right) \mathcal{L}_a^* = \mathcal{L}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left[\left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a\right) - \mathfrak{s}^2\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a^*\right)\right] - \mathfrak{s}^2 \mathcal{K}_a \tag{4.7}$$

kapcsolat adódik.

4.5. Az $\mathfrak{a}_a^*, \mathfrak{b}_a^*$ gyorsulások és $\mathcal{K}_a^*, \mathcal{L}_a^*$ mennyiségek végső kifejezései

A gyorsulások közötti (4.4) és (4.5) összefüggések különbségéből, valamint a levezetett (4.6) és (4.7) összefüggések összegéből kapjuk, hogy:

$$\mathfrak{a}_a^* - \mathfrak{b}_a^* + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \left(\mathcal{L}_a^* - \mathcal{K}_a^*\right) = \mathfrak{a}_a - \mathfrak{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a\right) ,$$

$$\mathcal{K}_a^* + \mathcal{L}_a^* - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \left(\mathfrak{a}_a^* + \mathfrak{b}_a^*\right) = \mathcal{K}_a + \mathcal{L}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right) ,$$

vagyis

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_a^* &= \left[\mathcal{L}_a^* + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{K}_a^*\right] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_a - \left[\mathcal{K}_a + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{L}_a\right] , \\ 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_a^* &= \left[\mathcal{K}_a^* + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{L}_a^*\right] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_a - \left[\mathcal{L}_a + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{K}_a\right] . \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezeket a (4.6) és (4.7) összefüggésekbe, az $1 + \mathfrak{s}^2\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{s}^4 = \mathfrak{c}^2$ és $1 - \mathfrak{s}^2\left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right) = \left(1 - 2\mathfrak{s}^2\right)\mathfrak{c}^2$ azonosságok felhasználásával:

$$\begin{aligned} 2\left(1 - \mathfrak{s}^2\right)\mathfrak{c}^2\mathcal{K}_a^* &= 2\mathfrak{c}^2\mathcal{K}_a - 2\mathfrak{s}^2\mathfrak{c}^2\mathcal{L}_a + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathfrak{a}_a - \mathfrak{s}^2\mathfrak{b}_a\right) \\ &\quad + \left[\mathcal{K}_a^* + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{L}_a^*\right] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_a - \left[\mathcal{L}_a + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{K}_a\right] \\ &\quad - \mathfrak{s}^2\left\{\left[\mathcal{L}_a^* + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{K}_a^*\right] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_a - \left[\mathcal{K}_a + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{L}_a\right]\right\} \\ &= \mathfrak{c}^2\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a\right) + \mathfrak{c}^2\left[\mathcal{L}_a^* + \left(1 - 2\mathfrak{s}^2\right)\mathcal{K}_a^*\right] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\left(1 - \mathfrak{s}^2\right)\mathfrak{c}^2\mathcal{L}_a^* &= 2\mathfrak{c}^2\mathcal{L}_a - 2\mathfrak{s}^2\mathfrak{c}^2\mathcal{K}_a + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\left[\mathfrak{b}_a - \mathfrak{s}^2\mathfrak{a}_a\right] \\ &\quad + \left[\mathcal{L}_a^* + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{K}_a^*\right] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{b}_a - \left[\mathcal{K}_a + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{L}_a\right] \\ &\quad - \mathfrak{s}^2\left\{\left[\mathcal{K}_a^* + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{L}_a^*\right] - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathfrak{a}_a - \left[\mathcal{L}_a + \left(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^2\right)\mathcal{K}_a\right]\right\} \\ &= \mathfrak{c}^2\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a\right) + \mathfrak{c}^2\left[\mathcal{K}_a^* + \left(1 - 2\mathfrak{s}^2\right)\mathcal{L}_a^*\right] . \end{aligned}$$

Mindkét egyenlet a

$$\mathcal{K}_a^* - \mathcal{L}_a^* = \mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a \tag{4.8}$$

összefüggéshez vezet. Ennek felhasználásával a (4.6) és (4.7) összefüggések különbségéből kapjuk, hogy:

$$\mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathfrak{a}_a^* - \mathfrak{b}_a^*\right) = \mathfrak{s}\mathfrak{c}\left(\mathfrak{a}_a - \mathfrak{b}_a\right) + 2\mathfrak{s}^2\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a\right) .$$

Ez az összefüggés $\mathfrak{s} = 0$ esetén teljesül. Amikor $\mathfrak{s} \neq 0$, oszthatunk vele és

$$\mathfrak{a}_a^* - \mathfrak{b}_a^* = \mathfrak{a}_a - \mathfrak{b}_a + 2\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a\right) \tag{4.9}$$

eredményhez jutunk. Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{s} = 0$ esetén ez is teljesül, így nem vezettünk be hamis megoldást az $\mathfrak{s}$-sel való osztáskor.

Ezután a levezetett (4.8) és (4.9) eredmények felhasználásával (4.5) és (4.7) összefüggésekből kiküszöböljük $\mathcal{K}_a^*$ és $\mathfrak{a}_a^*$ változókat:

$$\mathcal{L}_a^* - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\mathfrak{b}_a^* = \frac{1}{\mathfrak{c}^2}\left(\mathcal{L}_a + \mathfrak{s}^2\mathcal{K}_a\right) + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}_a ,$$

$$\mathfrak{s}\mathfrak{c}\mathcal{L}_a^* + \left(1-\mathfrak{s}^2\right)\mathfrak{b}_a^* = \mathfrak{b}_a + \mathfrak{s}^2\mathfrak{a}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left[2\mathcal{L}_a - \left(1-\mathfrak{s}^2\right)\mathcal{K}_a\right] \ .$$

Az előállt egyenletekből most már kifejezhető

$$\mathcal{L}_a^* = \mathcal{L}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right) \tag{4.10}$$

és

$$\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\mathfrak{b}_a^* = \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\mathfrak{b}_a + \frac{\mathfrak{s}^2}{\mathfrak{c}^2}\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a\right) \ .$$

Utóbbi teljesül $\mathfrak{s} = 0$ esetén. Amikor $\mathfrak{s} \neq 0$, oszthatunk vele és

$$\mathfrak{b}_a^* = \mathfrak{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a\right) \tag{4.11}$$

összefüggéshez jutunk. Megjegyezzük, hogy $\mathfrak{s} = 0$ esetén ez is teljesül, így nem vezettünk be hamis megoldást az $\mathfrak{s}$-sel való osztáskor.

A (4.8) és (4.9) összefüggésekből meghatározhatjuk

$$\mathcal{K}_a^* = \mathcal{K}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right) \tag{4.12}$$

és

$$\mathfrak{a}_a^* = \mathfrak{a}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a\right)$$

kifejezéseket is.

Végül megjegyezzük, hogy (4.1), (4.10) és (4.12) összefüggésekből

$$\mathcal{L}_a^* = \mathcal{K}_a^* + D_a\phi \tag{4.13}$$

következik.

4.6. A k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvényeinek kifejezése geometriai mennyiségekkel

Felhasználva az előző alfejezet eredményeit, a (2.52) összefüggések megadják a keresett nemeltünő örvénykomponenseket:

$$\begin{aligned} 2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})}l^b &= \mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right) \ , \\ 2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})}n^b &= \mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right) \ . \end{aligned}$$

Felhasználva továbbá (4.1) összefüggést, az örvények kifejezhetők az alábbi

$$\begin{aligned} 2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})}l^b &= D_a\phi - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right) \ , \\ 2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})}n^b &= D_a\phi + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

alakban, melyeken látszik, hogy az örvények $\mathcal{N}$ nemnulla értékének köszönhetők. Ezzel az $\mathcal{N}$ nemeltűnő shift-komponens második interpretációját adjuk meg, a k^a és m^a vektorok 3-dimenziós örvényességének mértékét jelenti. (Az első interpretáció a bázisok Lorentz-forgatásának szöge volt.)

4.7. A K^*_{ab} és L^*_{ab} külső görbületek kapcsolata K_{ab} és L_{ab} külső görbületekkel

A [8, 9, 10] munkákban alkalmazott merőleges kettős fóliázás esetén n^a, l^a normálisok és bázisaik úgy lettek megválasztva, hogy $\mathcal{N}=0$ összefüggés miatt $n^a=k^a$, valamint $l^a=m^a$ állt fenn. Ezért a merőleges kettős fóliázást választva, a $\Sigma_{t\chi}$ felület külső görbületei csak a K_{ab} és L_{ab} voltak. Nemortogonális kettős fóliázás esetén viszont, mint a 2.5 és 3.3 fejezetekben láthattuk, az k^a és m^a is meghatároz $\Sigma_{t\chi}$ felületnek még két külső görbületet, melyek K^*_{ab} és L^*_{ab}.

Kevesebb változó használatára törekedve keressük, hogy milyen kapcsolat valósul meg a K_{ab}, L_{ab} és K^*_{ab}, L^*_{ab} külső görbületek között. Az összefüggések megállapításához a (2.28), (2.43) és (3.2) korábbi eredményeket vesszük figyelembe, így a

$$\begin{aligned}
K^*_{ab} &= g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c k_d = g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c \left(\mathfrak{c} n_d + \mathfrak{s} m_d\right) \\
&= g^c_a g^d_b \left(\mathfrak{c}\tilde{\nabla}_c n_d + n_d \tilde{\nabla}_c \mathfrak{c} + \mathfrak{s}\tilde{\nabla}_c m_d + m_d \tilde{\nabla}_c \mathfrak{s}\right) \\
&= \mathfrak{c} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c n_d + g^c_a \left(g^d_b n_d\right)\tilde{\nabla}_c \mathfrak{c} + \mathfrak{s} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c m_d + g^c_a \left(g^d_b m_d\right)\tilde{\nabla}_c \mathfrak{s} \\
&= \mathfrak{c} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c n_d + \mathfrak{s} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c m_d = \mathfrak{c} K_{ab} + \mathfrak{s} L^*_{ab}
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
L^*_{ab} &= g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c m_d = g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c \left(-\mathfrak{s} k_d + \mathfrak{c} l_d\right) \\
&= g^c_a g^d_b \left(-\mathfrak{s}\tilde{\nabla}_c k_d - k_d \tilde{\nabla}_c \mathfrak{s} + \mathfrak{c}\tilde{\nabla}_c l_d + l_d \tilde{\nabla}_c \mathfrak{c}\right) \\
&= -\mathfrak{s} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c k_d - g^c_a \left(g^d_b k_d\right)\tilde{\nabla}_c \mathfrak{s} + \mathfrak{c} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c l_d + g^c_a \left(g^d_b l_d\right)\tilde{\nabla}_c \mathfrak{c} \\
&= -\mathfrak{s} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c k_d + \mathfrak{c} g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c l_d = \mathfrak{c} L_{ab} - \mathfrak{s} K^*_{ab}
\end{aligned}$$

egyenleteket adódnak. A kapott egyenletrendszerekkel tovább számolva a

$$\begin{aligned}
K^*_{ab} &= \mathfrak{c} K_{ab} + \mathfrak{s} L^*_{ab} = \mathfrak{c} K_{ab} + \mathfrak{s}\left(\mathfrak{c} L_{ab} - \mathfrak{s} K^*_{ab}\right) \\
&= \mathfrak{c} K_{ab} + \mathfrak{s}\mathfrak{c} L_{ab} - \mathfrak{s}^2 K^*_{ab} \\
\left(1+\mathfrak{s}^2\right) K^*_{ab} &= \mathfrak{c} K_{ab} + \mathfrak{s}\mathfrak{c} L_{ab} \\
\mathfrak{c}^2 K^*_{ab} &= \mathfrak{c} K_{ab} + \mathfrak{s}\mathfrak{c} L_{ab} \\
K^*_{ab} &= \frac{1}{\mathfrak{c}}\left(K_{ab} + \mathfrak{s} L_{ab}\right)
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
L^*_{ab} &= \mathfrak{c} L_{ab} - \mathfrak{s} K^*_{ab} = \mathfrak{c} L_{ab} - \mathfrak{s}\left(\mathfrak{c} K_{ab} + \mathfrak{s} L^*_{ab}\right) \\
&= \mathfrak{c} L_{ab} - \mathfrak{s}\mathfrak{c} K_{ab} - \mathfrak{s}^2 L^*_{ab} \\
\left(1+\mathfrak{s}^2\right) L^*_{ab} &= \mathfrak{c} L_{ab} - \mathfrak{s}\mathfrak{c} K_{ab} \\
L^*_{ab} &= \frac{1}{\mathfrak{c}}\left(L_{ab} - \mathfrak{s} K_{ab}\right)
\end{aligned}$$

eredményeket kapjuk a K_{ab}, L_{ab} és K^*_{ab}, L^*_{ab} közötti kapcsolatról.

Ezekből könnyen látható, hogy a külső görbületek párjai a Lorentz-forgatással összefüggő transzformációval állnak elő egymásból

$$\begin{pmatrix} K^*_{ab} \\ L^*_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathfrak{c}} & \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \\ -\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} & \frac{1}{\mathfrak{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ab} \\ L_{ab} \end{pmatrix} . \tag{4.15}$$

Ez egy térbeli forgatás mátrixa (ortogonális mátrix), a forgatás szöge pedig $\psi = \arccos\left(\cosh\phi\right)^{-1}$.

4.8. Összefoglalás

A fejezet végén két táblázatban foglaljuk össze az eddig kapott eredményeket.

Az n^a és l^a bázisvektorokhoz tartozó külső görbület, normális fundamentális forma, normális fundamentális skalár, gyorsulás és örvény, valamint ezek kapcsolata:

$K_{ab} = g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c n_d$	$L_{ab} = g^c_a g^d_b \tilde{\nabla}_c l_d$
$\mathcal{K}_a = g^c_a m^d \tilde{\nabla}_c n_d$	$\mathcal{L}_a = \mathcal{K}_a + D_a\phi$
$\mathcal{K} = m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d$	$\mathcal{L} = k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d$
$\mathfrak{a}_a = g^d_b n^c \tilde{\nabla}_c n_d$	$\mathfrak{b}_a = g^d_b l^c \tilde{\nabla}_c l_d$
$\hat{\omega}^{(\mathbf{n})}_{ab} = 0$	$\hat{\omega}^{(\mathbf{l})}_{ab} = 0$

A k^a és m^a bázisvektorokhoz tartozó külső görbület, normális fundamentális forma, normális fundamentális skalár, gyorsulás és örvény, valamint ezek kapcsolata egymással és az n^a és l^a bázisvektorokhoz tartozó geometriai mennyiségekkel:

$K^*_{ab} = \frac{1}{\mathfrak{c}}\left(K_{ab} + \mathfrak{s}L_{ab}\right)$	$L^*_{ab} = \frac{1}{\mathfrak{c}}\left(L_{ab} - \mathfrak{s}K_{ab}\right)$
$\mathcal{K}^*_a = \mathcal{K}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right)$	$\mathcal{L}^*_b = \mathcal{L}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right) = \mathcal{K}^*_a + D_a\phi$
$\mathcal{K}^* = \frac{1}{\mathfrak{c}}\left(\mathcal{K} - \mathfrak{s}\mathcal{L}\right) + \frac{1}{\mathfrak{c}^2}\left(l^a - \mathfrak{s}n^a\right)\tilde{\nabla}_a\phi$	$\mathcal{L}^* = \frac{1}{\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{s}\mathcal{K} + \mathcal{L}\right) + \frac{1}{\mathfrak{c}^2}\left(\mathfrak{s}l^a + n^a\right)\tilde{\nabla}_a\phi$
$\mathfrak{a}^*_a = \mathfrak{a}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a\right) = \mathfrak{a}_a - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}D_a\phi$	$\mathfrak{b}^*_a = \mathfrak{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\left(\mathcal{L}_a - \mathcal{K}_a\right) = \mathfrak{b}_a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}D_a\phi$
$\hat{\omega}^{(\mathbf{k})}_{ab} g^b_c = 0$	$\hat{\omega}^{(\mathbf{m})}_{ab} g^b_c = 0$
$\hat{\omega}^{(\mathbf{k})}_{ab} l^b = \frac{1}{2}D_a\phi - \frac{\mathfrak{s}}{2\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right)$	$\bar{\omega}^{(\mathbf{m})}_{ab} n^b = \frac{1}{2}D_a\phi + \frac{\mathfrak{s}}{2\mathfrak{c}}\left(\mathfrak{a}_a + \mathfrak{b}_a\right)$

5. fejezet

A geometriai és kinematikai mennyiségek kapcsolata

Ebben a fejezetben megkeressük a kapcsolatot a $\{g_{ab},\ M^a,\ M\}$ dinamikai változók deriváltjai és a bevezetett $\{K_{ab},\ \mathcal{K}_a,\ \mathcal{K}\}$, $\{L_{ab},\ \mathcal{L}_a,\ \mathcal{L}\}$, $\{K^*_{ab},\ \mathcal{K}^*_a,\ \mathcal{K}^*\}$, $\{L^*_{ab},\ \mathcal{L}^*_a,\ \mathcal{L}^*\}$ geometriai mennyiségek között. Ehhez be kell vezetnünk a Lie deriválás fogalmát, azaz általánosítanunk kell a koordinátarendszerünkben a parciális deriválás fogalmát.

5.1. A geometriai mennyiségek és Lie-deriváltak kapcsolata

A Lie deriválás segítségével egy kiválasztott hiperfelületbeli folyam mentén történő lokális elmozdulást tudjuk megadni. Tetszőleges f függvény és W^a vektor Lie deriváltja V^a folyam mentén:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{L}}_V f &= V(f) = V^a\partial_a f = V^a\nabla_a f\ ,\\ \tilde{\mathfrak{L}}_V W^a &= [V,W]^a = V^b\nabla_b W^a - W^b\nabla_b V^a\ .\end{aligned}$$

Ezekből az összefüggésekből bármely ω_a 1-forma és T^a_b tenzor Lie-deriváltjai is előállíthatók:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{L}}_V \omega_a &= V^b\nabla_b\omega_a + \omega_b\nabla_a V^b\ ,\\ \tilde{\mathfrak{L}}_V T^a_b &= V^c\nabla_c T^a_b - T^c_b\nabla_c V^a + T^a_c\nabla_b V^c\ .\end{aligned}$$

A g_{ab} indukált metrika segítségével a Lie derivált is levetíthető a $\Sigma_{t\chi}$ felületre:

$$\mathfrak{L}_V T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_q} = g^c_a g^{a_1}_{c_1}\ldots g^{a_r}_{c_r} g^{d_1}_{b_1}\ldots g^{d_q}_{b_q}\tilde{\mathfrak{L}}_V T^{c_1\ldots c_r}_{d_1\ldots d_q}\ .$$

Amennyiben $T^{c_1\ldots c_r}_{d_1\ldots d_q}$ is a $\Sigma_{t\chi}$ felületre vetített tenzor, ez a tenzor proiciált Lie-deriváltja.

A $\Sigma_{t\chi}$ felületnek az $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$ normálisaival képezett külső görbületei kifejezhetők metrikus mennyiségek Lie-deriváltjával a

$$\begin{aligned}K_{ab} &= g^c_a g^d_b\tilde{\nabla}_c n_d = g^c_a\left(g^i_b g^d_i\right)\tilde{\nabla}_c n_d = g^c_a g^i_b g_{di}\tilde{\nabla}_c n^d\\ &= g^c_a g^i_b\left(g_{di}\tilde{\nabla}_c n^d + g_{cd}\tilde{\nabla}_i n^d + n^d\tilde{\nabla}_d g_{ci} - g_{cd}\tilde{\nabla}_i n^d - n^d\tilde{\nabla}_d g_{ci}\right)\\ &= g^c_a g^i_b\left(\tilde{\mathfrak{L}}_n g_{ci} - g_{cd}\tilde{\nabla}_i n^d - n^d\tilde{\nabla}_d g_{ci}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g_a^c g_b^i \tilde{\mathfrak{L}}_n g_{ci} - g_a^c g_b^i g_{cd} \tilde{\nabla}_i n^d - g_a^c g_b^i n^d \tilde{\nabla}_d \left(\tilde{g}_{ci} + n_c n_i - m_c m_i \right) \\
&= \mathfrak{L}_n g_{ab} - g_b^i \left(g_a^c g_c^d \right) \tilde{\nabla}_i n_d = \mathfrak{L}_n g_{ab} - g_b^i g_a^d \tilde{\nabla}_i n_d \\
&= \mathfrak{L}_n g_{ab} - K_{ab} \quad \rightarrow \quad K_{ab} = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_n g_{ab} \ ,
\end{aligned}
$$

és a

$$
\begin{aligned}
L_{ab} &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c l_d = g_a^c g_b^i g_{di} \tilde{\nabla}_c l^d \\
&= g_a^c g_b^i \left(g_{di} \tilde{\nabla}_c l^d + g_{cd} \tilde{\nabla}_i l^d + l^d \tilde{\nabla}_d g_{ci} - g_{cd} \tilde{\nabla}_i l^d - l^d \tilde{\nabla}_d g_{ci} \right) \\
&= \mathfrak{L}_l g_{ab} - g_a^c g_b^i g_{cd} \tilde{\nabla}_i l^d - g_a^c g_b^i l^d \tilde{\nabla}_d g_{ci} \\
&= \mathfrak{L}_l g_{ab} - g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_d l_c = \mathfrak{L}_l g_{ab} - L_{ab} \ \rightarrow \ L_{ab} = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_l g_{ab}
\end{aligned}
$$

módon. Hasonlóan beláthatók a

$$
\begin{aligned}
K^*_{ab} &= \frac{1}{2} \mathfrak{L}_k g_{ab} \ , \\
L^*_{ab} &= \frac{1}{2} \mathfrak{L}_m g_{ab}
\end{aligned}
$$

összefüggések is.

A (2.38) és (3.3) összefüggéseket figyelembe véve a $\Sigma_{t\chi}$ felületnek az $\mathcal{S}_t$ normálisával képezett normális fundamentális formája a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_a &= g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d = g_a^c \left(m_d \tilde{\nabla}_c n^d \right) = g_a^c \left(m_d \tilde{\nabla}_c n^d + n^d \tilde{\nabla}_d m_c - n^d \tilde{\nabla}_d m_c \right) \\
&= g_a^c \left(m_d \tilde{\nabla}_c n^d + n^d \tilde{\nabla}_d m_c - n^d \tilde{\nabla}_d m_c \right) \\
&= g_a^c \left(\tilde{\mathfrak{L}}_n m_c - n^d \tilde{\nabla}_d m_c \right) = \mathfrak{L}_n m_a - g_a^i g_i^c n^d \tilde{\nabla}_d m_c = \mathfrak{L}_n m_a + g_a^i m^c \left(n^d \tilde{\nabla}_d g_{ic} \right) \\
&= \mathfrak{L}_n m_a + g_a^i m^c \left(n^d \tilde{\nabla}_d g_{ic} + g_{dc} \tilde{\nabla}_i n^d + g_{id} \tilde{\nabla}_c n^d - g_{dc} \tilde{\nabla}_i n^d - g_{id} \tilde{\nabla}_c n^d \right) \\
&= \mathfrak{L}_n m_a + g_a^i m^c \left(\tilde{\mathfrak{L}}_n g_{ic} - g_{dc} \tilde{\nabla}_i n^d - g_{id} \tilde{\nabla}_c n^d \right) \\
&= \mathfrak{L}_n m_a + g_a^i m^c \tilde{\mathfrak{L}}_n g_{ic} - g_a^i g_{id} m^c \tilde{\nabla}_c n^d \\
&= \mathfrak{L}_n m_a + g_a^i m^c \tilde{\mathfrak{L}}_n g_{ic} - \left(g_a^i g_i^d \right) m^c \tilde{\nabla}_c n_d = \mathfrak{L}_n m_a + g_a^i m^c \tilde{\mathfrak{L}}_n g_{ic} - \mathcal{K}_a \\
&\rightarrow \quad \mathcal{K}_a = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{L}_n m_a + g_a^i m^c \tilde{\mathfrak{L}}_n g_{ic} \right)
\end{aligned}
$$

alakban írható fel. Mivel $\mathcal{L}_a, \mathcal{K}^*_a, \mathcal{L}^*_a$ kifejezhetők $\mathcal{K}_a, \mathcal{N}$ és gyorsulásokkal, előbbiek is szükség szerint megadhatók Lie-deriváltakkal.

Végül a két hiperfelület normális fundamentális skalárjai

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} &= m^a m^b \tilde{\nabla}_a n_b = m_b \left(m^a \tilde{\nabla}_a n^b \right) = m_b \left(m^a \tilde{\nabla}_a n^b - n^a \tilde{\nabla}_a m^b + n^a \tilde{\nabla}_a m^b \right) \\
&= -m_b \tilde{\mathfrak{L}}_n m^b + n^a m_b \tilde{\nabla}_a m^b = -m_b \tilde{\mathfrak{L}}_n m^b
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= k^a k^b \tilde{\nabla}_a l_b = k_b \left(k^a \tilde{\nabla}_a l^b \right) = k_b \left(k^a \tilde{\nabla}_a l^b - l^a \tilde{\nabla}_a k^b + l^a \tilde{\nabla}_a k^b \right) \\
&= -k_b \tilde{\mathfrak{L}}_l k^b + l^a k_b \tilde{\nabla}_a k^b = -k_b \tilde{\mathfrak{L}}_l k^b
\end{aligned}
$$

alakban fejezhetők ki Lie-deriválttal. Hasonlóan

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^* &= -l_b \tilde{\mathfrak{L}}_k l^b \ , \\
\mathcal{L}^* &= -n_b \tilde{\mathfrak{L}}_m n^b
\end{aligned}$$

is következik.

5.2. Az indukált metrika t és χ deriváltjai

Szeretnénk tudni, hogy a $(\partial/\partial t)^a$ és $(\partial/\partial\chi)^a$ folyamok mentén végzett Lie deriválás milyen kapcsolatban áll a külső görbületekkel. Az időderiválást az állandó t által meghatározott $\mathcal{S}_t$ hiperfelületbeli $(\partial/\partial t)^a$ folyam menti Lie derivált fogja jelenteni, míg az állandó χ által meghatározott $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületbeli $(\partial/\partial\chi)^a$ folyam menti Lie derivált térbeli derivált. A $\Sigma_{t\chi}$ hiperfelület egy tetszőleges T^a_b tenzorának Lie deriváltja a $(\partial/\partial t)^a$ és $(\partial/\partial\chi)^a$ folyam mentén:

$$\begin{aligned}
\partial_t T^a_b &= \left(\mathfrak{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} T\right)^a_b = \left(g^c_a g^b_d \tilde{\mathfrak{L}}_{\frac{\partial}{\partial t}} T\right)^a_b \\
&= g^c_a g^b_d \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \tilde{\nabla}_i T^a_b - g^c_a g^b_d T^i_b \tilde{\nabla}_i \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + g^c_a g^b_d T^a_i \tilde{\nabla}_b \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \\
&= g^c_a g^b_d \left(N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i\right) \tilde{\nabla}_i T^a_b - g^c_a g^b_d T^i_b \tilde{\nabla}_i \left(N n^a + N^a + \mathcal{N} m^a\right) \\
&\quad + g^c_a g^b_d T^a_i \tilde{\nabla}_b \left(N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i\right) \\
&= g^c_a g^b_d \Big[N n^i \tilde{\nabla}_i T^a_b + N^i \tilde{\nabla}_i T^a_b + \mathcal{N} m^i \tilde{\nabla}_i T^a_b - T^i_b \tilde{\nabla}_i N n^a - T^i_b \tilde{\nabla}_i N^a \\
&\quad - T^i_b \tilde{\nabla}_i \mathcal{N} m^a + T^a_i \tilde{\nabla}_b N n^i + T^a_i \tilde{\nabla}_b N^i + T^a_i \tilde{\nabla}_b \mathcal{N} m^i\Big] \\
&= N g^c_a g^b_d \tilde{\mathfrak{L}}_n T^a_b + g^c_a g^b_d \tilde{\mathfrak{L}}_N T^a_b + \mathcal{N} g^c_a g^b_d \tilde{\mathfrak{L}}_m T^a_b = N \mathfrak{L}_n T^a_b + \mathfrak{L}_N T^a_b + \mathcal{N} \mathfrak{L}_m T^a_b \quad , \\
\partial_\chi T^a_b &= \left(\mathfrak{L}_{\frac{\partial}{\partial \chi}} T\right)^a_b = \left(g^c_a g^b_d \tilde{\mathfrak{L}}_{\frac{\partial}{\partial \chi}} T\right)^a_b \\
&= g^c_a g^b_d \left[\left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^i \tilde{\nabla}_i T^a_b - T^i_b \tilde{\nabla}_i \left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a + T^a_i \tilde{\nabla}_b \left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^i\right] \\
&= g^c_a g^b_d \left[\left(M m^i + M^i\right) \tilde{\nabla}_i T^a_b - T^i_b \tilde{\nabla}_i \left(M m^a + M^a\right) + T^a_i \tilde{\nabla}_b \left(M m^i + M^i\right)\right] \\
&= g^c_a g^b_d \left[M m^i \tilde{\nabla}_i T^a_b + M^i \tilde{\nabla}_i T^a_b - T^i_b \tilde{\nabla}_i M m^a - T^i_b \tilde{\nabla}_i M^a + T^a_i \tilde{\nabla}_b M m^i + T^a_i \tilde{\nabla}_b M^i\right] \\
&= M g^c_a g^b_d \tilde{\mathfrak{L}}_m T^a_b + g^c_a g^b_d \tilde{\mathfrak{L}}_M T^a_b = M \mathfrak{L}_m T^a_b + \mathfrak{L}_M T^a_b \ .
\end{aligned}$$

A $\Sigma_{t\chi}$ hiperfelület g_{ab} 2-dimenziós metrikus tenzorának időderiváltját a

$$\begin{aligned}
\partial_t g_{cd} &= \left(\mathfrak{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} g\right)_{cd} = g^a_c g^b_d \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \tilde{\nabla}_i g_{ab} + g_{ai} \tilde{\nabla}_b \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i + g_{bi} \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i\right] \\
&= \left(N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i\right) g^a_c g^b_d \tilde{\nabla}_i g_{ab} + g^a_c g^b_d g_{ai} \tilde{\nabla}_b \left(N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i\right) \\
&\quad + g^a_c g^b_d g_{bi} \tilde{\nabla}_a \left(N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i\right) \\
&= g^a_c g^b_d \Big[\left(N n^i + N^i + \mathcal{N} m^i\right) \tilde{\nabla}_i \left(n_a n_b - m_a m_b\right) + g_{ai} \tilde{\nabla}_b \left(N n^i\right) + g_{ai} \tilde{\nabla}_b N^i \\
&\quad + g_{ai} \tilde{\nabla}_b \left(\mathcal{N} m^i\right) + g_{bi} \tilde{\nabla}_a \left(N n^i\right) + g_{bi} \tilde{\nabla}_a N^i + g_{bi} \tilde{\nabla}_a \left(\mathcal{N} m^i\right)\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g^a_c g^b_d \left[N g_{ai} \tilde{\nabla}_b n^i + g_{ai} \tilde{\nabla}_b N^i + \mathcal{N} g_{ai} \tilde{\nabla}_b m^i + N g_{bi} \tilde{\nabla}_a n^i + g_{bi} \tilde{\nabla}_a N^i + \mathcal{N} g_{bi} \tilde{\nabla}_a m^i \right] \\
&= N g^a_c g^b_d \tilde{\nabla}_b n_a + g^a_c g^b_d \tilde{\nabla}_b N_a + \mathcal{N} g^a_c g^b_d \tilde{\nabla}_b m_a + N g^a_c g^b_d \tilde{\nabla}_a n_b + g^a_c g^b_d \tilde{\nabla}_a N_b + \mathcal{N} g^a_c g^b_d \tilde{\nabla}_a m_b \\
&= 2N K_{cd} + 2 D_{(c} N_{d)} + 2 \mathcal{N} D_{(c} m_{d)} \\
&= 2N K_{cd} + 2 D_{(c} N_{d)} + 2N \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} L^*_{cd} \\
&= 2N \left(K_{cd} + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} L^*_{cd} \right) + 2 D_{(c} N_{d)} \\
&= 2N \frac{1}{\mathfrak{c}^2} \left(K_{cd} + \mathfrak{s} L_{cd} \right) + 2 D_{(c} N_{d)} \\
&= 2N \frac{1}{\mathfrak{c}} K^*_{cd} + 2 D_{(c} N_{d)}
\end{aligned}
$$

összefüggések, és térbeli deriváltját a

$$
\begin{aligned}
\partial_\chi g_{cd} &= \left(\mathfrak{L}_{\frac{\partial}{\partial \chi}} g \right)_{cd} = g^a_c g^b_d \left[\left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^i \tilde{\nabla}_i g_{ab} + g_{ai} \tilde{\nabla}_b \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^i + g_{bi} \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^i \right] \\
&= \left(M m^i + M^i \right) g^a_c g^b_d \tilde{\nabla}_i g_{ab} + g^a_c g^b_d g_{ai} \tilde{\nabla}_b \left(M m^i + M^i \right) + g^a_c g^b_d g_{bi} \tilde{\nabla}_a \left(M m^i + M^i \right) \\
&= g^b_d \left(g^a_c g_{ai} \right) \tilde{\nabla}_b M m^i + g^b_d \left(g^a_c g_{ai} \right) \tilde{\nabla}_b M^i + g^a_c \left(g^b_d g_{bi} \right) \tilde{\nabla}_a M m^i + g^a_c \left(g^b_d g_{bi} \right) \tilde{\nabla}_a M^i \\
&= M g^b_d g^i_c \tilde{\nabla}_b m_i + M g^a_c g^i_d \tilde{\nabla}_a m_i + g^b_d g^i_c \tilde{\nabla}_b M_i + g^a_c g^i_d \tilde{\nabla}_a M_i \\
&= M D_d m_c + M D_c m_d + D_d M_c + D_c M_d = 2M D_{(c} m_{d)} + 2 D_{(c} M_{d)} \\
&= \frac{2}{\mathfrak{c}} M \left(L_{cd} - \mathfrak{s} K_{cd} \right) + 2 D_{(c} M_{d)} \\
&= 2M L^*_{cd} + 2 D_{(c} M_{d)}
\end{aligned}
$$

összefüggés adják meg.

A külső görbületeket kapcsolatát a dinamikai változók koordinátaderiváltjaival a fenti kifejezések invertálásával kapjuk meg:

$$
\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} L^*_{ab} \ , \\
L_{ab} &= \frac{\mathfrak{c}}{M} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] + \mathfrak{s} K_{ab} \ , \\
K^*_{ab} &= \frac{\mathfrak{c}}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] \ , \\
L^*_{ab} &= \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] \ ,
\end{aligned}
$$

vagy az első két összefüggés expliciten:

$$
\begin{aligned}
K_{ab} &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] - \frac{\mathfrak{s}}{M \mathfrak{c}} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] \ , \\
L_{ab} &= \frac{\mathfrak{s}}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] + \frac{1}{M \mathfrak{c}} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] \ .
\end{aligned}
$$

Ezek az összefüggések azonosak a korábban levezetett (4.15) eredményekkel.

5.3. A $\tilde{g}\left(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}}\right)$ és $\tilde{g}\left(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{g_{\mathbf{B}}} g_{\mathbf{C}}\right)$ mennyiségek 2+1+1 felbontása

Először bebizonyítjuk a következő eredményt.

Állítás:

Amennyiben $\tilde{g}\left(f_{\mathbf{A}}, f_{\mathbf{B}}\right)$ =állandó, teljesül a következő összefüggés:

$$\tilde{g}\left(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}}\right)=\tilde{g}\left(\left[f_{\mathbf{A}}, f_{\mathbf{B}}\right], f_{\mathbf{C}}\right)-\tilde{g}\left(f_{\mathbf{C}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}} f_{\mathbf{B}}\right) \quad . \tag{5.1}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}}\right) &= \tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{A}}^{a} \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}}^{b}=\tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}}\left(\tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{A}}^{a} f_{\mathbf{C}}^{b}\right)-f_{\mathbf{C}}^{b} \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}}\left(\tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{A}}^{a}\right) \\
&= -\tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{C}}^{b} f_{\mathbf{B}}^{c} \tilde{\nabla}_{c} f_{\mathbf{A}}^{a}=-\tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{C}}^{b}\left(f_{\mathbf{B}}^{c} \tilde{\nabla}_{c} f_{\mathbf{A}}^{a} \pm f_{\mathbf{A}}^{c} \tilde{\nabla}_{c} f_{\mathbf{B}}^{a}\right) \\
&= \tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{C}}^{b}\left[f_{\mathbf{A}}, f_{\mathbf{B}}\right]^{a}-\tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{C}}^{b} f_{\mathbf{A}}^{c} \tilde{\nabla}_{c} f_{\mathbf{B}}^{a}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

A következőkben vizsgálni fogjuk ennek az állításnak sajátos eseteteit, olyankor, amikor rendre az $f_{\mathbf{A}}$, illetve $g_{\mathbf{A}}$ bázisvektorokra alkalmazzuk.

5.3.1. A gyorsulások és normális fundamentális skalárok kapcsolata a koordinátaderiváltakkal

Olyankor, ha $f_{\mathbf{B}}=f_{\mathbf{C}}$, az (5.1) azonosság jobboldalának második tagja azonosan nulla.

Ebben a sajátos esetben a (2.17)-(2.19) Lie-zárójelek segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{n}} \mathbf{n}\right) f_{b}^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}\left(\left[f_{\mathbf{A}}, \mathbf{n}\right], \mathbf{n}\right) f_{b}^{\mathbf{A}}=\tilde{g}([\mathbf{m}, \mathbf{n}], \mathbf{n}) m_{b}+\tilde{g}\left(\left[F_{\mathbf{i}}, \mathbf{n}\right], \mathbf{n}\right) F_{b}^{\mathbf{i}} \\
&= \frac{1}{M}\left[\frac{\partial}{\partial \chi}(\ln N)-M^{\mathbf{j}} \partial_{\mathbf{j}}(\ln N)\right] m_{b}+\partial_{\mathbf{i}}(\ln N) F_{b}^{\mathbf{i}} \\
&= \frac{1}{M}\left[\frac{\partial}{\partial \chi}(\ln N)-M^{a} D_{a}(\ln N)\right] m_{b}+D_{b}(\ln N) \quad .
\end{aligned}$$

A számolt kifejezés azonban éppen az n^{a} vektor (3.5) gyorsulása, α_{b} (kifejtve, mint az $f_{\mathbf{A}}$ irányú komponense, kontrahálva az $f_{\mathbf{A}}$ bázisvektorral, mindennek a b absztrakt indexű komponense). Így

$$\mathfrak{a}_{b} = D_{b}(\ln N) \tag{5.2}$$

$$\mathcal{L}^{*} = -\frac{1}{M}\left[\frac{\partial}{\partial \chi}(\ln N)-M^{a} D_{a}(\ln N)\right] \quad . \tag{5.3}$$

Hasonlóan kapjuk meg az m^{a} vektor gyorsulását, β_{b}^{*}-t is:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{m}} \mathbf{m}\right) f_{b}^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}\left(\left[f_{\mathbf{A}}, \mathbf{m}\right], \mathbf{m}\right) f_{b}^{\mathbf{A}}=\tilde{g}([\mathbf{n}, \mathbf{m}], \mathbf{m}) n_{b}+\tilde{g}\left(\left[F_{\mathbf{i}}, \mathbf{m}\right], \mathbf{m}\right) F_{b}^{\mathbf{i}} \\
&= \frac{1}{MN}\left[-\partial_{t} M+\partial_{\chi} \mathcal{N}+N^{\mathbf{j}} \partial_{\mathbf{j}} M-M^{\mathbf{j}} \partial_{\mathbf{j}} \mathcal{N}\right] n_{b}-\partial_{\mathbf{i}}(\ln M) F_{b}^{\mathbf{i}} \\
&= \frac{1}{MN}\left[-\partial_{t} M+\partial_{\chi} \mathcal{N}+N^{a} D_{a} M-M^{a} D_{a} \mathcal{N}\right] n_{b}-D_{b}(\ln M) \quad .
\end{aligned}$$

Összehasonlítva (3.9) kifejezéssel, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_b^* &= -D_b\left(\ln M\right) &(5.4)\\ \mathcal{K} &= \frac{1}{MN}\left[\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}\right] \ . &(5.5) \end{aligned}$$

A k^a vektor gyorsulása

$$\begin{aligned} \tilde{g}\left(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}}\mathbf{k}\right) g_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}\left(\left[g_{\mathbf{A}}, \mathbf{k}\right], \mathbf{k}\right) g_b^{\mathbf{A}} = \tilde{g}\left(\left[\mathbf{l}, \mathbf{k}\right], \mathbf{k}\right) l_b + \tilde{g}\left(\left[G_{\mathbf{i}}, \mathbf{k}\right], \mathbf{k}\right) G_b^{\mathbf{i}} \\ &= \left\{\partial_t\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) - N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) + \frac{\mathfrak{s}}{N}\left[\partial_t \ln\left(MN\right) - N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\ln\left(MN\right)\right]\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) - M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right]\right\} l_b + \partial_{\mathbf{j}}\left(\ln\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) G_b^{\mathbf{i}} \\ &= \left\{\mathcal{S} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) - M^a D_a \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right]\right\} l_b + D_b\left(\ln\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) \ . \end{aligned}$$

Itt bevezettük az

$$\mathcal{S} = \partial_t\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) - N^a D_a\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right) + \frac{\mathfrak{s}}{N}\left[\partial_t \ln\left(MN\right) - N^a D_a \ln\left(MN\right)\right] \tag{5.6}$$

jelölést. Megjegyezzük, hogy merőleges kettős fóliázás esetén $\mathcal{S} = 0$. Összehasonlítva (3.8) kifejezéssel, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_b^* &= D_b\left(\ln\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) \ , &(5.7)\\ \mathcal{L} &= -\mathcal{S} - \frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) - M^a D_a \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right] \ . &(5.8) \end{aligned}$$

Végül az l^a vektor gyorsulása

$$\begin{aligned} \tilde{g}\left(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{l}}\mathbf{l}\right) g_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}\left(\left[g_{\mathbf{A}}, \mathbf{l}\right], \mathbf{l}\right) g_b^{\mathbf{A}} = \tilde{g}\left(\left[\mathbf{k}, \mathbf{l}\right], \mathbf{l}\right) k_b + \tilde{g}\left(\left[G_{\mathbf{i}}, \mathbf{l}\right], \mathbf{l}\right) G_b^{\mathbf{i}} \\ &= \frac{1}{MN}\left[-\partial_t\left(\mathfrak{c}M\right) + N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\mathfrak{c}M\right)\right] k_b - \partial_{\mathbf{j}}\ln\left(\mathfrak{c}M\right) G_b^{\mathbf{i}} \\ &= \frac{1}{MN}\left[-\partial_t\left(\mathfrak{c}M\right) + N^a D_a\left(\mathfrak{c}M\right)\right] k_b - D_b \ln\left(\mathfrak{c}M\right) \ . \end{aligned}$$

Összehasonlítva (3.7) kifejezéssel, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_b &= -D_b \ln\left(\mathfrak{c}M\right) \ , &(5.9)\\ \mathcal{K}^* &= \frac{1}{MN}\left[\partial_t\left(\mathfrak{c}M\right) - N^a D_a\left(\mathfrak{c}M\right)\right] \ . &(5.10) \end{aligned}$$

5.3.2. A normális fundamentális formák kapcsolata a koordinátaderiváltakkal

Ehhez az alábbiakat számoljuk:

$$n^c\tilde{\nabla}_c m_b=\tilde{g}\left(f_{\mathbf{A}},\tilde{\nabla}_{\mathbf{n}}\mathbf{m}\right)f_b^{\mathbf{A}}=\tilde{g}\left(\left[f_{\mathbf{A}},\mathbf{n}\right],\mathbf{m}\right)f_b^{\mathbf{A}}-\tilde{g}\left(\mathbf{m},\tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}}\mathbf{n}\right)f_b^{\mathbf{A}}\ , \tag{5.11}$$

valamint

$$l^c\tilde{\nabla}_c k_b=\tilde{g}\left(g_{\mathbf{A}},\tilde{\nabla}_{\mathbf{l}}\mathbf{k}\right)g_b^{\mathbf{A}}=\tilde{g}\left(\left[g_{\mathbf{A}},\mathbf{l}\right],\mathbf{k}\right)g_b^{\mathbf{A}}-\tilde{g}\left(\mathbf{k},\tilde{\nabla}_{g_{\mathbf{A}}}\mathbf{l}\right)g_b^{\mathbf{A}} \tag{5.12}$$

kifejezéseket. Ezek első tagjának számolása az előző alfejezetben ismertetett módszer szerint történik, az eredmény a következő:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(\left[f_{\mathbf{A}},\mathbf{n}\right],\mathbf{m}\right)f_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}\left(\left[\mathbf{m},\mathbf{n}\right],\mathbf{m}\right)m_b+\tilde{g}\left(\left[F_{\mathbf{i}},\mathbf{n}\right],\mathbf{m}\right)F_b^{\mathbf{i}}\\
&= -\frac{1}{MN}\left[-\partial_t M+\partial_\chi\mathcal{N}+N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}M-M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\mathcal{N}\right]m_b-\frac{M}{N}\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right)F_b^{\mathbf{i}}\\
&= \frac{1}{MN}\left[\partial_t M-\partial_\chi\mathcal{N}-N^a D_a M+M^a D_a\mathcal{N}\right]m_b-\frac{M}{N}D_b\left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right)\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(\left[g_{\mathbf{A}},\mathbf{l}\right],\mathbf{k}\right)g_b^{\mathbf{A}} &= \tilde{g}\left(\left[\mathbf{k},\mathbf{l}\right],\mathbf{k}\right)k_b+\tilde{g}\left(\left[G_{\mathbf{i}},\mathbf{l}\right],\mathbf{k}\right)G_b^{\mathbf{i}}\\
&= -\left\{\partial_t\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right)-N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\left(\frac{\mathfrak{s}}{N}\right)+\frac{\mathfrak{s}}{N}\left[\partial_t\ln\left(MN\right)-N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\ln\left(MN\right)\right]\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi\ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)-M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}}\ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right]\right\}k_b-\frac{N}{\mathfrak{c}^2M}\partial_{\mathbf{i}}\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right)G_b^{\mathbf{i}}\\
&= -\left\{\mathcal{S}+\frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi\ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)-M^a D_a\ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right]\right\}k_b-\frac{N}{\mathfrak{c}^2M}D_b\left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right).
\end{aligned}$$

A (5.11) és (5.12) jobb oldalainak második tagjait pedig a következőképpen alakítjuk:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(\mathbf{m},\tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}}\mathbf{n}\right)f_b^{\mathbf{A}} &= \left(\tilde{g}_{ad}m^a\tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}}n^d\right)f_b^{\mathbf{A}}=\left(m^a f_{\mathbf{A}}^c\tilde{\nabla}_c n_a\right)f_b^{\mathbf{A}}\\
&= \left(m^a n^c\tilde{\nabla}_c n_a\right)\bar{n}_b+\left(m^a m^c\tilde{\nabla}_c n_a\right)\bar{m}_b+\left(m^a F_{\mathbf{i}}^c\tilde{\nabla}_c n_a\right)F_b^{\mathbf{i}}\\
&= -\left(m^a n^c\tilde{\nabla}_c n_a\right)n_b+\left(m^a m^c\tilde{\nabla}_c n_a\right)m_b+\left(m^a F_{\mathbf{i}}^c\tilde{\nabla}_c n_a\right)F_b^{\mathbf{i}}\\
&= \left(n^a n^c\tilde{\nabla}_c m_a\right)n_b+\left(m^a m^c\tilde{\nabla}_c n_a\right)m_b+\left(m^a F_{\mathbf{i}}^c\tilde{\nabla}_c n_a\right)F_b^{\mathbf{i}}\\
&= \mathcal{L}^*n_b+\mathcal{K}m_b+\mathcal{K}_b\ ,
\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}
\tilde{g}\left(\mathbf{k},\tilde{\nabla}_{g_{\mathbf{A}}}\mathbf{l}\right)g_b^{\mathbf{A}} &= \left(\tilde{g}_{ad}k^a\tilde{\nabla}_{g_{\mathbf{A}}}l^d\right)g_b^{\mathbf{A}}=\left(k^a g_{\mathbf{A}}^c\tilde{\nabla}_c l_a\right)g_b^{\mathbf{A}}\\
&= \left(k^a k^c\tilde{\nabla}_c l_a\right)\bar{k}_b+\left(k^a l^c\tilde{\nabla}_c l_a\right)\bar{l}_b+\left(k^a G_{\mathbf{i}}^c\tilde{\nabla}_c l_a\right)G_b^{\mathbf{i}}\\
&= -\left(k^a k^c\tilde{\nabla}_c l_a\right)k_b+\left(k^a l^c\tilde{\nabla}_c l_a\right)l_b+\left(k^a G_{\mathbf{i}}^c\tilde{\nabla}_c l_a\right)G_b^{\mathbf{i}}\\
&= -\left(k^a k^c\tilde{\nabla}_c l_a\right)k_b-\left(l^a l^c\tilde{\nabla}_c k_a\right)l_b+\left(k^a G_{\mathbf{i}}^c\tilde{\nabla}_c l_a\right)G_b^{\mathbf{i}}\\
&= -\mathcal{L}k_b-\mathcal{K}^*l_b-\mathcal{L}_b\ .
\end{aligned}$$

Tehát (5.11) és (5.12) a következő alakú:

$$
\begin{aligned}
n^c\tilde{\nabla}_c m_b &= -\mathcal{L}^* n_b + \left\{\frac{1}{MN}\left[\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}\right] - \mathcal{K}\right\} m_b \\
&\quad -\frac{M}{N} D_b \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right) - \mathcal{K}_b \ , \qquad (5.13)\\
l^c\tilde{\nabla}_c k_b &= -\left\{\mathcal{S} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) - M^a D_a \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right]\right\} k_b + \mathcal{L} k_b \\
&\quad + \mathcal{K}^* l_b - \frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} D_b \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right) + \mathcal{L}_b \ . \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

A $\Sigma_{t\chi}$-re eső komponensekből kapjuk, hogy:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^*_a &= -g^b_a n^c \tilde{\nabla}_c m_b = \mathcal{K}_a + \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right) \ , \qquad (5.15)\\
\mathcal{K}^*_a &= g^b_a l^c \tilde{\nabla}_c k_b = \mathcal{L}_a - \frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right) \ . \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

Az n^b, illetve k^b irányú komponensekből kapjuk, hogy:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^* &= n^b n^c \tilde{\nabla}_c m_b = \mathcal{L}^* \ , \\
0 &= k^b l^c \tilde{\nabla}_c k_b = -\mathcal{L} - \left\{\mathcal{S} + \frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) - M^a D_a \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right]\right\} \ .
\end{aligned}
$$

A (5.8) összefüggés figyelembevétele után mindkét fenti összefüggés azonosság, nem adnak új információt. Végül (5.13) és (5.14) m^b, illetve l^b irányú komponenseiből kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
0 &= m^b n^c \tilde{\nabla}_c m_b = -\mathcal{K} + \frac{1}{MN}\left[\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}\right] \ , \\
\mathcal{K}^* &= l^b l^c \tilde{\nabla}_c k_b = \mathcal{K}^* \ ,
\end{aligned}
$$

melyek (5.5) figyelembevételével ismét azonosságok.

5.4. A normális fundamentális vektorok kapcsolata a koordinátaderiváltakkal

A $\mathcal{K}_a$ normális fundamentális vektort koordinátaderiváltakkal vett kifejezését megkapjuk a megfelelő Lie-zárójelek felhasználásával :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_a &= g_{ad} m^c \nabla_c n^d = g_{ad}\left(-\left[m,n\right]^d + n^c \tilde{\nabla}_c m^d\right) = -g_{ad}\left[m,n\right]^d + g_{ad} n^c \tilde{\nabla}_c m^d \\
&= -g_{ad}\left[m,n\right]^d - \mathcal{L}^*_a = -g_{ad}\left[m,n\right]^d - \mathcal{K}_a - \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right) \\
&= -g_{ad}\frac{1}{MN}\left(-\partial_t M^d + \partial_\chi N^d + N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} M^d - M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} N^d\right) - \mathcal{K}_a - \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right) \\
&= \frac{1}{MN}\left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} M_a + M^{\mathbf{j}}\partial_{\mathbf{j}} N_a\right) - \mathcal{K}_a - \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right) \ ,
\end{aligned}
$$

azaz

$$\mathcal{K}_a = \frac{1}{2MN}\left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a\right) - \frac{M}{2N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right) .$$

Az $\mathcal{L}_a$ kapcsolatát a koordinátaderiváltakkal hasonlóan adhatjuk meg:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a &= -g_{ad} k^c \tilde{\nabla}_c m^d = -g_{ad}\left([k,l]^d + l^c \tilde{\nabla}_c k^d\right) \\
&= -g_{ad}\,[k,l]^d - g_{ad} l^c \tilde{\nabla}_c k^d = -g_{ad}\,[k,l]^d - \mathcal{K}^*_a \\
&= -g_{ad}\,[k,l]^d - \mathcal{L}_a + \frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{scM}{N}\right) \\
&= \frac{1}{MN}\left(\partial_t M^a - \partial_\chi N^a + M^{\mathfrak{j}} \partial_{\mathfrak{j}} N^d - N^{\mathfrak{j}} \partial_{\mathfrak{j}} M^d\right) - \mathcal{L}_a + \frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right) ,
\end{aligned}$$

azaz

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2MN}\left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a\right) + \frac{N}{2\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right)$$

alakú. Ugyanezt kapjuk a korábban levezetett $\mathcal{L}_a = \mathcal{K}_a + D_a \phi$ összefüggés felhasználásával is.

A $\mathcal{K}^*_a$ és $\mathcal{L}_a$, valamint a $\mathcal{L}^*_a$ és $\mathcal{K}_a$ közötti (5.16) és (5.15) kifejezésekből koordinátaderiváltakkal megadhatjuk a

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^*_a &= \mathcal{L}_a - \frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right) \\
&= \frac{1}{2MN}\left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a\right) - \frac{N}{2\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right)
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*_a &= \mathcal{K}_a + \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right) \\
&= \frac{1}{2MN}\left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a\right) + \frac{M}{2N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right)
\end{aligned}$$

kifejezéseket is.

5.5. Összefoglalás

A geometriai mennyiségek (külső görbületek, normális fundamentális formák és skalárok, illetve a gyorsulások) kapcsolatát a metrikus változók t és χ deriváltjaival az alábbi négy táblázatban foglaljuk össze.

A külső görbületek és koordináta- illetve $\Sigma_{t\chi}$ menti kovariáns deriváltak kapcsolata:

$K_{ab} = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{2}\partial_t g_{ab} - D_{(a}N_{b)}\right] - \frac{\mathfrak{s}}{M\mathfrak{c}}\left[\frac{1}{2}\partial_\chi g_{ab} - D_{(a}M_{b)}\right]$
$L_{ab} = \frac{\mathfrak{s}}{N}\left[\frac{1}{2}\partial_t g_{ab} - D_{(a}N_{b)}\right] + \frac{1}{M\mathfrak{c}}\left[\frac{1}{2}\partial_\chi g_{ab} - D_{(a}M_{b)}\right]$
$K^*_{ab} = \frac{\mathfrak{c}}{N}\left[\frac{1}{2}\partial_t g_{ab} - D_{(a}N_{b)}\right]$
$L^*_{ab} = \frac{1}{M}\left[\frac{1}{2}\partial_\chi g_{ab} - D_{(a}M_{b)}\right]$

A normális fundamentális formák és koordináta- illetve $\Sigma_{t\chi}$ menti kovariáns deriváltak kapcsolata:

$\mathcal{K}_a = \frac{1}{2MN}\left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a\right) - \frac{M}{2N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right)$
$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2MN}\left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a\right) + \frac{N}{2\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right)$
$\mathcal{K}^*_a = \frac{1}{2MN}\left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a\right) - \frac{N}{2\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N}\right)$
$\mathcal{L}^*_a = \frac{1}{2MN}\left(\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a\right) + \frac{M}{2N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M}\right)$

A normális fundamentális skalárok és koordináta- illetve $\Sigma_{t\chi}$ menti kovariáns deriváltak kapcsolata:

$\mathcal{K} = \frac{1}{MN}\left[\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}\right]$
$\mathcal{L} = -\mathcal{S} - \frac{1}{\mathfrak{c}M}\left[\partial_\chi \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right) - M^a D_a \ln\left(\frac{N}{\mathfrak{c}}\right)\right]$
$\mathcal{K}^* = \frac{1}{MN}\left[\partial_t\left(\mathfrak{c}M\right) - N^a D_a\left(\mathfrak{c}M\right)\right]$
$\mathcal{L}^* = -\frac{1}{M}\left[\partial_\chi\left(\ln N\right) - M^a D_a\left(\ln N\right)\right]$

A gyorsulások és $\Sigma_{t\chi}$ menti kovariáns deriváltak kapcsolata:

$\mathfrak{a}_b = D_b\left(\ln N\right)$
$\mathfrak{b}_b = -D_b \ln\left(\mathfrak{c}M\right)$
$\mathfrak{a}^*_b = D_b\left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}}\right)$
$\mathfrak{b}^*_b = -D_b\left(\ln M\right)$

6. fejezet

Gravitációs dinamika

Az általános relativitáselméletben a gravitáció dinamikáját az Einstein-egyenlet adja meg. Utóbbi származtatható az

$$S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R} \tag{6.1}$$

Einstein-Hilbert hatásból, variációs elv felhasználásával. Az ADM formalizmusban első lépésként a hatás 3+1 felbontását hajtják végre. Ebben a fejezetben elvégzem a gravitációs hatás 2+1+1 felbontását.

6.1. A Gauss-azonosság

A Gauss-azonosság teremt kapcsolatot a teljes téridő $\tilde{R}_{abcd}$ Riemann-tenzora és esetünkben a 2-dimenziós $\Sigma_{t\chi}$ felület R_{abcd} Riemann-tenzora között. Levezetéséhez a teljes téridő Riemann-tenzorát az $f_{\mathbf{A}} = \{n, m, F_{\mathbf{i}}\}$ bázisban érdemes felbontani.

Elsőként felhasználjuk a R_{abcd} Riemann-tenzor definícióját, mint a kovariáns deriváltak nemkommutálásának mértékét egy tetszőleges $V^a \in T\Sigma_{t\chi}$ kétdimenziós vektorra:

$$\begin{aligned}
R_{abcd}V^b &= \left(D_cD_d - D_dD_c\right)V_a \\
&= g^i_cg^j_dg^k_a\tilde{\nabla}_i\left(g^m_jg^n_k\tilde{\nabla}_mV_n\right) - g^i_dg^j_cg^k_a\tilde{\nabla}_i\left(g^m_jg^n_k\tilde{\nabla}_mV_n\right) \\
&= g^i_cg^m_dg^n_a\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_mV_n + g^i_cg^m_dg^k_a\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_ig^n_k + g^i_cg^j_dg^n_a\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_ig^m_j - \\
&\quad g^i_dg^m_cg^n_a\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_mV_n - g^i_dg^m_cg^k_a\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_ig^n_k - g^i_dg^j_cg^n_a\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_ig^m_j \\
&= g^i_cg^m_dg^n_a\left(\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_mV_n - \tilde{\nabla}_m\tilde{\nabla}_iV_n\right) + g^i_cg^m_dg^k_a\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_i\left(\tilde{g}^n_k + n^nn_k - m^nm_k\right) + \\
&\quad g^i_cg^j_dg^n_a\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_i\left(\tilde{g}^m_j + n^mn_j - m^mm_j\right) - g^i_dg^m_cg^k_a\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_i\left(\tilde{g}^n_k + n^nn_k - m^nm_k\right) - \\
&\quad g^i_dg^j_cg^n_a\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_i\left(\tilde{g}^m_j + n^mn_j - m^mm_j\right) \\
&= g^i_cg^m_dg^n_a\left(\tilde{\nabla}_i\tilde{\nabla}_mV_n - \tilde{\nabla}_m\tilde{\nabla}_iV_n\right) + g^i_cg^m_dg^k_an^n\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_in_k - g^i_cg^m_dg^k_am^n\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_im_k + \\
&\quad g^i_cg^j_dg^n_an^m\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_in_j - g^i_cg^j_dg^n_am^m\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_im_j - \\
&\quad g^i_dg^m_cg^k_an^n\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_in_k + g^i_dg^m_cg^k_am^n\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_im_k - \\
&\quad g^i_dg^j_cg^n_an^m\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_in_j + g^i_dg^j_cg^n_am^m\tilde{\nabla}_mV_n\tilde{\nabla}_im_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g_c^i g_d^m g_a^n \left(\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_m V_n - \tilde{\nabla}_m \tilde{\nabla}_i V_n\right) + 2 g_{[c}^i g_{d]}^j \tilde{\nabla}_i n_j g_a^n n^m \tilde{\nabla}_m V_n - g_{[c}^i g_{d]}^j \tilde{\nabla}_i m_j g_a^n m^m \tilde{\nabla}_m V_n + \\
&\quad \left(g_d^m n^n \tilde{\nabla}_m V_n\right)\left(g_c^i g_a^k \tilde{\nabla}_i n_k\right) - \left(g_c^m n^n \tilde{\nabla}_m V_n\right)\left(g_d^i g_a^k \tilde{\nabla}_i n_k\right) \\
&\quad - \left(g_c^m n^n \tilde{\nabla}_m V_n\right)\left(g_d^i g_a^k \tilde{\nabla}_i n_k\right) + \left(g_c^m m^n \tilde{\nabla}_m V_n\right)\left(g_d^i g_a^k \tilde{\nabla}_i m_k\right) \\
&= g_c^i g_d^m g_a^n \tilde{R}_{nsim} V^s + 2\left(L_{a[c}^* L_{d]b}^* - K_{a[c} K_{d]b}\right) V^b \ .
\end{aligned}
$$

A kapott összefüggés a Gauss-azonosság:

$$
R_{abcd} = g_a^i g_b^l g_c^k g_d^l \tilde{R}_{ijkl} + 2\left(L_{a[c}^* L_{d]b}^* - K_{a[c} K_{d]b}\right) \ , \tag{6.2}
$$

mely kapcsolatot teremt a kétdimenziós felület Riemann-tenzora és külső görbületei, valamint a teljes téridő Riemann-tenzora között.

Gauss eredetileg ennek az összefüggésnek azt a speciális esetét írta fel, ami az euklideszi tér ($\tilde{R}_{ijkl} = 0$) 2+1 felbontására vonatkozik (azaz nem volt benne L_{ac}^*), vagyis az euklideszi térbe ágyazott felületek külső és belső görbületei között talált összefüggést (két dimenzióban a Riemann-tenzor egyetlen független komponessel rendelkezik, ez a Gauss-görbülettel hozható kapcsolatba). Gauss bizonyította be elsőként, hogy a Gauss-görbület csak a metrika függvénye, ezt az eredményét „Theorema Egregium"-nak (figyelemreméltó tételnek) nevezte. A tétel következménye, hogy a külső görbületek nem változtathatók tetszőlegesen, mint ahogy azt a (6.2) összefüggés mutatja.

6.2. A kétszer kontrahált Gauss-azonosság

A (6.2) összefüggés első kontrakciója

$$
R_{bd} = g^{ik} g_b^j g_d^l \tilde{R}_{ijkl} + L^* L_{db}^* - K K_{bd} - L_{ad}^* L_b^{*a} + K_{ad} K_b^a \ , \tag{6.3}
$$

míg második kontrakciója a

$$
R = g^{ik} g^{jl} \tilde{R}_{ijkl} + (L^*)^2 - K^2 - L_{ab}^* L^{*ab} + K_{ab} K^{ab} \tag{6.4}
$$

összefüggést adja. Itt K és L^* rendre a K_{ab} és L_{ab}^* spúrját jelöli. A kétszer kontrahált Gauss-azonosság 2+1+1 alakba írásához szükséges még a 4-dimenziós Riemann-tenzor 2+1+1 felbontása is:

$$
\begin{aligned}
g^{ik} g^{jl} \tilde{R}_{ijkl} &= \left(\tilde{g}^{ik} + n^i n^k - m^i m^k\right)\left(\tilde{g}^{jl} + n^j n^l - m^j m^l\right) \tilde{R}_{ijkl} \\
&= \tilde{R} + 2\left(n^j n^l - m^j m^l\right) \tilde{R}_{jl} - 2 n^i m^j n^k m^l \tilde{R}_{ijkl} \ .
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

A szükséges Ricci- és Riemann-tenzor projekciók 2+1+1 felbontása következőképpen történik:

$$\begin{aligned}
m^i n^j n^k m^l \tilde{R}_{ijkl} &= m^i n^k m^l \left(\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_l - \tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_k\right) n_i = m^i n^k m^l \left(\tilde{\nabla}_k \tilde{\nabla}_l n_i - \tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_k n_i\right) \\
&= m^i n^k m^l \tilde{\nabla}_k \left(K_{li} + m_l \mathcal{K}_i + m_i \mathcal{K}_l + m_l m_i \mathcal{K} - n_l \mathfrak{a}_i + n_l m_i \mathcal{L}^*\right) \\
&\quad - m^i n^k m^l \tilde{\nabla}_l \left(K_{ki} + m_k \mathcal{K}_i + m_i \mathcal{K}_k + m_k m_i \mathcal{K} - n_k \mathfrak{a}_i + n_k m_i \mathcal{L}^*\right) \\
&= m^i n^k \tilde{\nabla}_k \mathcal{K}_i + n^k m^l \tilde{\nabla}_k \mathcal{K}_l + n^k \tilde{\nabla}_k \mathcal{K} + \mathcal{L}^* n^k m^l \tilde{\nabla}_k n_l \\
&\quad - n^k m^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{K}_k + \mathcal{K} m_k m^l \tilde{\nabla}_l n^k - m^i m^l \tilde{\nabla}_l \mathfrak{a}_i + m^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{L}^* \\
&= -\mathcal{K}^i n^k \tilde{\nabla}_k m_i - \mathcal{K}_l n^k \tilde{\nabla}_k m^l + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - (\mathcal{L}^*)^2 \\
&\quad + \mathcal{K}_k m^l \tilde{\nabla}_l n^k + (\mathcal{K})^2 + \mathfrak{a}^i m^l \tilde{\nabla}_l m_i + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* \\
&= \mathcal{K}^k \left(2\mathcal{L}^*_k + \mathcal{K}_k\right) - (\mathcal{L}^*)^2 + (\mathcal{K})^2 + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} + \mathfrak{a}^i \mathfrak{b}^*_i \;,
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
n^j n^l \tilde{R}_{jl} &= n^j n^l \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ajbl} = \tilde{g}^{ab} n^l \left(\tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_l - \tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_b\right) n_a \\
&= \tilde{g}^{ab} n^l \tilde{\nabla}_b \left(K_{la} + m_l \mathcal{K}_a + m_l \mathcal{K}_a + m_l m_a \mathcal{K} - n_l \mathfrak{a}_a + n_l m_a \mathcal{L}^*\right) \\
&\quad - \tilde{g}^{ab} n^l \tilde{\nabla}_l \left(K_{ba} + m_b \mathcal{K}_a + m_b \mathcal{K}_a + m_b m_a \mathcal{K} - n_b \mathfrak{a}_a + n_b m_a \mathcal{L}^*\right) \\
&= -K^{lb} \tilde{\nabla}_b n_l - \mathcal{K}^b m^l \tilde{\nabla}_b n_l - \mathcal{K}^b m^l \tilde{\nabla}_b n_l - \mathcal{K} m^l m^b \tilde{\nabla}_b n_l + \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b \mathfrak{a}_a \\
&\quad - m^b \tilde{\nabla}_b \mathcal{L}^* - \mathcal{L}^* \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b m_a - n^l \tilde{\nabla}_l K - m^a n^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{K}_a - \mathcal{K}^b n^l \tilde{\nabla}_l m_b \\
&\quad - \mathcal{K}^b n^l \tilde{\nabla}_l m_b - m^a n^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{K}_a - \mathcal{K} m^a n^l \tilde{\nabla}_l m_a - \mathcal{K} m^b n^l \tilde{\nabla}_l m_b \\
&\quad - n^l \tilde{\nabla}_l \mathcal{K} + \mathfrak{a}^b n^l \tilde{\nabla}_l n_b - \mathfrak{a}^a n^l \tilde{\nabla}_l n_a + \mathcal{L}^* n_b n^l \tilde{\nabla}_l m^b - \mathcal{L}^* n^a n^l \tilde{\nabla}_l m_a \\
&= -K^{lb} K_{bl} - 2\mathcal{K}^b \mathcal{K}_b - (\mathcal{K})^2 + (\mathcal{L}^*)^2 - \mathcal{L}^* L^* \\
&\quad - \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* - \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} K - \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} + \tilde{\nabla}_b \mathfrak{a}^b \;,
\end{aligned} \tag{6.7}$$

és

$$\begin{aligned}
m^j m^l \tilde{R}_{jl} &= m^j m^l \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ajbl} = \tilde{g}^{ab} m^l \left(\tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_l - \tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_b\right) m_a \\
&= \tilde{g}^{ab} m^l \tilde{\nabla}_b \left(L^*_{la} + n_l \mathcal{L}^*_a + n_a \mathcal{K}_l + n_l n_a \mathcal{L}^* + m_l \left(\mathfrak{b}^*_a + n_a \mathcal{K}\right)\right) \\
&\quad - \tilde{g}^{ab} m^l \tilde{\nabla}_l \left(L^*_{ba} + n_b \mathcal{L}^*_a + n_a \mathcal{K}_b + n_b n_a \mathcal{L}^* + m_b \left(\mathfrak{b}^*_a + n_a \mathcal{K}\right)\right) \\
&= m^l \tilde{\nabla}_b \left[L^{*b}_l + n_l \mathcal{L}^{*b} + n^b \mathcal{K}_l + n_l n^b \mathcal{L}^* + m_l \left(\mathfrak{b}^{*b} + n^b \mathcal{K}\right)\right] \\
&\quad - m^l \tilde{\nabla}_l \left(L^* - \mathcal{L}^*\right) \\
&= -L^{*lb} \tilde{\nabla}_b m_l + \mathcal{L}^{*b} \mathcal{K}_b - \mathcal{K}_l n^b \tilde{\nabla}_b m^l - \mathcal{L}^* n^b n^l \tilde{\nabla}_b m_l \\
&\quad + \tilde{\nabla}_b \mathfrak{b}^{*b} + \mathcal{K} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b n_a + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} L^* + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* \\
&= -L^{*lb} L^*_{bl} + 2\mathcal{K}_l \mathcal{L}^{*l} - (\mathcal{L}^*)^2 + (\mathcal{K})^2 + \mathcal{K} K \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} L^* + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* + \tilde{\nabla}_b \mathfrak{b}^{*b} \;.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Az $\mathfrak{a}_b = D_b (\ln N)$ és $\mathfrak{b}^*_b = -D_b (\ln M)$ korábban már levezetett összefüggéseket használjuk az $\mathfrak{a}^i \mathfrak{b}^*_i$, $\tilde{\nabla}_b \mathfrak{a}^b$ és $\tilde{\nabla}_b \mathfrak{b}^{*b}$ tagokban, utóbbiak explicit alakja

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_b \mathfrak{a}^{*b} &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b \mathfrak{a}_a = \left(g^{ab} - n^a n^b + m^a m^b\right) \tilde{\nabla}_b \mathfrak{a}_a \\
&= D_a \mathfrak{a}^a + \mathfrak{a}^a (\mathfrak{a}_a - \mathfrak{b}^*_a) = D_a D^a (\ln N) + D^a (\ln N) D_a (\ln NM) \\
&= D_a \left(\frac{D^a N}{N}\right) + \frac{D^a N}{N} \frac{M D_a N + N D_a M}{NM} \\
&= \frac{D_a D^a N}{N} + \frac{D^a N D_a M}{NM} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_b \mathfrak{b}^{*b} &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b \mathfrak{b}^*_a = \left(g^{ab} - n^a n^b + m^a m^b\right) \tilde{\nabla}_b \mathfrak{b}^*_a \\
&= D_a \mathfrak{b}^{*a} + \mathfrak{b}^{*a} (\mathfrak{a}_a - \mathfrak{b}^*_a) \\
&= -D_a D^a (\ln M) - D^a (\ln M) \left[D_a (\ln N) + D_a (\ln M)\right] \\
&= \frac{D_a M D^a M}{M^2} - \frac{D_a D^a M}{M} - \frac{D^a M D_a N}{NM} - \frac{D_a M D^a M}{M^2} \\
&= -\left(\frac{D_a D^a M}{M} + \frac{D^a M D_a N}{NM}\right) .
\end{aligned}
$$

Ezeket visszaírva a (6.6), (6.7) és (6.8) egyenletekbe az

$$
\begin{aligned}
m^i n^j n^k m^l \tilde{R}_{ijkl} &= \mathcal{K}^k (2\mathcal{L}^*_k + \mathcal{K}_k) - (\mathcal{L}^*)^2 + (\mathcal{K})^2 + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - D^i (\ln N) D_i (\ln M) \ , \\
n^j n^l \tilde{R}_{jl} &= -K^{lb} K_{bl} - \mathcal{L}^* L^* - 2\mathcal{K}^b \mathcal{K}_b - (\mathcal{K})^2 + (\mathcal{L}^*)^2 - \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} K - \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* \\
&\quad + \frac{D_a D^a N}{N} + \frac{D^a N D_a M}{NM} , \\
m^j m^l \tilde{R}_{jl} &= -L^{*lb} L^*_{bl} + 2\mathcal{K}_l \mathcal{L}^{*l} - (\mathcal{L}^*)^2 + (\mathcal{K})^2 + \mathcal{K} K + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}} \mathcal{K} - \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} L^* + \tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}} \mathcal{L}^* \\
&\quad - \left(\frac{D_a D^a M}{M} + \frac{D^a M D_a N}{NM}\right) \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

összefüggéseket kapjuk. Megjegyezzük még, hogy a projekciók számolásánál felhasználtuk a

$$
\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a n^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a n_b = K + \mathcal{K} , \\
\tilde{\nabla}_a m^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a m_b = L^* - \mathcal{L}^*
\end{aligned}
$$

összefüggéseket.

A (6.4), (6.5) és (6.9) összefüggésekből

$$
\begin{aligned}
R &= \tilde{R} + 2n^j n^l \tilde{R}_{jl} - 2m^j m^l \tilde{R}_{jl} + 2m^i n^j n^k m^l \tilde{R}_{ijkl} + (L^*)^2 - (K^*)^2 - L^*_{ab}L^{*ab} + K_{ab}K^{ab} \\
&= \tilde{R} + (L^*)^2 - K^2 - L^*_{ab}L^{*ab} + K_{ab}K^{ab} \\
&\quad -2K^{lb}K_{bl} - 2\mathcal{L}^* L^* - 4\mathcal{K}^b\mathcal{K}_b - 2(\mathcal{K})^2 + 2(\mathcal{L}^*)^2 - 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}}K - 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}}\mathcal{K} - 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}}\mathcal{L}^* \\
&\quad +2\frac{D_a D^a N}{N} + 2\frac{D^a N D_a M}{NM} \\
&\quad +2L^{*lb}L^*_{bl} - 4\mathcal{K}_l\mathcal{L}^{*l} + 2(\mathcal{L}^*)^2 - 2(\mathcal{K})^2 - 2\mathcal{K}K - 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}}\mathcal{K} + 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}}L^* - 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}}\mathcal{L}^* \\
&\quad +2\frac{D_a D^a M}{M} + 2\frac{D^a M D_a N}{NM} \\
&\quad +4\mathcal{K}^k\mathcal{L}^*_k + 2\mathcal{K}^k\mathcal{K}_k - 2(\mathcal{L}^*)^2 + 2(\mathcal{K})^2 + 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}}\mathcal{L}^* + 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}}\mathcal{K} - 2D^i(\ln N)D_i(\ln M) \\
&= \tilde{R} + (L^*)^2 - K^2 + L^*_{ab}L^{*ab} - K_{ab}K^{ab} - 2\mathcal{K}^b\mathcal{K}_b - 2\mathcal{K}(K-\mathcal{K}) + 2\mathcal{L}^*(\mathcal{L}^* - L^*) \\
&\quad -2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}}(K+\mathcal{K}) + 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}}(L^* - \mathcal{L}^*) + 2\left[\frac{D_a D^a N}{N} + \frac{D_a D^a M}{M} + \frac{D^a M D_a N}{NM}\right]
\end{aligned}
$$

azaz a keresett kétszer kontrahált Gauss összefüggés:

$$
\begin{aligned}
R &= \tilde{R} - K^2 - K_{ab}K^{ab} + (L^*)^2 + L^*_{ab}L^{*ab} - 2\mathcal{K}^b\mathcal{K}_b - 2\mathcal{K}(K-\mathcal{K}) + 2\mathcal{L}^*(\mathcal{L}^* - L^*) \\
&\quad -2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}}(K+\mathcal{K}) + 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}}(L^* - \mathcal{L}^*) + 2\left[\frac{D_a D^a N}{N} + \frac{D_a D^a M}{M} + \frac{D^a M D_a N}{NM}\right]. \quad (6.10)
\end{aligned}
$$

Ezzel általánosítottuk a [8, 9]-ben levezetett kétszer kontrahált Gauss-összefüggést.

Merőleges fóliázások határesetében a [8, 9]-ben levezetett kétszer kontrahált Gauss-összefüggést kell visszakapnunk, azonban az $\left(L^*_{ab}L^{*ab} - K_{ab}K^{ab}\right)$ kombináció előjele nálunk $+1$, a korábban publikált -3 helyett. Az ellenőrző számolások megerősítették a jelenlegi eredmény helyességét.

6.3. Az Einstein-Hilbert hatás 2+1+1 felbontása

A (6.1) hatásban szereplő görbületi skalár 2+1+1 felbontását az előző alfejezetben végeztem el. A teljes felbontáshoz szükséges még a $\sqrt{-\tilde{g}}$ felbontása. Ezt a [8] függelékében levezették, alakja nem változik a kettős fóliázás nemmerőleges jellege miatt: $\sqrt{-\tilde{g}} = NM\sqrt{g}$. Így az Einstein-Hilbert hatás

$$
\begin{aligned}
S_{EH} &= S_{EH}\left[\{g_{ab}, M^a, M\}; \{K_{ab}, \mathcal{K}^a, \mathcal{K}\}; \{L^*_{ab}, \mathcal{L}^*\}; \{N, N^a, \mathcal{N}\}\right] \\
&= \int dt \int d\chi \int_{\Sigma_{t\chi}} d^2x NM\sqrt{g}\left\{R + K^2 + K_{ab}K^{ab} - (L^*)^2 - L^*_{ab}L^{*ab}\right. \\
&\quad +2\mathcal{K}^a\mathcal{K}_a + 2\mathcal{K}(K-\mathcal{K}) - 2\mathcal{L}^*(\mathcal{L}^* - L^*) + 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{n}}(K+\mathcal{K}) - 2\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbf{m}}(L^* - \mathcal{L}^*) \\
&\quad \left. -2\left[N^{-1}D_a D^a N + M^{-1}D_a D^a M + (NM)^{-1}D^a M D_a N\right]\right\} \quad (6.11)
\end{aligned}
$$

alakot ölti. Ebben a hatásban kizárólag a $\Sigma_{t\chi}$-n értelmezett tenzorok, vektorok és skalárok szerepelnek. Az S_{EH} hatás argumentumai közül $\{g_{ab}, M^a, M\}$ általánosított koordináták, $\{K_{ab}, \mathcal{K}^a, \mathcal{K}\}$ általánosított sebességek, $\{L^*_{ab}, \mathcal{L}^*\}$ általánosított koordináták χ-deriváltjainak szerepét töltik be. Akár a 3+1 felbontásban, $\{N, N^a, \mathcal{N}\}$ időderiváltjai nem szerepelnek a hatásban, és várhatóan itt is a hamiltoni formalizmusra való áttérés során Lagrange-szorzó szerepét töltik majd be.

7. fejezet

Összefoglalás és kitekintés

Az általános relativitáselmélet görbült téridejében a gravitációs hullámok fénysebességgel (határsebességgel) terjednek, kijavítva a gravitáció newtoni leírását. Valahányszor adott vonatkoztatási rendszerben végzünk méréseket, szükségessé válik az idő kitüntetett kezelése. A téridő 3+1 felbontásában, a gravitáció ún. ADM formalizmusában [1] az állandó idejű 3-dimenziós hiperfelületek serege fóliázást alkot. Ha egy térdimenzió is speciális szerepet tölt be, indokolttá válik a téridő 2+1+1 felbontása. Ez lehetséges a kiválasztott idő- és térszerű kongruenciák optikai skalárjainak (örvény, nyírás, expanzió) bevonásával, mint a [7] munkában tárgyalt gravitációs hullámok tárgyalásakor. Ismert olyan formalizmus is, melyben a felbontást merőleges kettős fóliázás biztosítja [8, 9]. Az utóbbit a gömbszimmetrikus téridő-perturbációk páratlan szektorának vizsgálatakor használták [10] a sötét anyag és energia motiválta skalár-tenzor gravitációelméletekben.

Itt említjük meg a [11, 12] munkákban kidolgozott formalizmust is, melyben egy $\mathcal{H}$ fóliázást tovább fóliáztak térszerű S_t felületekkel (a mi jelölésünkben ez $\Sigma_{t\chi}$-nek felel meg), és szintén használták a normális fundamentál forma fogalmát S_t beágyazásának jellemzésére. A formalizmust térszerű $\mathcal{H}$ esetén a fekete lyukak dinamikus horizontjának tanulmányozására használták [13, 14, 15], fényszerű $\mathcal{H}$ esetén segítségével levezették a horizonton érvényes Damour-Navier-Stokes egyenletet [16, 17, 18], míg időszerű $\mathcal{H}$ esetén az impulzusmomentum értelmezésében játszott szerepet [19].

A jelen dolgozat célja a [8, 9]-ben kidolgozott formalizmus olyan általánosítása volt, mely a páros szektor elemzéséhez szükséges, ahol a mértékszabadság nem használható fel egy metrikus változó eltüntetésére. Az új formalizmusban a korábbi 9 helyett 10 metrikus változó szerepel. A [8, 9]-cel ellentétben ezt úgy valósítottuk meg, hogy a két fóliázás nem merőleges, és két ortonormált bázist határoznak meg.

Az ADM formalizmusban a hiperfelület indukált metrikája és külső görbülete hamiltoni értelemben vett koordináta és impulzus szerepét töltik be. A dolgozatban meghatároztam a kétféle fóliázást jellemző geometriai mennyiségek közül azokat (K_{ab}, $\mathcal{K}_a$, $\mathcal{K}$), melyek a metrikus változók időderiváltjaival állnak kapcsolatban, valamint azokat (L^*_{ab}, $\mathcal{L}^*$), melyek csak térderiváltjaikat tartalmazzák. Elvégeztem a gravitáció Einstein-Hilbert hatásának 2+1+1 felbontását, felírva a gravitációs hatást ezekben a változókban. Ennek kapcsán kijavítottam egy együtthatót a görbületi skalár korábban publikált 2+1+1 felbontásában.

Eddigi eredményeinkből látszik, hogy (a merőleges kettős fóliázáshoz hasonlóan) a kanonikus koordináták a (g_{ab}, M_a, M) metrikus változók lesznek, kanonikus impulzusaikat pedig a (K_{ab}, $\mathcal{K}_a$, $\mathcal{K}$) mennyiségek adják meg. Például, ha egy $\partial/\partial\chi$ integrálgörbéi mentén terjedő gravitációs hullámot tekintünk, a kétféle ($+$ és $\times$) tranzverzális polarizáció hordozója g_{ab}, míg K_{ab} a gravitációs hullám impulzusát határozza meg.

A merőleges kettős fóliázás esetével ellentétben a kiegészítő (csak térderiváltakat tartalmazó) geometriai mennyiségek nem az időszerű fóliázás normálvektorához tartozó (L_{ab}, $\mathcal{L}$) geometriai mennyiségek lesznek, hanem a térszerű fóliázás által meghatározott m^a bázisvektorhoz tartozó (L^*_{ab}, $\mathcal{L}^*$) mennyiségek. A formalizmus tartalmaz még 4 Lagrange-szorzó szerepet betöltő metrikus mennyiséget, ezek (a merőleges kettős fóliázás esetén is megjelenő) N lapse és N^i 2-dimenziós shift vektor, valamint a (korábban nullának választott) harmadik shift-komponens, az $\mathcal{N}$ (vagy az ekvivalens információt hordozó ϕ vagy $\mathfrak{s}$ mennyiségek). Az utóbbi metrikus változóról beláttam, hogy meghatározza 1) a bázisok Lorentz-forgatásának szögét, 2) a bázisvektorok örvényességének mértékét.

Az eddigi eredményekből a közeljövőben publikáció készül. Ez lehetőséget teremt majd a gömbszimmetrikus téridő-perturbációk páros szektorának vizsgára a sötét anyag és energia motiválta skalár-tenzor gravitációelméletekben. Másik alkalmazásként a későbbiekben tervezzük a kidolgozott formalizmus felhasználását a kanonikusan kvantálható hengerszimmetrikus gravitációs hullámok hamiltoni tárgyalására is.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Dr. Keresztes Zoltánnak szakmai útmutatásait, az új ismeretek megtanítására szánt idejét és türelmét a dolgozat írásának egész ideje alatt. Köszönöm Dr. Gergely Árpád Lászlónak a remek témát a dolgozatomhoz, mely a kezdetektől mostanáig kíváncsisággal tölt el. Továbbá köszönöm segítségét az előző cikkeinek értelmezéséhez, valamint hogy bármikor lehetett kérdésekkel fordulni hozzá. Köszönöm családomnak, hogy aggódva figyelte végig a munkámat és saját fáradságukat félretéve támogattak, mikor szükségem volt rá.

Nyilatkozat

Alulírott Nagy Cecília, Fizika BSc szakos hallgató (ETR azonosító: NACWAAT.SZE), a „Gravitációs dinamika kétszeresen fóliázható téridőkben” című szakdolgozat szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, 2017. május 18.

....
a hallgató aláírása

1. Függelék: A kutatási feladatok

Témavezetőmtől kapott feladatom volt a [8, 9]-ben kidolgozott formalizmus és abban használt számolási módszerek értelmezése, reprodukálása és olyan általánosítása, mely a gömbszimmetrikus gravitáció perturbációi közül a páros szektor elemzéséhez szükséges. Utóbbira a [8, 9] formalizmusa nem volt alkalmazható (más célra szükséges mértékszabadságot azon metrikus változó eltűntetésére használt fel, amely a téridő dupla fóliázásának merőlegességét biztosítja [10]). Az új formalizmusban nem szabtuk ki a fóliázások merőlegességét.

A témámhoz sok új fogalommal kellett megismerkednem, mint az indukált metrika, külső görbület, normális fundamentális forma és skalár, proiciált kovariáns- és Lie-deriválás és örvény-tenzor. A dolgozatomban szereplő számolások felét önállóan végeztem el, másik felét közösen végeztük. A dolgozatom eredményeinek helyességét a merőleges határeset segítségével [8, 9] ellenőríztem. Számolásaim figyelembevételével készítettem el a 2.1 ábrát, melyen a $\partial/\partial t$ vektort az $\mathfrak{M}_\chi$ érintőjeként ábrázolva, javítottam a [8] 2. ábráját.

Dualitási relációk használatával meghatároztam az $\mathcal{S}_t$ térszerű és $\mathfrak{M}_\chi$ időszerű hiperfelületekhez (metszetük $\Sigma_{t\chi}$) adaptált ortonormált bázisok, valamint a kétszeresen fóliázható téridő érintőterén bevezetett koordinátabázisok közötti összefüggéseket. Felhasználásukkal beláttam, hogy az új formalizmusban 10 gravitációs változó marad, ezek a 4-dimenziós metrika független komponensei. Megállapítottam, hogy a merőleges fóliázáshoz képest megjelenő új metrikus változó, az $\mathcal{N}$ shift-komponens, a téridő dupla fóliázása során használt felületek közötti Lorentz-forgatás szögével áll kapcsolatban. További számolásaim azt mutatták, hogy az új metrikus változó az $\mathfrak{M}_\chi$, illetve az $\mathcal{S}_t$ hiperfelületek $\Sigma_{t\chi}$-re merőleges időszerű k^a, illetve térszerű m^a érintőinek 3-dimenziós örvényeiként is interpretálható.

Elvégezve az n^a, m^a, k^a, l^a bázisvektorok kovariáns deriváltjainak felbontását, a [8, 9] cikkekhez képest több geometriai mennyiségeket kaptam. Az új mennyiségek közötti összefüggések meghatározásához a [8] C függelékében található módszert használtam, melynek elsajátításához témavezetőm és Dr. Gergely Árpád László nyújtott segítséget. Bebizonyítottam, hogy az új mennyiségek közül egyesek dinamikai változó szerepet töltenek be (K^*_{ab}, $\mathcal{K}^*_a$, $\mathcal{L}^*_a$, $\mathcal{K}^*$), mások csupán a metrikus változók térbeli deriváltjait tartalmazzák (L^*_{ab}, $\mathcal{L}^*$). Általánosított koordinátáknak a (g_{ab}, M_a, M) metrikus változókat választva, az általánosított sebességek a (K_{ab}, $\mathcal{K}_a$, $\mathcal{K}$) kinematikai mennyiségekkel állnak rendre kapcsolatban.

Az Einstein-Hilbert hatás 2+1+1 felbontásához [8, 9] eljárását és témavezetőm útmutatásait követve, kiszámoltam a kétszer kontrahált Gauss összefüggésben szereplő Ricci- és Riemann-tenzor projekciók, majd a görbületi skalár 2+1+1 felbontását (ennek során kijavítottam a [8, 9]-ben megadott egyik együtthatót). Beláttam azt is, hogy az Einstein-Hilbert hatás 2+1+1 felbontásában az N, N^a, $\mathcal{N}$ metrikus változók időderiváltjai nem szerepelnek.

2. Függelék: A Frobenius-tétel és duális alakja

A Frobenius-tétel tárgyalásához először szükségünk van a hiperfelület fogalmának bevezetésére. Ha $\mathcal{H}$ egy p-dimenziós sokaság és megadható egy $\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$, C^r leképezés, amely $\mathcal{H}$ és annak $\Phi(\mathcal{H})$ képe között homeomorfizmust létesít (ahol $\Phi(\mathcal{H})$ az $\mathcal{M}$-ből örökölt altopológiát hordozza), akkor $\mathcal{H}$-t beágyazott alsokaságnak nevezzük [21]. A [22] terminológiáját követve, a 2- vagy 3-dimenziójú beágyazott alsokaságra felület- illetve hiperfelületként hivatkozok.

Ha az n-dimenziós $\mathcal{M}$ sokaság összes x pontjában kiválasztjuk a $T\mathcal{M}_x$ érintőtérnek egy m-dimenziós W_x alterét, olyan módon, hogy a $W = \bigcup\limits_x W_x$ halmazt C^∞ vektormezők alkossák, akkor nem biztos, hogy meg tudunk adni olyan beágyazott alsokaságot, amelynek érintőterei minden pontban W_x-el egyeznek meg. Ha van ilyen sokaság azt integrális alsokaságnak nevezzük. Hogy mikor található integrális alsokaság, arra a Frobenius-tétel ad szükséges és elégséges feltételt.

Frobenius-tétel vektori alakja [23]:

Az $\mathcal{M}$ sokaság összes x pontjának tangens terében adott W_x m-dimenziós alterek $W = \bigcup\limits_x W_x$ halmaza meghatároz egy integrális alsokaságot, akkor és csak akkor, ha tetszőleges W-beli vektormezők Lie-zárójelei is W-be esnek. Vagyis

$$W \ni [Y,\ Z]^a \equiv Y^b \partial_b Z^a - Z^b \partial_b Y^a = Y^b \tilde{\nabla}_b Z^a - Z^b \tilde{\nabla}_b Y^a\ ,$$

ha $Y^a,\ Z^a \in W$. (A fenti összefüggésben a $\tilde{\nabla}$ kovariáns deriválás az $\mathcal{M}$ sokaságon bevezetett $\tilde{g}_{ab}$ metrikával kompatibilis, azaz $\tilde{\nabla}_c \tilde{g}_{ab} = 0$.) A bizonyítása megtalálható például a [20]-ben.

A érintőnyaláb elemeivel megfogalmazott Frobenius-tételt szokás átírni a koérintőnyaláb elemeivel kifejezve. Ehhez bevezetjük a $T\mathcal{M}_x$ érintőtér duálisának azon $U_x^* \subset T^*\mathcal{M}_x$ $n-m$ dimenziós alterét, amelynek a W_x a nulltere, vagyis U_x^* μ_a elemei a W_x Y^a vektoraihoz zérust rendelnek: $\mu_a Y^a = 0$.

Frobenius-tétel duális alakja [23]:

A W_x m-dimenziós alterek W nyalábja meghatároz egy integrális alsokaságot, akkor és csak akkor, ha minden $\omega_a \in U^* = \bigcup\limits_x U_x^*$ kovariáns deriváltja az alábbi alakban írható:

$$\tilde{\nabla}_{[a}\mu_{b]} = \sum_{i=1}^{n-m} \eta_{[a}^{(i)} V_{b]}^{(i)}\ , \tag{1}$$

ahol $V_b^{(i)} \in T^*\mathcal{M}$ tetszőleges 1-forma mezők és valamennyi $\eta_a^{(i)} \in U^*$.

Bizonyítás: Legyen Y^a, $Z^a \in W$ és $\mu_a \in U^*$. A W nyaláb és csak akkor határoz meg egy integrális alsokaságot, ha

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_a [Y,\ Z]^a = \mu_a \left(Y^b \tilde{\nabla}_b Z^a - Z^b \tilde{\nabla}_b Y^a \right) \\ &= -Y^b Z^a \tilde{\nabla}_b \mu_a + Z^b Y^a \tilde{\nabla}_b \mu_a = -2 Y^a Z^b \tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Az utóbbi kifejezés nyilvánvalóan eltűnik, ha μ_a kovariáns deriváltja (1) alakú, hiszen $Y^a \eta_a^{(i)} = Z^a \eta_a^{(i)} = 0$. Azt kell belátnunk, hogy ha μ_a kovariáns deriváltja az (1)-től eltérő, akkor (2) nem teljesül. Tehát legyen

$$\tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{[a}^{(i)} V_{b]}^{(i)} \ ,$$

ahol $V_b^{(i)} \in T^* \mathcal{M}_x$ tetszőleges 1-formák és valamennyi $\xi_a^{(i)} \in U_x$. Mivel $m-$dimenziós U_x térben m darab lineárisan független $\xi_a^{(i)}$ választható, ezért elegendő megmutatni, hogy a

$$\tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = \xi_{[a} V_{b]}, \tag{3a}$$

választás nem jó (ahol ξ_a nem arányos V_a-val), mert lineárisan független ξ_a-kból alkotott ilyen mennyiségek tetszőleges lineáris kombinációja sem fogja teljesíteni (2) egyenletet. A (3a) választás nem lesz jó mert ez esetben tetszőleges Y^a, Z^a-re írhatjuk hogy:

$$0 = 2 Y^a Z^b \tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = \left(Y^a Z^b - Y^b Z^a \right) \xi_a V_b \ .$$

Az Y^a-t válasszuk meg W-ben úgy, hogy $Y^a \xi_a = 0$ és $Y^a V_a \neq 0$ teljesüljön, ekkor a (3a) egyenletből következik, hogy $Z^a \xi_a = 0$, ami tetszőleges $Z^a \in W$-re nem állhat fent.

Q.E.D.

Speciális esetben, amennyiben a hiperfelületek $(n-1)$-dimenziósak (egy normálisuk van, a $\mu^a = \tilde{g}^{ab} \mu_b$), a Frobenius-tétel duális megfogalmazása szerint akkor létezik az $(n-1)$-dimenziós hiperfelület, ha

$$\tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = \mu_{[a} V_{b]}. \tag{4}$$

Ennek bizonyítása hasonló:

$$\begin{aligned} 2 Y^a Z^b \tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} &= 2 Y^a Z^b \mu_{[a} V_{b]} = Y^a Z^b \mu_a V_b - Y^a Z^b \mu_b V_a \\ &= \left(Y^a \mu_a \right) \left(Z^b V_b \right) - \left(Y^a V_a \right) \left(Z^b \mu_b \right) \\ &= 0 \left(Z^b V_b \right) - \left(Y^a V_a \right) 0 = 0 \ . \end{aligned}$$

Bontsuk fel a metrikus tenzort $\tilde{g}_{ab} = \epsilon \mu_a \mu_b + h_{ab}$ alakba, ahol h_{ab} az indukált metrika és $\epsilon = \mu^a \mu_a = \pm 1$. Belátható, hogy

$$0 = \tilde{\nabla}_b \left(\mu^a \mu_a \right) = \mu^a \tilde{\nabla}_b \mu_a + \mu_a \tilde{\nabla}_b \mu^a = 2 \mu^a \tilde{\nabla}_b \mu_a \quad \rightarrow \quad \mu^a \tilde{\nabla}_b \mu_a = 0 \ . \tag{5}$$

A (4) összefüggés hiperfelületre eső, arra merőleges és vegyes projekciói a

$$h_a^c h_b^d \tilde{\nabla}_{[c} \mu_{d]} \quad ; \quad \mu^a \mu^b \tilde{\nabla}_{[a} \mu_{b]} = 0 \quad ; \quad h_a^c h_b^d \tilde{\nabla}_{[c} \mu_{d]} \ . \tag{6}$$

Ezek közül az első pontosan az örvénytenzor:

$$\omega_{ab} \equiv \nabla_{[a}\mu_{b]} \equiv h_a^c h_b^d \tilde{\nabla}_{[c}\mu_{d]} \ . \tag{7}$$

A képletben szereplő ∇ az indukált metrikával kompatibilis kovariáns deriválást jelöli, ami a $\tilde{\nabla}$ kovariáns derivált projekciójaként áll elő. Megjegyezzük, hogy bevezethető az $\omega_a = 1/2\epsilon^{bc}\omega_{bc}$ örvényvektor is. Mivel ϵ-tól függetlenül

$$h_b^a \mu_a = \left(\tilde{g}_b^a - \epsilon\mu^a\mu_b\right)\mu_a = \tilde{g}_b^a\mu_a - \epsilon\mu_a\mu^a\mu_b = \mu_b - \epsilon^2\mu_b = 0 \ ,$$

ezért μ^b hiperfelület-merőleges vektor örvénymentes

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &= h_a^c h_b^d \mu_{[c}V_{d]} = \frac{1}{2}\left[h_a^c h_b^d \mu_c V_d - h_a^c h_b^d \mu_d V_c\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(h_a^c\mu_c\right)\left(h_b^d V_d\right) - \left(h_a^c V_c\right)\left(h_b^d\mu_d\right)\right] = 0 \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Beláttuk tehát, hogy a Frobenius tétel teljesülése μ_a forma és ezzel együtt μ^a normális örvénymentességét is jelenti.

Végül, a vegyes projekció a μ^a kongruencia gyorsulásának kifejezését adja meg V_a és μ_a függvényében:

$$\begin{aligned} \mu^b\tilde{\nabla}_{[a}\mu_{b]} &= \mu^b\mu_{[a}V_{b]} \\ \mu^b\left(\nabla_a\mu_b - \nabla_a\mu_b\right) &= \mu^b\left(\mu_a V_b - \mu_b V_a\right) \\ \mu^b\nabla_a\mu_b - \mu^b\nabla_b\mu_a &= \mu_a\mu^b V_b - \mu^b\mu_b V_a \\ \mu^b\nabla_b\mu_a &= \epsilon V_a - \mu_a\mu^b V_b \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Irodalomjegyzék

[1] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, 7. fejezet, 227–265, szerkesztő L. Witten, Wiley, New York, (1962).

[2] C. W. Misner, K. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, p. 527, W. A. Freeman and Company (1973).

[3] C. J. Isham, K. V. Kuchař, *Representations of space-time diffeomorphisms I. II.*, Ann. Phys. (N.Y.), **164**, 288 (1985), *ibid.* **164**, 316 (1985).

[4] B. Mongwane, *On the Hyperbolicity and Stability of 3+1 Formulations of Metric f(R) Gravity,* (2016), [arXiv:1610.07224].

[5] C. Clarkson, *A Covariant approach for perturbations of rotationally symmetric spacetimes*, Phys. Rev. D **76**, 104034 (2007) [arXiv:0708.1398].

[6] C. A. Clarkson, R. K. Barrett, *Covariant perturbations of Schwarzschild black holes*, Class. Quant. Grav. **20**, 3855 (2003) [gr-qc/0209051].

[7] Z. Keresztes, M. Forsberg, M. Bradley, P. K. S. Dunsby, L. Á. Gergely, *Gravitational, shear and matter waves in Kantowski-Sachs cosmologies*, J. Cosmol. Astropartic. Phys. **11**, 042 (2015) [arXiv:1507.08300 [gr-qc]].

[8] L. Á. Gergely, Z. Kovács, *Gravitational dynamics in s+1+1 dimensions*, Phys. Rev. D **72**, 064015 (2005). A (β_a) mennyiségek jelölései ebben a munkában (λ_a).

[9] Z. Kovács, L. Á. Gergely, *Gravitational dynamics in s+1+1 dimensions II. Hamiltonian theory*, Phys. Rev. D **77**, 024003 (2008).

[10] R. Kase, L. Á. Gergely, S. Tsujikawa, *Effective field theory of modified gravity on spherically symmetric background: leading order dynamics and the odd mode perturbations*, Phys. Rev. D **90**, 124019 (2014) [arXiv:1406.2402 [hep-th]].

[11] E. Gourgoulhon, S. Bonazzola, *Noncircular axisymmetric stationary spacetimes*, Phys. Rev. D **48**, 2635 (1993).

[12] E. Gourgoulhon, *Generalized Damour-Navier-Stokes equation applied to trapping horizons*, Phys. Rev. D **72**, 104007 (2005).

[13] A. Ashtekar, B. Krishnan, *Isolated and Dynamical Horizons and Their Applications*, Living Rev. Relativity 7, 10 (2004).

[14] A. Ashtekar, B. Krishnan, *Dynamical Horizons: Energy, Angular Momentum, Fluxes, and Balance Laws*, Phys. Rev. Lett. **89**, 261101 (2002).

[15] A. Ashtekar, B. Krishnan, *Dynamical horizons and their properties*, Phys. Rev. D **68**, 104030 (2003).

[16] T. Damour, *Thése de doctorat d'État*, Université Paris 6 (1979).

[17] T. Damour, *Proceedings of the Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, ed. R. Ruffini (North-Holland, Amsterdam, 1982), p. 587.

[18] E. Gourgoulhon, J. L. Jaramillo, *A 3+1 perspective on null hypersurfaces and isolated horizons*, Phys. Rept. **423**, 159-294 (2006) [arXiv:gr-qc/0503113].

[19] J. D. Brown, *Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action*, J.W. York, Phys. Rev. D **47**, 1407 (1993).

[20] Th. Frankel, *The Geometry of Physics*, An Introduction, Cambridge Univ. Press (2012).

[21] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, 23. old., Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (1973)

[22] J. A. Schouten, *Der Ricci Kalkül*, Springer Verlag (1924).

[23] R. Wald, *General Relativity*, 434-436.old., Appendix B.3, The University of Chicago Press (1984).