PROJEKTMUNKA

Kivés Miklós

2014

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Elméleti Fizikai Tanszék

Projektmunka

Lagrange-formalizmus a gravitáció és a tachion skalármező példáiban

Kivés Miklós

Fizika BSc szakos hallgató

Témavezető: Dr. Keresztes Zoltán

Szeged
2014

Tartalmi összefoglaló

A projektmunka keretein belül a Lagrange-formalizmust tanulmányoztam a gravitáció és a tachion skalármezők eseteiben.

A bevezetőben a Lagrange-formalizmust mutatom be tenzormező példáján keresztül, majd az Einstein-Hilbert hatás alapján levezetem a vákuumbeli Einstein-egyenletet, végül a tachion skalármező mezőegyenletét írom fel.

A dolgozat elkészítéséhez alapirodalomként Wald [1] könyvét használtam. A dolgozatban a $-+++$ szignatúrát alkalmazom.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

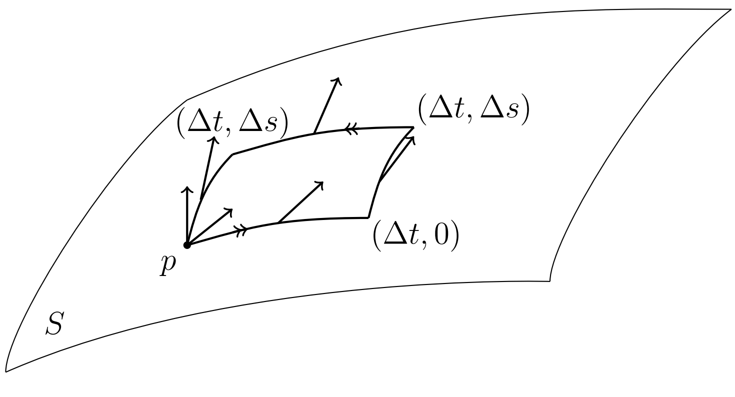
A Világegyetemben zajló folyamatok megértésében kulcsfontosságú szerepet tölt be Albert Einstein 1916-ban közzétett általános relativitáselmélete. Az elmélet szerint a téridő görbült és ez magyarázza a gravitációs erőnek tulajdonított hatásokat.

A görbületet a párhuzamos eltolás segítségével értelmezhetjük. Derivált operátor megadásával lehetőségünk van egy vektor párhuzamos eltolásának definiálására. Az általános relativitáselmélet a pszeudo-Riemann sokaságokon egyértelmű torziómentes és metrikával kompatibilis kovariáns deriválást ($\nabla_a g_{bc} = 0$: metrika kovariáns deriváltja zérus) használ.

Az általános relativitáselméletben központi szerepet tölt be a Riemann tenzor. Ha egy v^a vektort kis zárt hurok mentén párhuzamosan eltolunk, akkor visszaérve a kezdőpontba a vektor különbözni fog az eredeti vektortól. A különbséget a Riemann tenzor segítségével számolhatjuk ki:

$$\delta v^a = \Delta t\ \Delta s\ v^d T^c S^b R_{cbd}{}^a\ . \tag{1.1}$$

A speciális relativitáselmélet geometriáját a Minkowski-féle téridő adja, melyben a Riemann tenzor értéke nulla.



A Riemann tenzor antiszimmetrikus tulajdonságokkal rendelkezik: $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$ és $R_{abcd} = -R_{abdc}$. E két tulajdonságot figyelembe véve, ha vesszük a Riemann tenzor nyomát, akkor az első kettő vagy utolsó kettő indexére vonatkoztatva az eltűnik. Azonban a második és negyedik (vagy az első és harmadik) index esetén a nyom nem tűnik el, a két nyom megegyezik: $R_{ab} = g^{cd} R_{acbd}$, ahol R_{ab} a Ricci tenzort jelöli. A Riemann tenzorra igaz a következő szimmetrikus tulajdonság is: $R_{abcd} = R_{cdab}$, mely alapján a Ricci tenzor szimmetrikus: $R_{ac} = R_{ca}$. Ha vesszük a Ricci tenzor nyomát, akkor a Ricci skalárt kapjuk meg: $R = g^{ab} R_{ab}$. A Riemann tenzor további fontos tulajdonsága, hogy teljesíti a Bianchi azonosságot: $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^{e} = 0$. Ennek igazolása a függelékben található.

A Bianchi azonosságot kontrahálva δ^a_e-vel, amit Kronecker deltának nevezünk, a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} \nabla_a R_{bcd}{}^{e} + \nabla_b R_{cad}{}^{e} + \nabla_c R_{abd}{}^{e} &= \nabla_a R_{bcd}{}^{a} + \nabla_b R_{cad}{}^{a} - \nabla_c R_{bad}{}^{a} \\ &= \nabla_a R_{bcd}{}^{a} + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0 \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

A kapott kifejezést g^{bd}-vel kontrahálva:

$$\begin{aligned} & g^{bd} \left(\nabla_a R_{bcd}{}^{a} + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} \right) \\ &= \nabla_a R_c{}^{a} + \nabla_b R_c{}^{b} - \nabla_c R = 2\nabla_a R_b{}^{a} - \nabla_b R = 2\nabla_a \left(R_b{}^{a} - \frac{1}{2}\delta^a_b R \right) = 0 \ , \\ & \nabla_a \left(R_b{}^{a} - \frac{1}{2}\delta^a_b R \right) = \nabla_a \left(g^{ac} R_{cb} - \frac{1}{2} g^{ac} g_{cb} R \right) = g^{ac} \nabla_a \left(R_{cb} - \frac{1}{2} g_{cb} R \right) \\ &= \nabla^a \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) = 0 \ . \end{aligned} \tag{1.3}$$

A zárójelben lévő kifejezés az Einstein tenzor:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R \ g_{ab} \ . \tag{1.4}$$

Ha a téridőben található valamilyen anyag, akkor az Einstein-egyenlet szerint G_{ab} az anyagot jellemző energia-impulzussal arányos. Vákuumban az Einstein-egyenlet:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R \ g_{ab} = 0 \ . \tag{1.5}$$

2. fejezet

Lagrange-formalizmus

Legyen $\mathscr{M}$ egy pszeudo-Riemann sokaság, $\Psi \in \mathcal{T}^k{}_l\left(\mathscr{M}\right)$ egy (k,l) típusú sima tenzormező. Legyen $S\left[\Psi\right]$ a Ψ-nek egy funkcionálja, $S : \Psi \to \mathbb{R}$ leképezés. Jelölje Ψ_λ a mezőkonfigurációk egy sima egyparaméteres családját, amely $\lambda = 0$-ra megfelelő határfeltételeket teljesít.

Jelöljük $\left.\frac{\mathrm{d}\,\Psi_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}$-t $\delta\,\Psi$-vel, ami egyenértékű azzal, hogy $\Psi_\lambda = \Psi_0 + \lambda\;\delta\,\Psi + \mathcal{O}\left(\lambda^2\right)$. Feltesszük, hogy $\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}$ létezik minden olyan Ψ_λ egyparaméteres családra, amelyre Ψ_0 megfelelő határfeltételeket teljesít.

Feltesszük továbbá, hogy létezik egy (l,k) típusú χ sima tenzormező, amelyre

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_{\mathscr{M}} \chi \cdot \delta\,\Psi, \tag{2.1}$$

ahol $\chi \cdot \delta\,\Psi \;\equiv\; \chi^{a_1\ldots a_l}{}_{b_1\ldots b_k} \cdot \delta\,\Psi^{b_1\ldots b_k}{}_{a_1\ldots a_l}$, a χ és $\delta\,\Psi$ tenzormezők minden indexeikben kontraháltak, így egy skalár. Ha létezik ilyen χ tenzormező, akkor azt mondjuk, hogy S *funkcionálisan differenciálható* Ψ_0-ban, a χ tenzormező pedig az S *funkcionális deriváltja*:

$$\chi = \left.\frac{\delta S}{\delta\,\Psi}\right|_{\Psi_0}. \tag{2.2}$$

Feltesszük, hogy S az alábbi alakú:

$$S\left[\Psi\right] = \int_{\mathscr{M}} \mathscr{L}\left[\Psi\right], \tag{2.3}$$

ahol $\mathscr{L}$ a Ψ-nek, illetve Ψ véges számú deriváltjának lokális függvénye:

$$\mathscr{L}\big|_x = \mathscr{L}\left(\Psi(x), \nabla\,\Psi(x), \ldots, \nabla^k\,\Psi(x)\right). \tag{2.4}$$

Feltesszük, hogy S funkcionálisan differenciálható és a Ψ mező konfiguráció amely S-et extremalizálja:

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\,\Psi}\right|_{\Psi} = 0, \tag{2.5}$$

megegyezik a mezőegyenlet megoldásával. Ekkor S-et hatásnak, $\mathscr{L}$-et pedig *Lagrange sűrűség*nek nevezzük. Az $\mathscr{L}$ megadása jelenti a mezőelmélet rögzítését.

3. fejezet

Einstein-Hilbert hatás

A vákuumbeli Einstein-egyenletek leszármaztathatók az

$$S\left[g^{ab}\right]=\int \mathrm{d}^4x\ \mathscr{L}_G \tag{3.1}$$

Hilbert-hatásból, ahol $\mathscr{L}_G=\sqrt{-g}R$ a Lagrange sűrűség, g a metrika determinánsa, R a Ricci skalár.

Vezessük be a következő jelöléseket: $g^{ab}=g^{ab}_{\lambda=0}$, $\delta g^{ab}=\left.\frac{\mathrm{d}g^{ab}_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}$. Mivel

$$g^{ac}g_{cb}=\delta^a{}_b\ , \tag{3.2}$$

ezért $\left(\delta g^{ac}\right)g_{cb}+g^{ac}\delta g_{cb}=0$, mely egyenletet g_{da}-val kontrahálva kapjuk:

$$g_{da}g_{cb}\delta g^{ac}+g_{da}g^{ac}\ \delta g_{cb}=0 \quad\Rightarrow\quad \delta^c{}_d\delta g_{cb}=-g_{da}g_{cb}\delta g^{ac} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\delta g_{ab}=-g_{ac}g_{bd}\delta g^{cd}}.$$

Egy egyparaméteres családra vonatkoztatva az alábbi összefüggést írhatjuk fel:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}_G}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}=\sqrt{-g}\left(\delta R_{ab}\right)g^{ab}+\sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab}+R\delta\left(\sqrt{-g}\right)\ . \tag{3.3}$$

Mellékszámolások:

A Ricci tenzor a Christoffel-szimbólumokból az alábbi módon számolható:

$$R_{ab}=\partial_c\Gamma^c{}_{ab}-\partial_a\Gamma^c{}_{cb}+\Gamma^d{}_{ab}\Gamma^c{}_{dc}-\Gamma^d{}_{cb}\Gamma^c{}_{da}\ , \tag{3.4}$$

a Christoffel-szimbólumok pedig a metrikából a következőképpen:

$$\Gamma^c{}_{ab}=\frac{1}{2}g^{cd}\left(\partial_a g_{db}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab}\right)\ . \tag{3.5}$$

Mivel $g^{ab}_\lambda=g^{ab}+\lambda\delta g^{ab}+\mathcal{O}\left(\lambda^2\right)$, ezért $\Gamma^c{}_{ab}\to\Gamma^c{}_{ab}+\lambda\delta\Gamma^c{}_{ab}+\mathcal{O}\left(\lambda^2\right)$, továbbá $R_{ab}\to R_{ab}+\lambda\delta R_{ab}+\mathcal{O}\left(\lambda^2\right)$.

A Christoffel-szimbólumok variációja:

$$\delta\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}\left(\partial_a\delta g_{db} + \partial_b\delta g_{ad} - \partial_d\delta g_{ab}\right) + \underbrace{\delta g^{cd}\ g_{di}\ \Gamma^i{}_{ab}}_{-\Gamma^k{}_{ab}\ g^{cd}\ \delta g_{dk}}\ . \tag{3.6}$$

Tekintsük a δg_{ab} kovariáns deriváltját:

$$\nabla_a\delta g_{db} = \partial_a\delta g_{db} - \Gamma^k{}_{ad}\delta g_{kb} - \Gamma^k{}_{ab}\delta g_{dk}$$

$$\nabla_b\delta g_{ad} = \partial_b\delta g_{ad} - \Gamma^k{}_{ab}\delta g_{kd} - \Gamma^k{}_{bd}\delta g_{ak}$$

$$-\nabla_d\delta g_{ab} = -\partial_d\delta g_{ab} + \Gamma^k{}_{da}\delta g_{kb} + \Gamma^k{}_{db}\delta g_{ak}\ ,$$

az egyenleteket összeadva kapjuk:

$$\nabla_a\delta g_{db} + \nabla_b\delta g_{ad} - \nabla_d\delta g_{ab} = \partial_a\delta g_{db} + \partial_b\delta g_{ad} - \partial_d\delta g_{ab} - 2\Gamma^k{}_{ab}\delta g_{dk}\ . \tag{3.7}$$

Végül a Christoffel-szimbólumok variációja az alábbi alakba írható:

$$\boxed{\delta\Gamma^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}\left(\nabla_a\delta g_{db} + \nabla_b\delta g_{ad} - \nabla_d\delta g_{ab}\right)}\ . \tag{3.8}$$

Fontos megemlíteni, hogy $\delta\Gamma^c{}_{ab}$ tenzor mennyiség.

A Ricci tenzor variációja:

$$\delta R_{ab} = \partial_c\delta\Gamma^c{}_{ab} - \partial_a\delta\Gamma^c{}_{cb} + \left(\delta\Gamma^d{}_{ab}\right)\Gamma^c{}_{dc} + \Gamma^d{}_{ab}\delta\Gamma^c{}_{dc} - \left(\delta\Gamma^d{}_{cb}\right)\Gamma^c{}_{da} - \Gamma^d{}_{cb}\delta\Gamma^c{}_{da}\ . \tag{3.9}$$

Vegyük az alábbi kovariáns deriváltakat:

$$\nabla_c\delta\Gamma^c{}_{ab} = \partial_c\delta\Gamma^c{}_{ab} + \Gamma^c{}_{cd}\delta\Gamma^d{}_{ab} - \Gamma^d{}_{ca}\delta\Gamma^c{}_{db} - \Gamma^d{}_{cb}\delta\Gamma^c{}_{ad}$$

$$-\nabla_a\delta\Gamma^c{}_{cb} = -\partial_a\delta\Gamma^c{}_{cb} - \Gamma^c{}_{ad}\delta\Gamma^d{}_{cb} + \Gamma^d{}_{ac}\delta\Gamma^c{}_{db} + \Gamma^d{}_{ab}\delta\Gamma^c{}_{cd}\ ,$$

amelyeket összeadva kapjuk:

$$\nabla_c\delta\Gamma^c{}_{ab} - \nabla_a\delta\Gamma^c{}_{cb} = \partial_c\delta\Gamma^c{}_{ab} - \partial_a\delta\Gamma^c{}_{cb} + \Gamma^c{}_{cd}\delta\Gamma^d{}_{ab} + \Gamma^d{}_{ab}\delta\Gamma^c{}_{cd} - \Gamma^d{}_{cb}\delta\Gamma^c{}_{ad} - \Gamma^c{}_{ad}\delta\Gamma^d{}_{cb}\ .$$

Ez az eredmény, összehasonlítva a (3.9) összefüggéssel és kihasználva a Christoffel-szimbólum alsó indexpárban való szimmetrikus tulajdonságát, láthatóan megegyezik a Ricci tenzor variációjával:

$$\boxed{\delta R_{ab} = \nabla_c\delta\Gamma^c{}_{ab} - \nabla_a\delta\Gamma^c{}_{cb}}\ . \tag{3.10}$$

Ezt felhasználva $g^{ab}\delta R_{ab}$-re a következőt kapjuk:

$$g^{ab}\delta R_{ab} = g^{ab}\nabla_c\frac{1}{2}g^{cd}\left(\nabla_a\delta g_{db} + \nabla_b\delta g_{ad} - \nabla_d\delta g_{ab}\right) - g^{ab}\nabla_a\frac{1}{2}g^{cd}\left(\nabla_c\delta g_{db} + \nabla_b\delta g_{cd} - \nabla_d\delta g_{cb}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla^d\nabla^b\delta g_{db} + \nabla^d\nabla^a\delta g_{ad} - \nabla^d\nabla_d g^{ab}\delta g_{ab} - \nabla^b\nabla^d\delta g_{db} - \nabla^b\nabla_b g^{cd}\delta g_{cd} + \nabla^b\nabla^c\delta g_{cb}\right)$$

$$= \nabla^d\nabla^b\delta g_{db} - \nabla^d\nabla_d g^{cd}\delta g_{cd} = \nabla^d\left(\nabla^b\delta g_{db} - \nabla_d g^{cd}\delta g_{cd}\right)\ .$$

Eredményül az alábbit kapjuk:

$$\boxed{g^{ab}\delta R_{ab} = \nabla^a V_a} \ , \tag{3.11}$$

ahol $V_a = \nabla^b \delta g_{ab} - g^{cd}\nabla_a \delta g_{cd}$.

Szükség van még $\delta\left(\sqrt{-g}\right)$ variációjára is:

$$\boxed{\delta\left(\sqrt{-g}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ g_{ab}\ \delta g^{ab}} \ . \tag{3.12}$$

Ennek levezetése terjedelme miatt a következő alfejezetben kapott helyet.

Az eredményeket felhasználva

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}S_G}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \int \mathrm{d}^4x\ \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}_G}{\mathrm{d}\lambda} = \int \mathrm{d}^4x\ \left[\sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab} + \sqrt{-g}\left(\delta R_{ab}\right)g^{ab} + R\delta\left(\sqrt{-g}\right)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4x\ \left[\sqrt{-g}R_{ab}\delta g^{ab} + \sqrt{-g}\ \nabla^a V_a - \frac{1}{2}R\sqrt{-g}\ g_{ab}\ \delta g^{ab}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4x\ \sqrt{-g}\ \left(R_{ab} - \frac{1}{2}R\ g_{ab}\right)\delta g^{ab} + \int \mathrm{d}^4x\ \sqrt{-g}\ \nabla^a V_a \ .
\end{aligned}$$

A második tagot átalakíthatjuk a Stokes-tétel segítségével:

$$\int \mathrm{d}^4x\ \sqrt{-g}\ \nabla^a V_a = \int_{\mathcal{F}} n^a V_a\ \sqrt{|h|}\ \mathrm{d}^3y \ , \tag{3.13}$$

ahol $\mathcal{F}$ idő- vagy térszerű zárt határfelület, $\{y^i\}$-k $(i = 1, 2, 3)$ koordináták a határfelületen és n^a a felület normálisa (befelé mutató, ha $\mathcal{F}$ időszerű és kifelé mutató, ha $\mathcal{F}$ térszerű). Az $\mathcal{F}$ felületen indukált metrika az $\{y^i\}$ koordinátákban h_{ab}, ennek determinánsát pedig h jelöli. Koordináta független módon h_{ab} az alábbi módon fejezhető ki a g_{ab} metrika és az $\mathcal{F}$ felület normálisának segítségével[1]:

$$\epsilon = n^a n_a = \begin{cases} -1, & \text{ha } n^a \text{ időszerű} \\ +1, & \text{ha } n^a \text{ térszerű} \end{cases}$$

és $g_{ab} = \epsilon n_a n_b + h_{ab}$.

A hatás extrémuma:

$$\left.\frac{\mathrm{d}S_G}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int \mathrm{d}^4x\ \sqrt{-g}\ \left(R_{ab} - \frac{1}{2}R\ g_{ab}\right)\delta g^{ab} + \int_{\mathcal{F}} n^a V_a\ \sqrt{h}\ \mathrm{d}^3y \ .$$

A második tagban $n^a V_a$-t a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned}
n^a V_a = n^a\left(\nabla^b\delta g_{ab} - g^{cd}\nabla_a\delta g_{cd}\right) &= n^a g^{cd}\left(\nabla_c\delta g_{ad} - \nabla_a\delta g_{cd}\right) \\
&= n^a h^{cd}\left(\nabla_c\delta g_{ad} - \nabla_a\delta g_{cd}\right) = -n^a h^{cd}\nabla_a\delta g_{cd} \ ,
\end{aligned}$$

mivel $h^{cd}\nabla_c\delta g_{ad} = 0$, ha $\delta g_{ad} = 0$ a határon, amit pedig megkövetelünk. Viszont $n^a\nabla_a\delta g_{cd}$ nem feltétlen nulla a felületen, mert a felület normálisának irányában deriválunk. Ha n^a

[1] $\mathcal{F}$ térszerű, ha az indukált metrika szignatúrája $+++$, és időszerű, ha $-++$

a felület normálisa és h_{ab} a felületen indukált metrika, akkor a külső görbületi tenzor: $K_{ab} = h_a{}^c h_b{}^d \nabla_c n_d$, aminek a nyoma: $K = h^a{}_b \nabla_a n^b$. A határon, ahol $\delta g_{ab} = 0$, a külső görbület variációja:

$$\delta K = h^a{}_b \; \delta\Gamma^b{}_{ac} \; n^c = h^a{}_c \; \delta\Gamma^c{}_{ab} \; n^b = \frac{1}{2} h^a{}_c \; n^b \; g^{cd} \left(\nabla_a \delta g_{db} + \nabla_b \delta g_{ad} - \nabla_d \delta g_{ab} \right)$$

$$= \frac{1}{2} h^{ad} \; n^b \; \nabla_b \; \delta g_{ad} \; .$$

Ezt felhasználva az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\boxed{ \left. \frac{\mathrm{d}S_G}{\mathrm{d}\lambda} \right|_{\lambda=0} = \int \mathrm{d}^4 x \; \sqrt{-g} \; \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R \; g_{ab} \right) \delta g^{ab} - 2 \int_{\mathcal{F}} \delta K \; \sqrt{h} \; \mathrm{d}^3 y } \; . \tag{3.14}$$

Megkövetelve a határon $\delta g_{ab} = 0$ mellett a $\delta K = 0$ feltételt, akkor δg^{ab} $\mathcal{F}$-en belüli tetszőlegessége következtében a hatás extrémumából kapjuk, hogy

$$\boxed{ R_{ab} - \frac{1}{2} R \; g_{ab} = 0 } \; . \tag{3.15}$$

Ez a vákuumbeli Einstein-egyenlet.

3.1. A metrika determinánsának metrika szerinti variációja

A Levi-Civita szimbólumot az alábbi kifejezés segítségével tudjuk megadni:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{abcd} = {} & \delta^a_0 \delta^b_1 \delta^c_2 \delta^d_3 - \delta^d_0 \delta^a_1 \delta^b_2 \delta^c_3 + \delta^c_0 \delta^d_1 \delta^a_2 \delta^b_3 - \delta^b_0 \delta^c_1 \delta^d_2 \delta^a_3 + \delta^a_0 \delta^d_1 \delta^b_2 \delta^c_3 - \delta^d_0 \delta^c_1 \delta^a_2 \delta^b_3 \\ & + \delta^c_0 \delta^b_1 \delta^d_2 \delta^a_3 - \delta^b_0 \delta^a_1 \delta^c_2 \delta^d_3 + \delta^a_0 \delta^c_1 \delta^d_2 \delta^b_3 - \delta^d_0 \delta^b_1 \delta^a_2 \delta^c_3 + \delta^c_0 \delta^a_1 \delta^b_2 \delta^d_3 - \delta^b_0 \delta^d_1 \delta^a_2 \delta^c_3 \\ & - \delta^a_0 \delta^b_1 \delta^d_2 \delta^c_3 + \delta^d_0 \delta^a_1 \delta^c_2 \delta^b_3 - \delta^c_0 \delta^d_1 \delta^b_2 \delta^a_3 + \delta^b_0 \delta^c_1 \delta^a_2 \delta^d_3 - \delta^a_0 \delta^d_1 \delta^c_2 \delta^b_3 + \delta^d_0 \delta^c_1 \delta^b_2 \delta^a_3 \\ & - \delta^c_0 \delta^b_1 \delta^a_2 \delta^d_3 + \delta^b_0 \delta^a_1 \delta^d_2 \delta^c_3 - \delta^a_0 \delta^c_1 \delta^b_2 \delta^d_3 + \delta^d_0 \delta^b_1 \delta^c_2 \delta^a_3 - \delta^c_0 \delta^a_1 \delta^d_2 \delta^b_3 + \delta^b_0 \delta^d_1 \delta^c_2 \delta^a_3 \; . \end{aligned}$$

A metrika determinánsát a következőképpen számolhatjuk ki:

$$g = \det\left(g_{ik}\right) = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$= g_{00} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - g_{01} \begin{vmatrix} g_{10} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + g_{02} \begin{vmatrix} g_{10} & g_{11} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} - g_{03} \begin{vmatrix} g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

$$= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} - g_{00} g_{11} g_{23} g_{32} - g_{00} g_{12} g_{21} g_{33} + g_{00} g_{12} g_{23} g_{31} + g_{00} g_{13} g_{21} g_{32} - g_{00} g_{13} g_{22} g_{31}$$

$$-g_{01}g_{10}g_{22}g_{33} + g_{01}g_{10}g_{23}g_{32} + g_{01}g_{12}g_{20}g_{33} - g_{01}g_{12}g_{23}g_{30} - g_{01}g_{13}g_{20}g_{32} + g_{01}g_{13}g_{22}g_{30}$$
$$+g_{02}g_{10}g_{21}g_{33} - g_{02}g_{10}g_{23}g_{31} - g_{02}g_{11}g_{20}g_{33} + g_{02}g_{11}g_{23}g_{30} + g_{02}g_{13}g_{20}g_{31} - g_{02}g_{13}g_{21}g_{30}$$
$$-g_{03}g_{10}g_{21}g_{32} + g_{03}g_{10}g_{22}g_{31} + g_{03}g_{11}g_{20}g_{32} - g_{03}g_{11}g_{22}g_{30} - g_{03}g_{12}g_{20}g_{31} + g_{03}g_{12}g_{21}g_{30}$$
$$= \varepsilon^{0123}\varepsilon^{0123}g_{00}g_{11}g_{22}g_{33} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{0132}g_{00}g_{11}g_{23}g_{32} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{0213}g_{00}g_{12}g_{21}g_{33}$$
$$+\varepsilon^{0123}\varepsilon^{0231}g_{00}g_{12}g_{23}g_{31} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{0312}g_{00}g_{13}g_{21}g_{32} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{0321}g_{00}g_{13}g_{22}g_{31}$$
$$+\varepsilon^{0123}\varepsilon^{1023}g_{01}g_{10}g_{22}g_{33} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{1032}g_{01}g_{10}g_{23}g_{32} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{1203}g_{01}g_{12}g_{20}g_{33}$$
$$+\varepsilon^{0123}\varepsilon^{1230}g_{01}g_{12}g_{23}g_{30} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{1302}g_{01}g_{13}g_{20}g_{32} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{1320}g_{01}g_{13}g_{22}g_{30}$$
$$+\varepsilon^{0123}\varepsilon^{2013}g_{02}g_{10}g_{21}g_{33} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{2031}g_{02}g_{10}g_{23}g_{31} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{2103}g_{02}g_{11}g_{20}g_{33}$$
$$+\varepsilon^{0123}\varepsilon^{2130}g_{02}g_{11}g_{23}g_{30} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{2301}g_{02}g_{13}g_{20}g_{31} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{2310}g_{02}g_{13}g_{21}g_{30}$$
$$+\varepsilon^{0123}\varepsilon^{3012}g_{03}g_{10}g_{21}g_{32} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{3021}g_{03}g_{10}g_{22}g_{31} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{3102}g_{03}g_{11}g_{20}g_{32}$$
$$+\varepsilon^{0123}\varepsilon^{3120}g_{03}g_{11}g_{22}g_{30} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{3201}g_{03}g_{12}g_{20}g_{31} + \varepsilon^{0123}\varepsilon^{3210}g_{03}g_{12}g_{21}g_{30}$$
$$= \varepsilon^{0123}\varepsilon^{a_2b_2c_2d_2}g_{0a_2}g_{1b_2}g_{2c_2}g_{3d_2} \ .$$

Mivel $\varepsilon^{a_1b_1c_1d_1}\varepsilon^{a_2b_2c_2d_2}g_{a_1a_2}g_{b_1b_2}g_{c_1c_2}g_{d_1d_2}$ az előzőleg kiszámolt determinánsban szereplő tényezőket tartalmazza (minden tag 4!-szor szerepel benne, csak más sorrendben), ezért

$$g = \frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1b_1c_1d_1}\varepsilon^{a_2b_2c_2d_2}g_{a_1a_2}g_{b_1b_2}g_{c_1c_2}g_{d_1d_2} \ . \tag{3.16}$$

$\sqrt{-g}$ metrikus tenzor szerinti variációja:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\ \delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\ \frac{\partial g}{\partial g_{ab}}\delta g_{ab} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}M^{ab}\delta g_{ab} \ ,$$

amiből M^{ab}-t ki tudjuk fejezni a metrika determinánsának segítségével:

$$M^{ab} = \frac{\partial g}{\partial g_{ab}} = \frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1b_1c_1d_1}\varepsilon^{a_2b_2c_2d_2}$$
$$\times\left[\frac{\partial g_{a_1a_2}}{\partial g_{ab}}g_{b_1b_2}g_{c_1c_2}g_{d_1d_2} + g_{a_1a_2}\frac{\partial g_{b_1b_2}}{\partial g_{ab}}g_{c_1c_2}g_{d_1d_2} + g_{a_1a_2}g_{b_1b_2}\frac{\partial g_{c_1c_2}}{\partial g_{ab}}g_{d_1d_2} + g_{a_1a_2}g_{b_1b_2}g_{c_1c_2}\frac{\partial g_{d_1d_2}}{\partial g_{ab}}\right]$$
$$= \frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1b_1c_1d_1}\varepsilon^{a_2b_2c_2d_2}$$
$$\times\left[\delta^a_{a_1}\delta^b_{a_2}g_{b_1b_2}g_{c_1c_2}g_{d_1d_2} + g_{a_1a_2}\delta^a_{b_1}\delta^b_{b_2}g_{c_1c_2}g_{d_1d_2} + g_{a_1a_2}g_{b_1b_2}\delta^a_{c_1}\delta^b_{c_2}g_{d_1d_2} + g_{a_1a_2}g_{b_1b_2}g_{c_1c_2}\delta^a_{d_1}\delta^b_{d_2}\right]$$
$$= \frac{1}{4!}\varepsilon^{a_1b_1c_1d_1}\varepsilon^{a_2b_2c_2d_2}4\delta^a_{a_1}\delta^b_{a_2}g_{b_1b_2}g_{c_1c_2}g_{d_1d_2} = \frac{1}{3!}\varepsilon^{ab_1c_1d_1}\varepsilon^{bb_2c_2d_2}g_{b_1b_2}g_{c_1c_2}g_{d_1d_2}$$
$$= \frac{1}{3!}\left[\delta^a_0\delta^{b_1}_1\delta^{c_1}_2\delta^{d_1}_3 - \delta^{d_1}_0\delta^a_1\delta^{b_1}_2\delta^{c_1}_3 + \delta^{c_1}_0\delta^{d_1}_1\delta^a_2\delta^{b_1}_3 - \delta^{b_1}_0\delta^{c_1}_1\delta^{d_1}_2\delta^a_3 + \delta^a_0\delta^{d_1}_1\delta^{b_1}_2\delta^{c_1}_3 - \delta^{d_1}_0\delta^{c_1}_1\delta^a_2\delta^{b_1}_3\right.$$
$$+\delta^{c_1}_0\delta^{b_1}_1\delta^{d_1}_2\delta^a_3 - \delta^{b_1}_0\delta^a_1\delta^{c_1}_2\delta^{d_1}_3 + \delta^a_0\delta^{c_1}_1\delta^{d_1}_2\delta^{b_1}_3 - \delta^{d_1}_0\delta^{b_1}_1\delta^a_2\delta^{c_1}_3 + \delta^{c_1}_0\delta^a_1\delta^{b_1}_2\delta^{d_1}_3 - \delta^{b_1}_0\delta^{d_1}_1\delta^a_2\delta^{c_1}_3$$
$$-\delta^a_0\delta^{b_1}_1\delta^{d_1}_2\delta^{c_1}_3 + \delta^{d_1}_0\delta^a_1\delta^{c_1}_2\delta^{b_1}_3 - \delta^{c_1}_0\delta^{d_1}_1\delta^{b_1}_2\delta^a_3 + \delta^{b_1}_0\delta^{c_1}_1\delta^a_2\delta^{d_1}_3 - \delta^a_0\delta^{d_1}_1\delta^{c_1}_2\delta^{b_1}_3 + \delta^{d_1}_0\delta^{c_1}_1\delta^{b_1}_2\delta^a_3$$
$$\left.-\delta^{c_1}_0\delta^{b_1}_1\delta^a_2\delta^{d_1}_3 + \delta^{b_1}_0\delta^a_1\delta^{d_1}_2\delta^{c_1}_3 - \delta^a_0\delta^{c_1}_1\delta^{b_1}_2\delta^{d_1}_3 + \delta^{d_1}_0\delta^{b_1}_1\delta^{c_1}_2\delta^a_3 - \delta^{c_1}_0\delta^a_1\delta^{d_1}_2\delta^{b_1}_3 + \delta^{b_1}_0\delta^{d_1}_1\delta^{c_1}_2\delta^a_3\right]$$

$$
\begin{aligned}
\times \big[&\delta_0^b\delta_1^{b_2}\delta_2^{c_2}\delta_3^{d_2} - \delta_0^{d_2}\delta_1^b\delta_2^{b_2}\delta_3^{c_2} + \delta_0^{c_2}\delta_1^{d_2}\delta_2^b\delta_3^{b_2} - \delta_0^{b_2}\delta_1^{c_2}\delta_2^{d_2}\delta_3^b + \delta_0^b\delta_1^{d_2}\delta_2^{b_2}\delta_3^{c_2} - \delta_0^{d_2}\delta_1^{c_2}\delta_2^b\delta_3^{b_2} \\
&+\delta_0^{c_2}\delta_1^{b_2}\delta_2^{d_2}\delta_3^b - \delta_0^{b_2}\delta_1^b\delta_2^{c_2}\delta_3^{d_2} + \delta_0^b\delta_1^{c_2}\delta_2^{d_2}\delta_3^{b_2} - \delta_0^{d_2}\delta_1^{b_2}\delta_2^b\delta_3^{c_2} + \delta_0^{c_2}\delta_1^b\delta_2^{b_2}\delta_3^{d_2} - \delta_0^{b_2}\delta_1^{d_2}\delta_2^b\delta_3^{c_2} \\
&-\delta_0^b\delta_1^{b_2}\delta_2^{d_2}\delta_3^{c_2} + \delta_0^{d_2}\delta_1^b\delta_2^{c_2}\delta_3^{b_2} - \delta_0^{c_2}\delta_1^{d_2}\delta_2^{b_2}\delta_3^b + \delta_0^{b_2}\delta_1^{c_2}\delta_2^b\delta_3^{d_2} - \delta_0^b\delta_1^{d_2}\delta_2^{c_2}\delta_3^{b_2} + \delta_0^{d_2}\delta_1^{c_2}\delta_2^{b_2}\delta_3^b \\
&-\delta_0^{c_2}\delta_1^{b_2}\delta_2^b\delta_3^{d_2} + \delta_0^{b_2}\delta_1^b\delta_2^{d_2}\delta_3^{c_2} - \delta_0^b\delta_1^{c_2}\delta_2^{b_2}\delta_3^{d_2} + \delta_0^{d_2}\delta_1^{b_2}\delta_2^{c_2}\delta_3^b - \delta_0^{c_2}\delta_1^b\delta_2^{d_2}\delta_3^{b_2} + \delta_0^{b_2}\delta_1^{d_2}\delta_2^{c_2}\delta_3^b\big]
\end{aligned}
$$

$$\times g_{b_1b_2}g_{c_1c_2}g_{d_1d_2}$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{1}{3!}\big[&\delta_0^a\delta_0^b\ 6\left(g_{11}g_{22}g_{33} + g_{12}g_{23}g_{31} + g_{13}g_{21}g_{32} - g_{11}g_{23}g_{32} - g_{13}g_{22}g_{31} - g_{12}g_{21}g_{33}\right) \\
&-\delta_0^a\delta_1^b\ 6\left(g_{12}g_{23}g_{30} + g_{10}g_{22}g_{33} - g_{12}g_{20}g_{33} - g_{13}g_{22}g_{30} - g_{10}g_{23}g_{32} + g_{13}g_{20}g_{32}\right) \\
&+\delta_0^a\delta_2^b\ 6\left(g_{13}g_{20}g_{31} - g_{13}g_{21}g_{30} + g_{11}g_{23}g_{30} - g_{10}g_{23}g_{31} + g_{10}g_{21}g_{33} - g_{11}g_{20}g_{33}\right) \\
&-\delta_0^a\delta_3^b\ 6\left(g_{10}g_{21}g_{32} - g_{11}g_{20}g_{32} + g_{12}g_{20}g_{31} - g_{12}g_{21}g_{30} + g_{11}g_{22}g_{30} - g_{10}g_{22}g_{31}\right) \\
&-\delta_1^a\delta_0^b\ 6\left(g_{01}g_{22}g_{33} + g_{02}g_{23}g_{31} + g_{03}g_{21}g_{32} - g_{01}g_{23}g_{32} - g_{03}g_{22}g_{31} - g_{02}g_{21}g_{33}\right) \\
&+\delta_1^a\delta_1^b\ 6\left(g_{02}g_{23}g_{30} + g_{00}g_{22}g_{33} - g_{02}g_{20}g_{33} - g_{03}g_{22}g_{30} - g_{00}g_{23}g_{32} + g_{03}g_{20}g_{32}\right) \\
&-\delta_1^a\delta_2^b\ 6\left(g_{03}g_{20}g_{31} - g_{03}g_{21}g_{30} + g_{01}g_{23}g_{30} - g_{00}g_{23}g_{31} + g_{00}g_{21}g_{33} - g_{01}g_{20}g_{33}\right) \\
&+\delta_1^a\delta_3^b\ 6\left(g_{00}g_{21}g_{32} - g_{01}g_{20}g_{32} + g_{02}g_{20}g_{31} - g_{02}g_{21}g_{30} + g_{01}g_{22}g_{30} - g_{00}g_{22}g_{31}\right) \\
&+\delta_2^a\delta_0^b\ 6\left(g_{01}g_{12}g_{33} + g_{02}g_{13}g_{31} + g_{03}g_{11}g_{32} - g_{01}g_{13}g_{32} - g_{03}g_{12}g_{31} - g_{02}g_{11}g_{33}\right) \\
&-\delta_2^a\delta_1^b\ 6\left(g_{02}g_{13}g_{30} + g_{00}g_{12}g_{33} - g_{02}g_{10}g_{33} - g_{03}g_{12}g_{30} - g_{00}g_{13}g_{32} + g_{03}g_{10}g_{32}\right) \\
&+\delta_2^a\delta_2^b\ 6\left(g_{03}g_{10}g_{31} - g_{03}g_{11}g_{30} + g_{01}g_{13}g_{30} - g_{00}g_{13}g_{31} + g_{00}g_{11}g_{33} - g_{01}g_{10}g_{33}\right) \\
&-\delta_2^a\delta_3^b\ 6\left(g_{00}g_{11}g_{32} - g_{01}g_{10}g_{32} + g_{02}g_{10}g_{31} - g_{02}g_{11}g_{30} + g_{01}g_{12}g_{30} - g_{00}g_{12}g_{31}\right) \\
&-\delta_3^a\delta_0^b\ 6\left(g_{01}g_{12}g_{23} + g_{02}g_{13}g_{21} + g_{03}g_{11}g_{22} - g_{01}g_{13}g_{22} - g_{03}g_{12}g_{21} - g_{02}g_{11}g_{23}\right) \\
&+\delta_3^a\delta_1^b\ 6\left(g_{02}g_{13}g_{20} + g_{00}g_{12}g_{23} - g_{02}g_{10}g_{23} - g_{03}g_{12}g_{20} - g_{00}g_{13}g_{22} + g_{03}g_{10}g_{22}\right) \\
&-\delta_3^a\delta_2^b\ 6\left(g_{03}g_{10}g_{21} - g_{03}g_{11}g_{20} + g_{01}g_{13}g_{20} - g_{00}g_{13}g_{21} + g_{00}g_{11}g_{23} - g_{01}g_{10}g_{23}\right) \\
&+\delta_3^a\delta_3^b\ 6\left(g_{00}g_{11}g_{22} - g_{01}g_{10}g_{22} + g_{02}g_{10}g_{21} - g_{02}g_{11}g_{20} + g_{01}g_{12}g_{20} - g_{00}g_{12}g_{21}\right)\big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta_0^a\delta_0^b\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - \delta_0^a\delta_1^b\begin{vmatrix} g_{10} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \delta_0^a\delta_2^b\begin{vmatrix} g_{10} & g_{11} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} - \delta_0^a\delta_3^b\begin{vmatrix} g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} \end{vmatrix} \\
&-\delta_1^a\delta_0^b\begin{vmatrix} g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \delta_1^a\delta_1^b\begin{vmatrix} g_{00} & g_{02} & g_{03} \\ g_{20} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - \delta_1^a\delta_2^b\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{03} \\ g_{20} & g_{21} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} - \delta_1^a\delta_3^b\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} \end{vmatrix} \\
&+\delta_2^a\delta_0^b\begin{vmatrix} g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - \delta_2^a\delta_1^b\begin{vmatrix} g_{00} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{12} & g_{13} \\ g_{30} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \delta_2^a\delta_2^b\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{13} \\ g_{30} & g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} - \delta_2^a\delta_3^b\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$-\delta_3^a\delta_0^b\begin{vmatrix} g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} + \delta_3^a\delta_1^b\begin{vmatrix} g_{00} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} - \delta_3^a\delta_2^b\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{23} \end{vmatrix} + \delta_3^a\delta_3^b\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_0^a\delta_0^b & \delta_0^a\delta_1^b & \delta_0^a\delta_2^b & \delta_0^a\delta_3^b \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_1^a\delta_0^b & \delta_1^a\delta_1^b & \delta_1^a\delta_2^b & \delta_1^a\delta_3^b \\ g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \delta_2^a\delta_0^b & \delta_2^a\delta_1^b & \delta_2^a\delta_2^b & \delta_2^a\delta_3^b \\ g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_3^a\delta_0^b & \delta_3^a\delta_1^b & \delta_3^a\delta_2^b & \delta_3^a\delta_3^b \\ g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_0^a\delta_0^b & \delta_0^a\delta_1^b & \delta_0^a\delta_2^b & \delta_0^a\delta_3^b \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ \delta_1^a\delta_0^b & \delta_1^a\delta_1^b & \delta_1^a\delta_2^b & \delta_1^a\delta_3^b \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \delta_2^a\delta_0^b & \delta_2^a\delta_1^b & \delta_2^a\delta_2^b & \delta_2^a\delta_3^b \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \delta_3^a\delta_0^b & \delta_3^a\delta_1^b & \delta_3^a\delta_2^b & \delta_3^a\delta_3^b \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}g^{ab}\begin{vmatrix} g_{ab}\delta_0^a\delta_0^b & g_{ab}\delta_0^a\delta_1^b & g_{ab}\delta_0^a\delta_2^b & g_{ab}\delta_0^a\delta_3^b \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \frac{1}{4}g^{ab}\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{ab}\delta_1^a\delta_0^b & g_{ab}\delta_1^a\delta_1^b & g_{ab}\delta_1^a\delta_2^b & g_{ab}\delta_1^a\delta_3^b \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{4}g^{ab}\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{ab}\delta_2^a\delta_0^b & g_{ab}\delta_2^a\delta_1^b & g_{ab}\delta_2^a\delta_2^b & g_{ab}\delta_2^a\delta_3^b \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \frac{1}{4}g^{ab}\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{ab}\delta_3^a\delta_0^b & g_{ab}\delta_3^a\delta_1^b & g_{ab}\delta_3^a\delta_2^b & g_{ab}\delta_3^a\delta_3^b \end{vmatrix}$$

$$= g^{ab}\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g^{ab}g \ .$$

Ezek alapján

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}M^{ab}\delta g_{ab} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}g^{ab}\ (-g)\ \delta g_{ab} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\ g^{ab}\ \delta g_{ab}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-g}\ g^{ab}\ \left(-g_{ac}\ g_{bd}\ \delta g^{cd}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ g_{ab}\ \delta g^{ab} \ .$$

4. fejezet

Tachion skalármező

Az 1-dimenziós relativisztikus mozgást végző részecske Lagrange függvénye a következő:

$$L_{rel} = -\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, mc^2 \overset{c=1, v=\dot{q}}{=} -m\sqrt{1 - \dot{q}^2}\ . \tag{4.1}$$

Ha a q koordináta helyett bevezetünk egy a téridő pontjaitól függő mezőt $T(x^a)$-t, a $\dot{q}^2$ helyett $-\partial^a T\ \partial_a T$-t és m helyett pedig egy a mezőtől függő $V(T)$ potenciált, az alábbi Lagrange sűrűséghez jutunk [2], [3]:

$$\mathscr{L}_T = -\sqrt{-g}\ \sqrt{1 + g^{ab}\left(\nabla_a T\right)\left(\nabla_b T\right)}\ V(T)\ . \tag{4.2}$$

Ez a Lagrange sűrűség a tachion mező Lagrange sűrűsége.

A hatásfüggvény:

$$S_T[T] = \int \mathrm{d}^4x\ \mathscr{L}_T = \int -\sqrt{-g}\ \sqrt{1 + g^{ab}\left(\nabla_a T\right)\left(\nabla_b T\right)}\ V(T)\ \mathrm{d}^4x\ , \tag{4.3}$$

amit $T^\lambda = T + \lambda\delta T + \mathcal{O}(\lambda^2)$ szerint variálunk. A hatáselvből következően az alábbiakat írhatjuk:

$$\left.\frac{\mathrm{d}S_T}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int -\sqrt{-g}\ \delta T\ V_{,T}\ \sqrt{1 + g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}\ \mathrm{d}^4x$$

$$-\int \sqrt{-g}\ V \frac{g^{ab}\partial_b T}{2\sqrt{1 + g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\ \underbrace{\delta\partial_a T}_{=\partial_a \delta T}\ \mathrm{d}^4x - \int \sqrt{-g}\ V \frac{g^{ab}\partial_a T}{2\sqrt{1 + g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\ \underbrace{\delta\partial_b T}_{=\partial_b \delta T}\ \mathrm{d}^4x$$

az alsó indexben lévő $,T$ jelölés T-re való parciális deriválást jelent; a második és harmadik tag ugyanaz, ezért összevonható

$$= \int -\sqrt{-g}\ \delta T\ V_{,T}\ \sqrt{1 + g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}\ \mathrm{d}^4x - \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{g^{ab}\partial_a T}{\sqrt{1 + g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\sqrt{-g}\ V\right]\ \partial_b\ \delta T$$

majd az így kapott kifejezés második tagjában parciális integrálást végzünk

$$= \int -\sqrt{-g}\ \delta T\ V_{,T}\ \sqrt{1 + g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}\ \mathrm{d}^4x - \int \mathrm{d}^4x\ \partial_b \left\{\delta T \frac{g^{ab}\partial_a T}{\sqrt{1 + g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\sqrt{-g}\ V\right\}$$

$$+\int \mathrm{d}^4x\ \delta T\ \partial_b \left[\frac{g^{ab}\partial_a T}{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\sqrt{-g}\ V\right] \ .$$

A második tagot kifejezhetjük egy vektormező teljes divergenciájával:

$$\nabla_a X^a = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a\left(\sqrt{-g}X^a\right) \ , \tag{4.4}$$

ahol X^a tetszőleges, sima vektormező. A második tag így:

$$\int \mathrm{d}^4x\ \partial_b \left\{\delta T \frac{g^{ab}\partial_a T}{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\sqrt{-g}\ V\right\} = \int \mathrm{d}^4x\ \sqrt{-g}\ \nabla_b \left\{\delta T \frac{g^{ab}\partial_a T}{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\ V\right\}$$

amit pedig a Stokes-tétel segítségével határfelületi integrállá alakíthatunk

$$= \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}^3y\sqrt{|h|}\ n^b\ \delta T \frac{g^{ab}\partial_a T}{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\ V \ .$$

Ez a határ tag zérust ad, mert a határfelületen $\delta T = 0$. Végül kapjuk, hogy

$$\left.\frac{\mathrm{d}S_T}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int -\sqrt{-g}\ \delta T\ V_{,T}\ \sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}\ \mathrm{d}^4x$$

$$+\int \mathrm{d}^4x\ \delta T\ \partial_b \left[\frac{g^{ab}\partial_a T}{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\sqrt{-g}\ V\right]$$

$$= \int \delta T \left\{-\sqrt{-g}\ V_{,T}\ \sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T} + \partial_b \left[\frac{g^{ab}\partial_a T}{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\sqrt{-g}\ V\right]\right\} \mathrm{d}^4x = 0 \ .$$

δT tetszőlegessége miatt az alábbi mezőegyenlethez jutunk:

$$\sqrt{-g}\ V_{,T}\ \sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T} - \partial_b \left[\frac{g^{ab}\partial_a T}{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\sqrt{-g}\ V\right] = 0 \ , \tag{4.5}$$

továbbá $g^{ab}\partial_a T = \partial^b T = \nabla^b T$, ezért

$$\sqrt{-g}\ V_{,T}\ \sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T} - \partial_a \left[\frac{\sqrt{-g}\ V\ \nabla^a T}{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\right] = 0 \ . \tag{4.6}$$

Kihasználva a (4.4) formulát, ezt az összefüggést az alábbi alakba írhatjuk át:

$$\boxed{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}\ V_{,T} - \nabla_a \left[\frac{V\ \nabla^a T}{\sqrt{1+g^{ab}\ \partial_a T\ \partial_b T}}\right] = 0} \ . \tag{4.7}$$

5. fejezet

Függelék

5.1. A Bianchi azonosságok

A Riemann görbületi tenzor alakja az alábbi:

$$R_{abc}{}^{d} = \partial_b \Gamma^{d}{}_{ac} - \partial_a \Gamma^{d}{}_{bc} + \Gamma^{e}{}_{ac}\Gamma^{d}{}_{eb} - \Gamma^{e}{}_{bc}\Gamma^{d}{}_{ea} \ . \tag{5.1}$$

Antiszimmetria tulajdonsággal rendelkezik az első két indexre:

$$R_{abc}{}^{d} = -\partial_a \Gamma^{d}{}_{bc} + \partial_b \Gamma^{d}{}_{ac} - \Gamma^{e}{}_{bc}\Gamma^{d}{}_{ea} + \Gamma^{e}{}_{ac}\Gamma^{d}{}_{eb} =$$

$$= -\left(\partial_a \Gamma^{d}{}_{bc} - \partial_b \Gamma^{d}{}_{ac} + \Gamma^{e}{}_{bc}\Gamma^{d}{}_{ea} - \Gamma^{e}{}_{ac}\Gamma^{d}{}_{eb}\right) = -R_{bac}{}^{d} \ .$$

Az első három indexre is antiszimmetrikus tulajdonság vezethető le:

$$R_{abc}{}^{d} + R_{bca}{}^{d} + R_{cab}{}^{d} = \left(\partial_b \Gamma^{d}{}_{ac} - \partial_a \Gamma^{d}{}_{bc} + \Gamma^{e}{}_{ac}\Gamma^{d}{}_{eb} - \Gamma^{e}{}_{bc}\Gamma^{d}{}_{ea}\right) +$$

$$+\left(\partial_c \Gamma^{d}{}_{ba} - \partial_b \Gamma^{d}{}_{ca} + \Gamma^{e}{}_{ba}\Gamma^{d}{}_{ec} - \Gamma^{e}{}_{ca}\Gamma^{d}{}_{eb}\right) + \left(\partial_a \Gamma^{d}{}_{cb} - \partial_c \Gamma^{d}{}_{ab} + \Gamma^{e}{}_{cb}\Gamma^{d}{}_{ea} - \Gamma^{e}{}_{ab}\Gamma^{d}{}_{ec}\right) =$$

$$= \partial_a \left(\Gamma^{d}{}_{cb} - \Gamma^{d}{}_{bc}\right) + \partial_b \left(\Gamma^{d}{}_{ac} - \Gamma^{d}{}_{ca}\right) + \partial_c \left(\Gamma^{d}{}_{ba} - \Gamma^{d}{}_{ab}\right) +$$

$$+\Gamma^{d}{}_{ea}\left(\Gamma^{e}{}_{cb} - \Gamma^{e}{}_{bc}\right) + \Gamma^{d}{}_{eb}\left(\Gamma^{e}{}_{ac} - \Gamma^{e}{}_{ca}\right) + \Gamma^{d}{}_{ec}\left(\Gamma^{e}{}_{ba} - \Gamma^{e}{}_{ab}\right) = 0 \ ,$$

valamint:

$$R_{abc}{}^{d} + R_{bca}{}^{d} + R_{cab}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d} - R_{cba}{}^{d} - R_{acb}{}^{d} = 0 \ ,$$

ami alapján:

$$3!\left(R_{abc}{}^{d} + R_{bca}{}^{d} + R_{cab}{}^{d} - R_{bac}{}^{d} - R_{cba}{}^{d} - R_{acb}{}^{d}\right) =$$

$$\boxed{R_{[abc]}{}^{d} = 0} \ , \tag{5.2}$$

ezt az összefüggést első Bianchi azonosságnak hívjuk.

A második Bianchi azonosság:

$$\boxed{\nabla_a R_{bcd}{}^{e} + \nabla_b R_{cad}{}^{e} + \nabla_c R_{abd}{}^{e} = 0} \ . \tag{5.3}$$

Bizonyítása:

$$\nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e + \nabla_c R_{abd}{}^e$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_a R_{bcd}{}^e + \Gamma^e{}_{af} R_{bcd}{}^f - \Gamma^f{}_{ab} R_{fcd}{}^e - \Gamma^f{}_{ac} R_{bfd}{}^e - \Gamma^f{}_{ad} R_{bcf}{}^e \\
&+\partial_b R_{cad}{}^e + \Gamma^e{}_{bf} R_{cad}{}^f - \Gamma^f{}_{bc} R_{fad}{}^e - \Gamma^f{}_{ba} R_{cfd}{}^e - \Gamma^f{}_{bd} R_{caf}{}^e \\
&+\partial_c R_{abd}{}^e + \Gamma^e{}_{cf} R_{abd}{}^f - \Gamma^f{}_{ca} R_{fbd}{}^e - \Gamma^f{}_{cb} R_{afd}{}^e - \Gamma^f{}_{cd} R_{abf}{}^e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_a R_{bcd}{}^e + \Gamma^e{}_{af} R_{bcd}{}^f - \Gamma^f{}_{ad} R_{bcf}{}^e \\
&+\partial_b R_{cad}{}^e + \Gamma^e{}_{bf} R_{cad}{}^f - \Gamma^f{}_{bd} R_{caf}{}^e \\
&+\partial_c R_{abd}{}^e + \Gamma^e{}_{cf} R_{abd}{}^f - \Gamma^f{}_{cd} R_{abf}{}^e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_a \left(\partial_c \Gamma^e{}_{bd} - \partial_b \Gamma^e{}_{cd} + \Gamma^h{}_{bd}\Gamma^e{}_{hc} - \Gamma^h{}_{cd}\Gamma^e{}_{hb}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{af} \left(\partial_c \Gamma^f{}_{bd} - \partial_b \Gamma^f{}_{cd} + \Gamma^h{}_{bd}\Gamma^f{}_{hc} - \Gamma^h{}_{cd}\Gamma^f{}_{hb}\right) \\
&-\Gamma^f{}_{ad} \left(\partial_c \Gamma^e{}_{bf} - \partial_b \Gamma^e{}_{cf} + \Gamma^h{}_{bf}\Gamma^e{}_{hc} - \Gamma^h{}_{cf}\Gamma^e{}_{hb}\right) \\
&+\partial_b \left(\partial_a \Gamma^e{}_{cd} - \partial_c \Gamma^e{}_{ad} + \Gamma^h{}_{cd}\Gamma^e{}_{ha} - \Gamma^h{}_{ad}\Gamma^e{}_{hc}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{bf} \left(\partial_a \Gamma^f{}_{cd} - \partial_c \Gamma^f{}_{ad} + \Gamma^h{}_{cd}\Gamma^f{}_{ha} - \Gamma^h{}_{ad}\Gamma^f{}_{hc}\right) \\
&-\Gamma^f{}_{bd} \left(\partial_a \Gamma^e{}_{cf} - \partial_c \Gamma^e{}_{af} + \Gamma^h{}_{cf}\Gamma^e{}_{ha} - \Gamma^h{}_{af}\Gamma^e{}_{hc}\right) \\
&+\partial_c \left(\partial_b \Gamma^e{}_{ad} - \partial_a \Gamma^e{}_{bd} + \Gamma^h{}_{ad}\Gamma^e{}_{hb} - \Gamma^h{}_{bd}\Gamma^e{}_{ha}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{cf} \left(\partial_b \Gamma^f{}_{ad} - \partial_a \Gamma^f{}_{bd} + \Gamma^h{}_{ad}\Gamma^f{}_{hb} - \Gamma^h{}_{bd}\Gamma^f{}_{ha}\right) \\
&-\Gamma^f{}_{cd} \left(\partial_b \Gamma^e{}_{af} - \partial_a \Gamma^e{}_{bf} + \Gamma^h{}_{af}\Gamma^e{}_{hb} - \Gamma^h{}_{bf}\Gamma^e{}_{ha}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_a\partial_c \Gamma^e{}_{bd} - \partial_a\partial_b \Gamma^e{}_{cd} + \partial_a \left(\Gamma^h{}_{bd}\Gamma^e{}_{hc}\right) - \partial_a \left(\Gamma^h{}_{cd}\Gamma^e{}_{hb}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{af} \left(\partial_c \Gamma^f{}_{bd}\right) - \Gamma^e{}_{af} \left(\partial_b \Gamma^f{}_{cd}\right) + \Gamma^e{}_{af}\Gamma^h{}_{bd}\Gamma^f{}_{hc} - \Gamma^e{}_{af}\Gamma^h{}_{cd}\Gamma^f{}_{hb} \\
&-\Gamma^f{}_{ad} \left(\partial_c \Gamma^e{}_{bf}\right) + \Gamma^f{}_{ad} \left(\partial_b \Gamma^e{}_{cf}\right) - \Gamma^f{}_{ad}\Gamma^h{}_{bf}\Gamma^e{}_{hc} + \Gamma^f{}_{ad}\Gamma^h{}_{cf}\Gamma^e{}_{hb} \\
&+\partial_b\partial_a \Gamma^e{}_{cd} - \partial_b\partial_c \Gamma^e{}_{ad} + \partial_b \left(\Gamma^h{}_{cd}\Gamma^e{}_{ha}\right) - \partial_b \left(\Gamma^h{}_{ad}\Gamma^e{}_{hc}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{bf} \left(\partial_a \Gamma^f{}_{cd}\right) - \Gamma^e{}_{bf} \left(\partial_c \Gamma^f{}_{ad}\right) + \Gamma^e{}_{bf}\Gamma^h{}_{cd}\Gamma^f{}_{ha} - \Gamma^e{}_{bf}\Gamma^h{}_{ad}\Gamma^f{}_{hc} \\
&-\Gamma^f{}_{bd} \left(\partial_a \Gamma^e{}_{cf}\right) + \Gamma^f{}_{bd} \left(\partial_c \Gamma^e{}_{af}\right) - \Gamma^f{}_{bd}\Gamma^h{}_{cf}\Gamma^e{}_{ha} + \Gamma^f{}_{bd}\Gamma^h{}_{af}\Gamma^e{}_{hc} \\
&+\partial_c\partial_b \Gamma^e{}_{ad} - \partial_c\partial_a \Gamma^e{}_{bd} + \partial_c \left(\Gamma^h{}_{ad}\Gamma^e{}_{hb}\right) - \partial_c \left(\Gamma^h{}_{bd}\Gamma^e{}_{ha}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{cf} \left(\partial_b \Gamma^f{}_{ad}\right) - \Gamma^e{}_{cf} \left(\partial_a \Gamma^f{}_{bd}\right) + \Gamma^e{}_{cf}\Gamma^h{}_{ad}\Gamma^f{}_{hb} - \Gamma^e{}_{cf}\Gamma^h{}_{bd}\Gamma^f{}_{ha} \\
&-\Gamma^f{}_{cd} \left(\partial_b \Gamma^e{}_{af}\right) + \Gamma^f{}_{cd} \left(\partial_a \Gamma^e{}_{bf}\right) - \Gamma^f{}_{cd}\Gamma^h{}_{af}\Gamma^e{}_{hb} + \Gamma^f{}_{cd}\Gamma^h{}_{bf}\Gamma^e{}_{ha}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_a \left(\Gamma^h{}_{bd}\Gamma^e{}_{hc}\right) - \partial_a \left(\Gamma^h{}_{cd}\Gamma^e{}_{hb}\right) + \partial_b \left(\Gamma^h{}_{cd}\Gamma^e{}_{ha}\right) - \partial_b \left(\Gamma^h{}_{ad}\Gamma^e{}_{hc}\right) \\
&\qquad + \partial_c \left(\Gamma^h{}_{ad}\Gamma^e{}_{hb}\right) - \partial_c \left(\Gamma^h{}_{bd}\Gamma^e{}_{ha}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{af}\left(\partial_c\Gamma^f{}_{bd}\right) - \Gamma^e{}_{af}\left(\partial_b\Gamma^f{}_{cd}\right) - \Gamma^f{}_{ad}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{bf}\right) + \Gamma^f{}_{ad}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{cf}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{bf}\left(\partial_a\Gamma^f{}_{cd}\right) - \Gamma^e{}_{bf}\left(\partial_c\Gamma^f{}_{ad}\right) - \Gamma^f{}_{bd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{cf}\right) + \Gamma^f{}_{bd}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{af}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{cf}\left(\partial_b\Gamma^f{}_{ad}\right) - \Gamma^e{}_{cf}\left(\partial_a\Gamma^f{}_{bd}\right) - \Gamma^f{}_{cd}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{af}\right) + \Gamma^f{}_{cd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{bf}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{+\Gamma^e{}_{af}\Gamma^h{}_{bd}\Gamma^f{}_{hc} - \Gamma^f{}_{bd}\Gamma^h{}_{cf}\Gamma^e{}_{ha}}_{=0}\ \underbrace{-\Gamma^e{}_{af}\Gamma^h{}_{cd}\Gamma^f{}_{hb} + \Gamma^f{}_{cd}\Gamma^h{}_{bf}\Gamma^e{}_{ha}}_{=0} \\
&\underbrace{-\Gamma^f{}_{ad}\Gamma^h{}_{bf}\Gamma^e{}_{hc} + \Gamma^e{}_{cf}\Gamma^h{}_{ad}\Gamma^f{}_{hb}}_{=0}\ \underbrace{+\Gamma^f{}_{ad}\Gamma^h{}_{cf}\Gamma^e{}_{hb} - \Gamma^e{}_{bf}\Gamma^h{}_{ad}\Gamma^f{}_{hc}}_{=0} \\
&\underbrace{+\Gamma^e{}_{bf}\Gamma^h{}_{cd}\Gamma^f{}_{ha} - \Gamma^f{}_{cd}\Gamma^h{}_{af}\Gamma^e{}_{hb}}_{=0}\ \underbrace{+\Gamma^f{}_{bd}\Gamma^h{}_{af}\Gamma^e{}_{hc} - \Gamma^e{}_{cf}\Gamma^h{}_{bd}\Gamma^f{}_{ha}}_{=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma^e{}_{hc}\left(\partial_a\Gamma^h{}_{bd}\right) + \Gamma^h{}_{bd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{hc}\right) - \Gamma^e{}_{hb}\left(\partial_a\Gamma^h{}_{cd}\right) - \Gamma^h{}_{cd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{hb}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{ha}\left(\partial_b\Gamma^h{}_{cd}\right) + \Gamma^h{}_{cd}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{ha}\right) - \Gamma^e{}_{hc}\left(\partial_b\Gamma^h{}_{ad}\right) - \Gamma^h{}_{ad}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{hc}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{hb}\left(\partial_c\Gamma^h{}_{ad}\right) + \Gamma^h{}_{ad}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{hb}\right) - \Gamma^e{}_{ha}\left(\partial_c\Gamma^h{}_{bd}\right) - \Gamma^h{}_{bd}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{ha}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{af}\left(\partial_c\Gamma^f{}_{bd}\right) - \Gamma^e{}_{af}\left(\partial_b\Gamma^f{}_{cd}\right) - \Gamma^f{}_{ad}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{bf}\right) + \Gamma^f{}_{ad}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{cf}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{bf}\left(\partial_a\Gamma^f{}_{cd}\right) - \Gamma^e{}_{bf}\left(\partial_c\Gamma^f{}_{ad}\right) - \Gamma^f{}_{bd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{cf}\right) + \Gamma^f{}_{bd}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{af}\right) \\
&+\Gamma^e{}_{cf}\left(\partial_b\Gamma^f{}_{ad}\right) - \Gamma^e{}_{cf}\left(\partial_a\Gamma^f{}_{bd}\right) - \Gamma^f{}_{cd}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{af}\right) + \Gamma^f{}_{cd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{bf}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{\Gamma^e{}_{hc}\left(\partial_a\Gamma^h{}_{bd}\right) - \Gamma^e{}_{cf}\left(\partial_a\Gamma^f{}_{bd}\right)}_{=0}\ \underbrace{+\Gamma^h{}_{bd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{hc}\right) - \Gamma^f{}_{bd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{cf}\right)}_{=0} \\
&\underbrace{-\Gamma^e{}_{hb}\left(\partial_a\Gamma^h{}_{cd}\right) + \Gamma^e{}_{bf}\left(\partial_a\Gamma^f{}_{cd}\right)}_{=0}\ \underbrace{-\Gamma^h{}_{cd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{hb}\right) + \Gamma^f{}_{cd}\left(\partial_a\Gamma^e{}_{bf}\right)}_{=0} \\
&\underbrace{+\Gamma^e{}_{ha}\left(\partial_b\Gamma^h{}_{cd}\right) - \Gamma^e{}_{af}\left(\partial_b\Gamma^f{}_{cd}\right)}_{=0}\ \underbrace{+\Gamma^h{}_{cd}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{ha}\right) - \Gamma^f{}_{cd}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{af}\right)}_{=0} \\
&\underbrace{-\Gamma^e{}_{hc}\left(\partial_b\Gamma^h{}_{ad}\right) + \Gamma^e{}_{cf}\left(\partial_b\Gamma^f{}_{ad}\right)}_{=0}\ \underbrace{-\Gamma^h{}_{ad}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{hc}\right) + \Gamma^f{}_{ad}\left(\partial_b\Gamma^e{}_{cf}\right)}_{=0} \\
&\underbrace{+\Gamma^e{}_{hb}\left(\partial_c\Gamma^h{}_{ad}\right) - \Gamma^e{}_{bf}\left(\partial_c\Gamma^f{}_{ad}\right)}_{=0}\ \underbrace{+\Gamma^h{}_{ad}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{hb}\right) - \Gamma^f{}_{ad}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{bf}\right)}_{=0} \\
&\underbrace{-\Gamma^e{}_{ha}\left(\partial_c\Gamma^h{}_{bd}\right) + \Gamma^e{}_{af}\left(\partial_c\Gamma^f{}_{bd}\right)}_{=0}\ \underbrace{-\Gamma^h{}_{bd}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{ha}\right) + \Gamma^f{}_{bd}\left(\partial_c\Gamma^e{}_{af}\right)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nyilatkozat

Alulírott Kivés Miklós, fizika szakos hallgató, kijelentem, hogy a projektmunkában foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel.

....

2014. január 21. Kivés Miklós

Irodalomjegyzék

[1] Robert M. Wald: *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984

[2] J. S. Bagla, H. K. Jassal és T. Padmanabhan, Phys. Rev. D **67**, 063504 (2003)

[3] A. Sen, JHEP **0204**, 048 (2002)