

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM TTIK  
OPTIKAI ÉS KVANTUMELEKTRONIKAI TANSZÉK

SZAKDOLGOZAT

# Egy- és kétvonalas spektroszkópiai kettős rendszerek vizsgálata

*Készítette:* **Kálmán Szilárd**  
fizika BSc szakos hallgató

*Témavezető:* **Dr. Szalai Tamás**  
tudományos munkatárs

*Konzulens:* **Mitnyan Tibor**  
tudományos segédmunkatárs

Szeged, 2019

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>1. Elméleti áttekintés</b>	<b>3</b>
1.1. Égitestek keringésének leírása . . . . .	3
1.1.1. Pályaelemek . . . . .	4
1.1.2. Kepler-törvények . . . . .	4
1.2. Radiális sebesség . . . . .	6
1.2.1. Sebességamplitúdó . . . . .	6
1.3. Doppler-eltolódás . . . . .	8
1.3.1. Keresztkorreláció . . . . .	8
1.3.2. Vonalprofil-analízis . . . . .	8
1.3.3. Korrekciós tényezők . . . . .	9
1.3.4. Kalibráció . . . . .	10
<b>2. Az adatok feldolgozása</b>	<b>12</b>
2.1. A keresztkorrelációs módszer . . . . .	12
2.2. A vonalprofil-analízis . . . . .	13
<b>3. Eredmények</b>	<b>16</b>
3.1. V781 Tauri . . . . .	16
3.2. LS 5039 . . . . .	17
3.2.1. A PHOEBE használata . . . . .	17
3.2.2. LS 5039 – radiálissebesség-görbe . . . . .	18
<b>4. Összefoglalás</b>	<b>19</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>20</b>
<b>Függelék</b>	<b>21</b>
<b>Hivatkozások</b>	<b>23</b>

## Bevezetés

Az égitestek (és különösen a csillagok) megfigyelésének talán legkézenfekvőbb módja a fényességük mérése, avagy *fotometria*, s ennek megfelelően távolra visszanyúló történelme van az eljárásnak, az ókori szabadszemes megfigyelésektől a legmodernebb távcsöves mérésekig. Pusztán ezzel a módszerrel azonban nem lehet minden szükséges információhoz hozzájutni.

Csillagok tömegének pontos meghatározására például általában csak akkor van lehetőség, ha azok kettős, vagy többes rendszer tagjai. Ilyenkor a színekükben lévő vonalak<sup>1</sup> a közös tömegközéppont körüli keringés miatt periodikusan elmozdulnak, amiből az alább tárgyalt módon meghatározható a tömegük.

A dolgozatom tárgyát olyan kettős rendszerek képezik, melyeknél egy vagy két komponens vonalai látszanak. A kétvonalas spektroszkópiai kettősök olyan csillagok, melyeknek fényessége hasonló, míg az egyvonalasok „családjába” tartoznak azok a rendszerek, ahol az egyik komponens sokkal halványabb a másiknál, az exobolygórendszerek, illetve az egy csillag és egy kompakt objektum (fekete lyuk vagy neutroncsillag) által alkotott rendszerek is.

## Motiváció, célkitűzés

Már régóta foglalkoztat a kérdés, hogy vajon egyedül vagyunk-e a Világegyetemben. A földi példából kiindulva az tűnik valószínűnek, hogy élet bolygókon létezhet, így exobolygórendszerek vizsgálata jó kiindulási pont lehet a kérdés megválaszolására.

Az első, másik főszorozati csillag körül felfedezett bolygót a spektroszkópiai módszerrel fedezték fel az 51 *Pegasi* körül (Mayor és Queloz, 1995), a dél-franciaországi Haute-Provence Observatórium 1,93 m-es távcsövére szerelt spektrográffal. Manapság ennél sokkal precízebb eszközökkel is végeznek ilyen típusú méréseket, úgy mint a HARPS (High Accuracy Radial Velocity Planet Searcher), vagy a Keck-HIRES (High Resolution Echelle Spectrometer) stb.

A dolgozatom eredeti célja tehát ilyen rendszerek vizsgálata lett volna, ám, mint kiderült, ilyen spektrumokhoz hozzájutni közel sem egyszerű. Ehelyett lehetőségem nyílt egy szoros kettős – a V781 Tauri –, valamint egy gammakettős<sup>2</sup> – az LS 5039 – spektrumát vizsgálni, s ez alapján a komponensek tömegeire vonatkozó megállapításokat tenni. Az exobolygórendszerek vizsgálata tehát eltolódott a jövőbe, azonban az ott (is) használatos radiális sebesség-módszerrel való ismerkedéshez ideálisak az alább tárgyalt rendszerek is.

A szakdolgozatom célja tehát egy- és kétvonalas spektroszkópiai rendszerek radiális sebesség-görbéinek meghatározása, illetve elemzése.

---

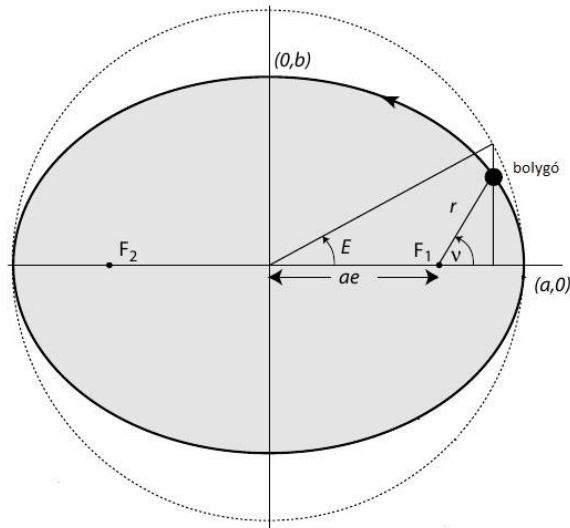
<sup>1</sup>A csillagok atmoszférája a folytonos színekéből bizonyos hullámhosszú fotonokat elnyel, létrehozva ezzel a vonalas színeképet.

<sup>2</sup>Olyan kettős rendszer, melynek egyik komponense egy kompakt objektum.

# 1. Elméleti áttekintés

Tekintettel a jó minőségű, új eredményeket, technikákat is tartalmazó magyar nyelvű anyag hiányára, az elméleti áttekintést Michael Perryman: *The Exoplanet Handbook* című könyve alapján készítettem (Cambridge University Press, 2011).

## 1.1. Égitestek keringésének leírása



1. ábra. Egy ellipszis és a főköre. Az F1 fókuszpont a rendszer tömegközéppontja, az F2 pedig az ún. üres fókuszpont. Az ábra a *The Exoplanet Handbook* 9. oldalán megtalálható alapján készült.

Az égitestek méretskálájánál a gravitációs erő az egyetlen kölcsönhatás, amellyel számolni kell a mozgásuk leírása során. A két objektum a közös tömegközéppontjuk körül az

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (1)$$

egyenlettel leírható ellipszis mentén kering. Itt  $a$  az ellipszis félnagy tengelye,  $e$  az excentricitása,  $\nu$  pedig a valódi anomália (azaz az ellipszis fókuszpontjától az adott égitesthez húzott egyenes és a félnagy tengely iránya által bezárt szög, 1. ábra). A valódi anomálián túl beszélhetünk még excentrikus anomáliáról ( $E$ , 1. ábra), illetve közepes anomáliáról is ( $M$ ). Ezekről részletesebben lehet olvasni a Dr. Szatmáry Károly, Dr. Székely Péter, Dr. Szalai Tamás és Dr. Szabó M. Gyula által létrehozott **Csillagászat** tananyagban<sup>3</sup>. Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ugyanezt az ellipszist az

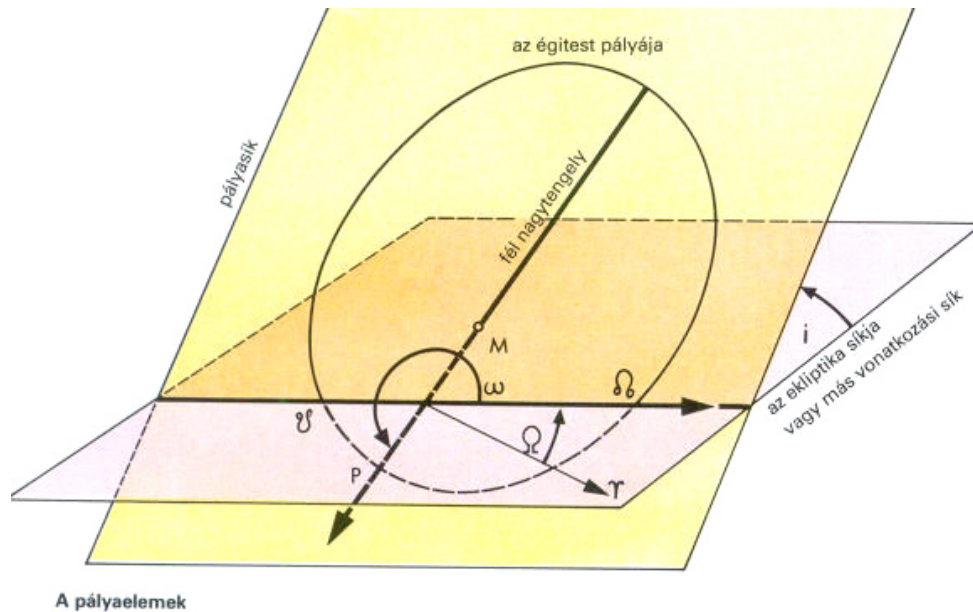
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

összefüggés írja le. Belátható, hogy

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}. \quad (3)$$

Csupán egy égitest keringési ellipszisének adatainak ismerete azonban nem elég a pálya pontos, térbeli leírásához, szükség van tehát további adatokra.

<sup>3</sup>[http://astro.u-szeged.hu/oktatas/csillagaszat/5\\_Egi\\_mechanika/egi\\_mechanika.htm#id2491786](http://astro.u-szeged.hu/oktatas/csillagaszat/5_Egi_mechanika/egi_mechanika.htm#id2491786)



2. ábra. Az ellipszis helyzetére vonatkozó pályaelemek. Forrás: [astro.u-szeged.hu](http://astro.u-szeged.hu)

### 1.1.1. Pályaelemek

Az égi mechanikában minden keringés leírásához hat adatot (ún. pályaelemet) használnak, amelyek közül három magára az ellipszisre vonatkozik ( $a$ ,  $e$ ,  $i$ ), kettő az ellipszis elhelyezkedésére ( $\omega$ ,  $\Omega$ ) (2. ábra), egy pedig egy időpontra, jellemzően a pericentrumon való áthaladás időpontjára ( $\tau$ ). A részletesebb magyarázatra szoruló fogalmak:

- **Inklináció ( $i$ ):** az alapsík és a keringés síkja által bezárt szög,  $0^\circ \leq i < 180^\circ$  tartományon. Egy keringést akkor tekintünk *prográdnak*, ha  $i < 90^\circ$ , *retrográdnak* pedig akkor, ha  $i > 90^\circ$ .
- **Felszálló csomó hossza ( $\Omega$ ):** a csomóvonal (az alapsík és a pályasík metszete) és az alapirány szöge. A csomóvonal 2 pontban metszi az égitest pályáját, ezeket fészálló-, és leszálló csomópontoknak nevezzük.
- **Pericentrum hossza ( $\omega$ ):** a csomóvonal és a nagytengely szöge, a keringési síkban mérjük.

### 1.1.2. Kepler-törvények

A bolygomozgásra vonatkozó három Kepler-törvény:

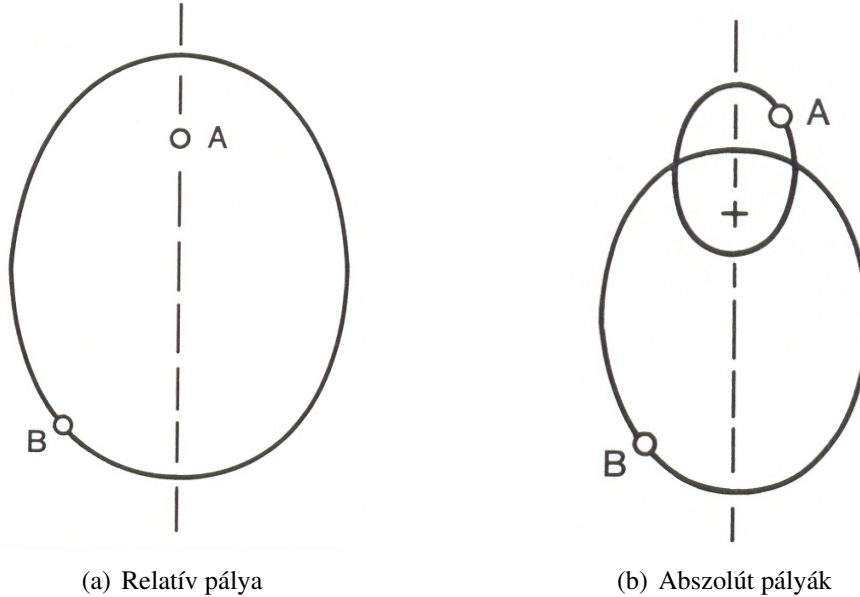
- I.) A bolygók a Nap körül ellipszispályán mozognak, ennek egyik fókuszpontjában a Nap áll.
- II.) A Naptól a bolygóig húzott félegyenes („vezérsugár”) azonos idők alatt azonos területeket sűrol.
- III.) A bolygók keringési periódusának négyzete egyenesen arányos a pályájuk félnagytengelyének köbével.

A (gravitációs) kéttestprobléma megoldása során mindhárom törvény megkapható, ami egyértelmű bizonyítéka az érvényességüknek tetszőleges  $M_1$  és  $M_2$  tömegű rendszerekre, így bármely csillag-csillag, vagy csillag-bolygó rendszerre is.

A III. törvény ez alapján:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_1 + M_2), \quad (4)$$

ahol  $P$  a keringési periódus,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$  pedig a gravitációs állandó. Ennek gyakorlatba történő átültetése két módon történhet: relatív-, és abszolút pályákkal (3. (a) és (b) ábrák).



3. ábra. A keringés kétféle leírása. Forrás: [astro.u-szeged.hu](http://astro.u-szeged.hu)

A relatív leírásra vonatkozó egyenlet formailag teljesen megegyezik a (4) egyenlettel:

$$\frac{a_{rel}^3}{P_{rel}^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}, \quad (5)$$

ahol  $a_{rel} = a_1 + a_2$  (Szalai, 2006). Ez gyakorlatilag az a szemlélet, ahol az egyik komponens kering a másik körül (azaz nem a közös tömegközéppont körül keringenek), és olyan esetekben használatos, ahol mindkét objektum látszik, hiszen ezek egymáshoz viszonyított helyzetéből számítható ki a komponensek tömege. Innen következik, hogy akkor menthető át csillag-bolygó rendszerre, ha a bolygó is látszik.

Abszolút keringés esetén úgy tekintjük a rendszert, hogy a két test a közös tömegközéppont körül kering. Ekkor:

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{GM'}{4\pi^2}, \quad (6)$$

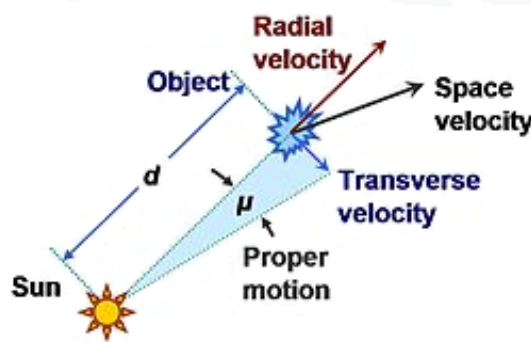
ahol

$$M' = \frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2}. \quad (7)$$

Ilyen szemléletben az alábbi egyenlőségek állnak fenn:  $a_1 : a_2 : a_{rel} = M_2 : M_1 : (M_1 + M_2)$ ,  $e_{rel} = e_1 = e_2$ , valamint  $P_{rel} = P_1 = P_2$ .

## 1.2. Radiális sebesség

A csillagok sebessége két komponensből tevődik össze: az érintő irányú  $v_t$  sebességből, illetve a  $v_r$  radiális sebességből (4. ábra). Előbbi megkapható a megfigyelőtől mért  $d$  távolság, valamint a  $\mu$  sajátmozgás szorzataként.



4. ábra. Az érintő – illetve látóirányú sebességek szemléltetése. Forrás: [en.wikipedia.org/wiki/Proper\\_motion](http://en.wikipedia.org/wiki/Proper_motion)

Azt mondhatjuk tehát, hogy egy csillag tényleges sebessége:

$$v_S = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}. \quad (8)$$

A radiális sebességben bekövetkező (periodikus) változásokból lehet az alábbiakban tárgyaltak szerint következtetni a csillag kísérőjének tulajdonságaira – elsősorban tömegére<sup>4</sup>.

### 1.2.1. Sebességamplitúdó

Tekintsük most egy csillag látóirányú mozgását (legyen ez az  $x$ -irány). Belátható, hogy:

$$x(t) = r(t) \sin i \sin(\omega + \nu), \quad (9)$$

ahol  $r(t)$  a csillag távolsága a tömegközépponttól. Ezt deriválva kapható meg a látóirányú – más néven radiális – sebesség:

$$\dot{x}(t) \equiv v_r = \sin i \cdot (\dot{r} \sin(\omega + \nu) + r \dot{\nu} \cos(\omega + \nu)) \quad (10)$$

Felhasználva az (1) egyenletet, azt kapjuk, hogy:

$$v_r = K_r (\cos(\omega + \nu) + e \cos(\omega)), \quad (11)$$

ahol

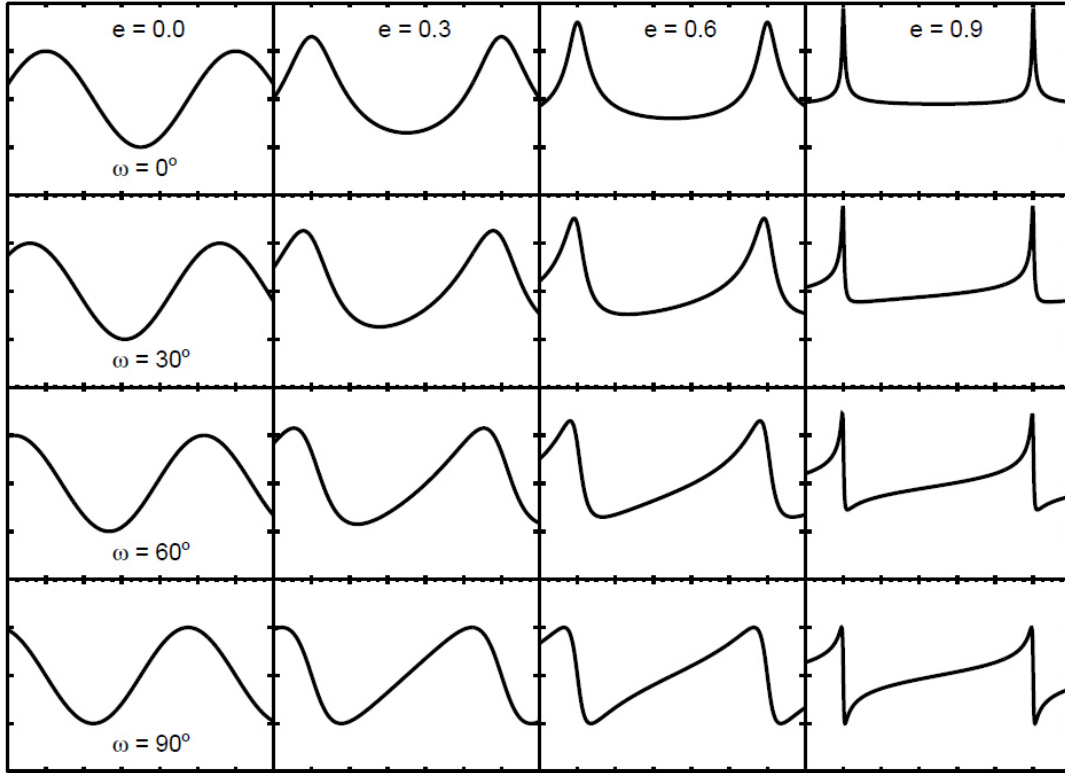
$$K_r = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P \sqrt{1 - e^2}} \quad (12)$$

a sebességamplitúdó. A látóirányú sebesség excentricitás és pericentrumhossz-függését hivatott szemléltetni az 5. ábra.

Behelyettesítve a (12) egyenletbe a (6) egyenletet, a sebességamplitúdó egy alternatív formáját kaphatjuk:

$$K_r^2 = \frac{G}{1 - e^2} \frac{1}{a_1 \sin i} \mathcal{M}, \quad (13)$$

<sup>4</sup>Megjegyzendő, hogy sajátmozgásban bekövetkező változásokból szintén lehet kísérő jelenlétére következtetni, ez az asztrometriai módszer.



5. ábra. Radiálissebesség – fázis görbék különböző  $e$  és  $\omega$  értékekre. Forrás: [astro.u-szeged.hu](http://astro.u-szeged.hu)

ahol

$$\mathcal{M} = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2}. \quad (14)$$

Amennyiben  $M_2 \ll M_1$  (ami bizonyos egyvonalas esetekben teljesül):

$$\mathcal{M} \simeq \frac{M_2^3 \sin^3 i}{M_1^2}. \quad (15)$$

Az  $\mathcal{M}$  mennyiséget szokás tömegfüggvénynek nevezni.

Tehát ha a (12) egyenletből meghatározzuk  $a_1 \sin i$ -t (és  $M_1$ -et meg tudjuk becsülni), a kisebb tömegű komponensről is nyerhetünk információt, mely azonban egy  $\sin i$  szorzótényezővel bizonytalan marad, az inklinációt ugyanis nem lehet meghatározni a látóirányú sebességek méréséből. Ebből következik, hogy exobolygók tömegének megadásakor minimális tömegről szokás beszélni. A hat pályaelem közül ezen felül  $\Omega$  nem határozható meg radiálissebesség-mérésekből.

Kétvonalas rendszerek esetén mindkét komponensre kinyerhető a radiálissebesség-görbe, így két sebességamplitúdóról beszélhetünk, jelöljük ezeket  $K_{r1}$  és  $K_{r2}$ -vel. Szoros kettősök esetén jó közelítéssel mondhatjuk azt, hogy körpályán keringenek ( $e = 0$ ). Ekkor a (12) egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$K = \frac{2\pi a \sin i}{P}. \quad (16)$$

$K_{r1}$  és  $K_{r2}$  segítségével definiálható az ún. tömegarány:

$$q = \frac{K_{r1}}{K_{r2}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1}, \quad (17)$$

mely egy 0 és 1 közé eső érték.



### 1.3. Doppler-eltolódás

Amennyiben egy test  $v$  sebességgel,  $\Theta$  szög alatt mozog a megfigyelőhöz képest, a  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  hullámhosszeltolódás arányos ezzel a sebességgel. Itt  $\lambda$  a megfigyelt hullámhossz (a csillag színképében fellelhető számos abszorpciós vonal valamelyikének hullámhossza),  $\lambda_0$  pedig a laboratóriumi körülmények között mért hullámhossz (természetesen ugyanakkor a vonalnak a hullámhossza). A két érték között a relativisztikus Doppler-eltolódás teremt kapcsolatot:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1 + \beta \cos \Theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (18)$$

ahol  $\beta = v/c$ . Amennyiben  $v \ll c$ , valamint  $\Theta \ll \pi/2$ :

$$v_r = v \cos \Theta \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c. \quad (19)$$

Megegyezés alapján  $v_r < 0$  akkor, ha felénk mozog, illetve  $v_r > 0$  akkor, ha tőlünk elfelé mozog az égitest.

A csillagok színképéből a radiális sebességük előállítását kétféleképpen vittem végbe a szakdolgozatom elkészítése során: keresztkorrelációval, valamint a vonalprofilok analízisével.

#### 1.3.1. Keresztkorreláció

A keresztkorreláció egy jelfeldolgozásban használatos integrálművelet, mely két jel hasonlóságot mutat meg, az egymáshoz viszonyított eltolódottságuk alapján.

Legyen  $f$  és  $g$  két folytonos függvény. A keresztkorrelációt ekkor

$$(f \star g)(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t + \tau)dt, \quad (20)$$

ahol  $f^*$  az  $f$  függvény komplex konjugáltja,  $\tau$  pedig az eltolódottság (vagyis,  $f$  egy  $t$ -kor fellépő tulajdonsága  $g$ -ben  $t + \tau$ -kor jelenik meg). Ennek szemléltetésére szolgál a 6. ábra.

Ezt átelve a radiális sebesség meghatározásának problémájára:

$$C(\varepsilon) \propto \int_{-\infty}^{\infty} S(v)M(v - \varepsilon)dv, \quad (21)$$

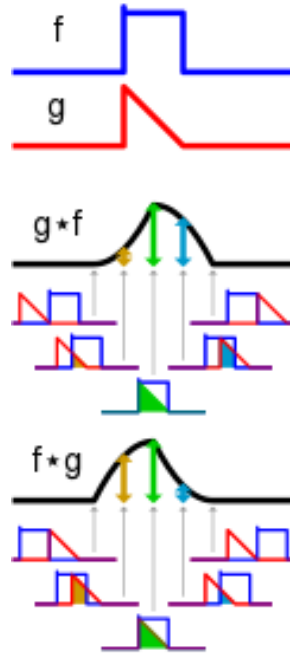
ahol  $S$  a mért-,  $M$  az összehasonlító spektrum (vagyis egy, az adott csillagéhoz hasonló spektrálosztályú, ismert és időben állandó radiális sebességű csillag spektruma (Mitnyan, 2014)),  $v$  sebességtérben kifejezve. A cél  $\varepsilon$  meghatározása  $C$  minimalizálásával.

#### 1.3.2. Vonprofil-analízis

Keresztkorrelációra akkor van igazán lehetőség, ha a vizsgált színképtartományon sok keskeny spektrumvonal található, ami például az LS 5039 általam (is) használt adatsorai esetében nem áll fenn. Ilyen esetekben pl. a vonprofil-analízis technikája alkalmazható. Ennek során a kialakuló színképvonal alakjára – ún. *Voigt-profil* – illesztett görbe segítségével, a (19) egyenletről határozzuk meg a radiális sebességet.

A Voigt-profil alakja (egy olyan görbére, melynek csúcsa nullában van) egy

$$G(x) = a \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (22)$$



6. ábra. A keresztkorreláció szemléltetése. Forrás: <https://en.wikipedia.org/wiki/Cross-correlation>

alakú Gauss-görbe és egy

$$L(x) = b \cdot \frac{\gamma}{(x^2 + (\frac{\gamma}{2})^2)} \quad (23)$$

alakú Lorentz-görbe konvolúciójaként áll elő ( $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$  és  $\gamma$  konstansok):

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x', \sigma) L(x - x', \gamma) dx'. \quad (24)$$

### 1.3.3. Korrekciós tényezők

A mért  $\Delta\lambda$  sosem tisztán a csillag(ok) periodikus mozgásából származik: szerepet játszanak a Föld mozgásának hatásai, a gravitációs vöröseltolódás, valamint a csillag térbeli mozgása is.

**A Föld mozgásának hatásai:** ahhoz, hogy ne hamis értékeket kapjunk, egy nyugalomban lévő, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző ponthoz kell viszonyítanunk a kapott spektrumot. Ilyen pl. a Naprendszer tömegközéppontja (a kéttestprobléma megoldásából ugyanis egyértelműen látszik, hogy a tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez). A Föld mozgásának hatásaira (beleértve a többi bolygó által gyakorolt gravitációs perturbációit is) megfelelően korrigált adatokból  $1 \text{ ms}^{-1}$  pontosság várható.

**Gravitációs vöröseltolódás:** egy csillag gravitációs vöröseltolódásának származéka:

$$v_r \simeq \frac{GM_\star}{R_\star c}, \quad (25)$$

akkor, ha  $R_\star > R_S$ , vagyis, ha a csillag sugara nagyobb a Schwarzschild-sugárnál ( $R_S \equiv 2GM_\star/c^2$ ) – newtoni határeset. Ez általában elhanyagolható.

**A csillag mozgásának hatása:** a csillag-bolygó rendszer tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ami egy konstans eltolódást okoz a radiális sebességekben, ezt „gamma-sebességnek” ( $v_\gamma$ ) nevezzük (Szalai, 2006).

Megjegyzendő továbbá, hogy pontos radiális sebesség mérések során a csillag egyéb felszíni tulajdonságai (pl. foltok) is szerepet játszanak, néhány  $ms^{-1}$  hibát jelentenek.

### 1.3.4. Kalibráció

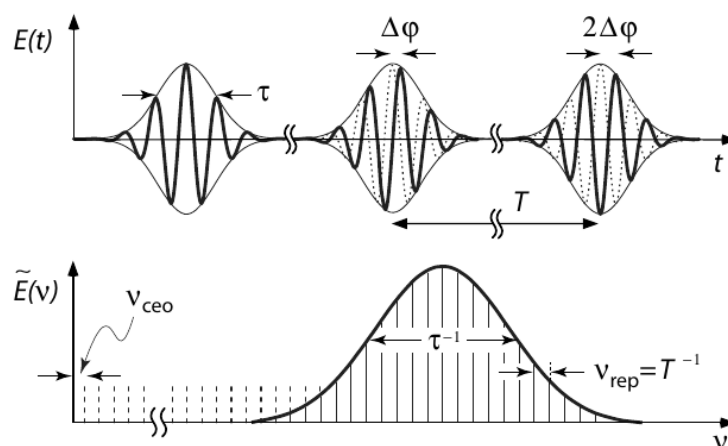
Nagy pontosságú radiális sebességek meghatározására nagy felbontóképességű ( $R \equiv \lambda/\Delta\lambda \sim 50000 - 100000$ ) echelle spektrográfokat alkalmaznak, 450 – 700 nm-es tartományban. A spektrum felvételének fontos részét képezi a hullámhosszak meghatározása. Ehhez össze kell vetni a spektrumot ismert hullámhosszú vonalakkal.

**Gázcellák** Az első eszközök hidrogén-fluoridot használtak, mely mérgező és korrodál, azonban a vonalai megfelelő távolságokra vannak egymástól, valamint a természetes vonalkiszélesedés is hasonló egy tipikus csillag színeképében megtalálhatóhoz.

Mára a jóda a legelterjedtebb ilyen célokra. Erős abszorpciós együtthatója van, és elég csupán néhány cm-es úthossz a kívánt eredményhez. A cellát a fényútba, éppen a spektroszkóp nyílása elé kell helyezni. Éles abszorpciós vonalak rakódnak rá a csillag spektrumára, ez az, ami lehetővé teszi a kalibrációt.

**Tórium-argon lámpa** Gázcella helyett használható egy ThAr spektrállámpa is. Ilyenkor két optikai szálát használnak, az egyik a csillag fényét hordozza, a másik pedig vele egyidejűleg vagy a lámpa fényét, vagy az égi háttérét. Ezen módszer előnye a sok emissziós vonal az optikaitól az infravörösig terjedő spektrumon.

**Frekvenciafésű** Olyan kalibrátorral, amely a látható és az infravörös tartományt is lefedi, valamint azonos vonaltávolságokat és vonalintenzitásokat biztosít, sokkal nagyobb pontosság érhető el. Ezt a lehetőséget nyújtják módusszinkronizált femtoszekundumos „frekvenciafésűk” (7. ábra). Ez a módszer egyetlen lézerimpulzus üregben történő hordozóhullámként való keringetésén alapul. Minden kör után az impulzus egy másolata elhagyja a közeget egy kimenő tükrön keresztül, folyamatos „impulzusvonalat” létrehozva ezzel. Az energiavesztés pótlásáról a sugárzó közegben fellépő indukált emisszió gondoskodik.



7. ábra. A frekvenciafésű működési elve. A felső képen látható „impulzusvonalat” hozza létre a Fourier-térben látható frekvenciafésűt. Minél rövidebb az impulzusok burkolójának  $\tau$  időtartama, annál szélesebb a fésű. A lézerezonátorban található diszperzív elemek miatt különbség lép fel a csoport- és fázissebességek között, amitől a hordozóhullám a burkolótól impulzusonként  $\Delta\varphi$ -vel eltolódik. Emiatt a Fourier-térben a fésű  $\nu_{ceo} = \Delta\varphi/2\pi T$ -vel tolódik el. Forrás: *The Exoplanet Handbook*, 20. oldal.

A fésű abszolút frekvenciáját a

$$\nu = \nu_{ceo} + n\nu_{rep} \quad (26)$$

egyenlet adja, ahol  $\nu_{rep} = T^{-1}$  az ismétlési frekvencia ( $T$  idő alatt ér körbe az impulzus),  $\nu_{ceo}$  a hordozó-burkoló offset-frekvenciája,  $n$  pedig egy természetes szám. A  $\nu_{rep}$  és a  $\nu_{ceo}$  is szinkronizálható az atomórákhoz. Ettől az eljárástól  $0,01 \text{ ms}^{-1}$  alatti pontosság várható.

## 2. Az adatok feldolgozása

### 2.1. A keresztkorrelációs módszer

Én mindkét kettős esetén előkészített spektrumokat kaptam kézhez, melyekből az IRAF (Image Reduction and Analysis Facility) nevű programcsomag segítségével állítottam elő a keresztkorrelációs profilokat, ahonnan pedig *gnuplot* segítségével készültek el a radiális sebesség-görbék.

A *.fits* kiterjesztésű képeken a spektrumot egy vékony, váltakozva sötét-világos csík jelenti. Ebből egydimenziós spektrumokat állítunk elő – hullámhossz-intenzitás értékpárokkal –, én már ilyen adatokkal dolgoztam. Az IRAF *noao.rv.fxcor* nevű taszkjával elvégezzük erre a keresztkorrelációt, azaz (a megfelelő összehasonlító csillag segítségével) képenként egy, sebességet és korrelációt tartalmazó adatsort kapunk. Kétvonalas rendszer esetén első lépésként az értékes információt tartalmazó adatsorok kiválasztása volt a cél, vagyis azoké, melyekből mindkét csillagra vonatkozó radiális sebesség kinyerhető (8. ábra (a) és (b) panelek). Tegyük fel, hogy a 8(c) és 8(d) ábrákon látható rendszer megfigyelése az oldal aljának irányából történik. Ha a  $\vec{v}_1$  és  $\vec{v}_2$  sebességvektorok (közel) párhuzamosak a megfigyelés irányával, akkor a radiális sebességeik jelentősen különböznek egymástól, azaz a (b) panelen látható keresztkorrelációs profil nyerhető ki a színeképből. Idővel azonban a két sebességvektor (közel) merőleges lesz a látóirányra, vagyis az (a) panelen látható profilnak megfelelő spektrum detektálható.

Következő lépésként az összehasonlító csillag radiális sebességét hozzáadtam az egyes pontokhoz, ezzel figyelembe véve azt, hogy a keresztkorrelációhoz nem egy nyugalomban lévő mintacsillagot használtam fel.

A szétválogatott profilokra az

$$f(v_r) = a_1^2 \cdot e^{-\frac{(v_r - b_1)^2}{c_1}} + a_2^2 \cdot e^{-\frac{(v_r - b_2)^2}{c_2}} \quad (27)$$

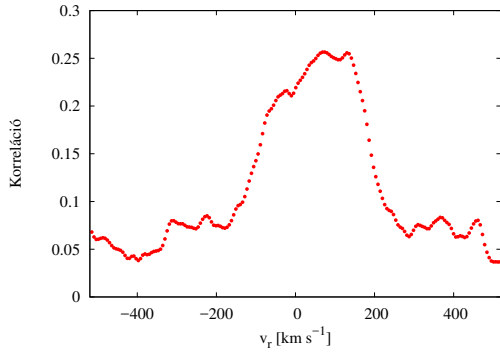
egyenletnek megfelelő, két Gauss-görbe összegéből előálló függvényt illesztettem. Az illesztéshez szintén a *gnuplot* nevű programot használtam, amely a nemlineáris legkisebb négyzetek ún. Levenberg-Marquardt-féle algoritmusát használja. Az exponenciális rész előtti kitevő azért van négyzeten, hogy semmiképpen se találhasson a program egy – az ábra tetejéről nézve – konvex és egy konkáv görbe összegeként előálló függvényt. Ezzel a módszerrel a 9. ábrán látható görbék kaphatóak. Ez alapján látszik az is, hogy a keresett sebességek meghatározásához nem lenne elég csupán leolvasni a görbék maximumának helyzetét, ugyanis a profilok szélsőértékét a két komponens hatásának összege adja.

A sebességek meghatározásához tehát azt kell tudnunk, hogy hol van az egyes görbéknek a maximuma, amit az

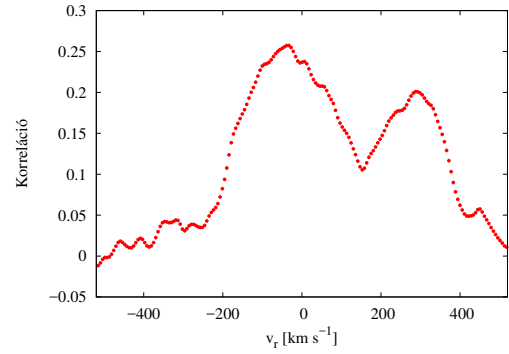
$$\begin{aligned} \frac{d}{dv_r} \left( a_1^2 \cdot e^{-\frac{(v_r - b_1)^2}{c_1}} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dv_r} \left( a_2^2 \cdot e^{-\frac{(v_r - b_2)^2}{c_2}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

egyenletekből kaphatunk (matematikailag szükség lenne a második derivált monotonitásának ellenőrzésére is, azonban az ilyen Gauss-görbéknek csak egy szélsőértékük van – a maximumuk). Innen azt kaphatjuk, hogy a keresett radiális sebességek éppen a  $b_1$  és  $b_2$  értékek lesznek.

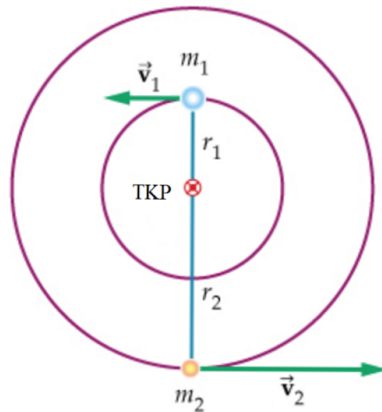
Ezt követően a *.fits* képek fejlécéből kiolvasott heliocentrikus Julián-dátumokból előállítottam a radiális sebességek fázisdiagramját, mások által meghatározott periódusértékek segítségével. Végül a fázis-sebesség pontokra illesztettem a (11) egyenletnek megfelelő két görbét. Ezen görbék amplitúdójának meghatározása volt a cél.



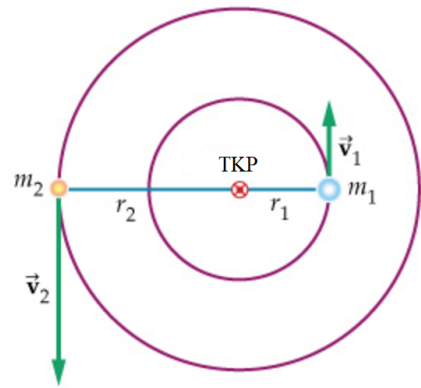
(a) Nem használható.



(b) Használható.



(c) Sematikus ábra a nem használható keresztkorrelációs profilhoz vezető konfigurációhoz.



(d) Sematikus ábra a hasznos keresztkorrelációs profilhoz vezető konfigurációhoz.

8. ábra. Példa a V781 Tau hasznos információt tartalmazó és nem tartalmazó keresztkorrelációs profiljára, valamint az ezekhez rendelhető konfigurációk, alulról történő megfigyelést feltételezve. <https://www.chegg.com/homework-help/questions-and-answers/binary-star-system-two-stars-orbit-common-center-mass-shown-figure-figure-1-part-r2-8r1-r-q13421341> alapján.

Egyvonalas rendszereknél a fentebb vázoltakkal azonosan történik minden, leszámítva, hogy nem kell kiválogatni az értékes információt hordozó keresztkorrelációs profilokat, illetve az  $f(v_r)$  függvény csupán egyetlen Gauss-göbére módosul.

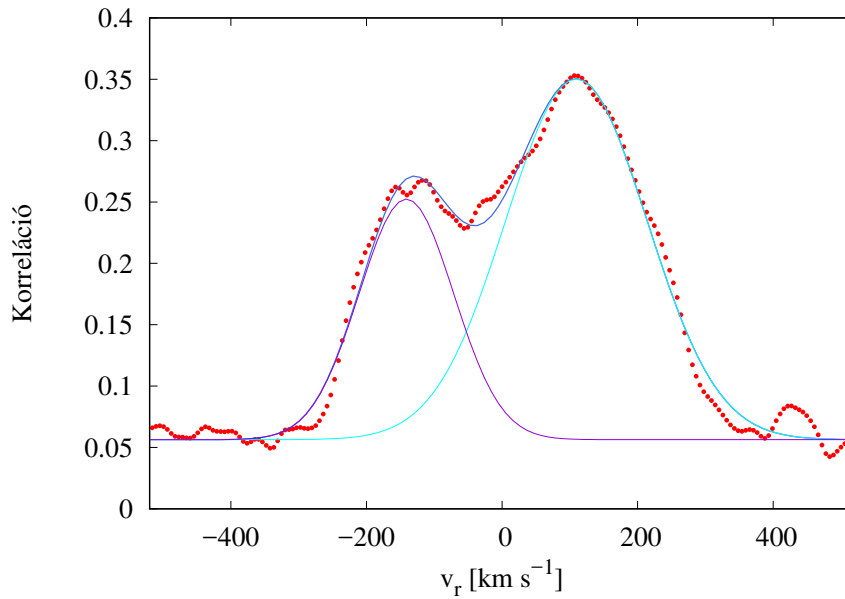
## 2.2. A vonalprofil-analízis

Az előkészített – *fits* képeken tárolt – spektrumokból az IRAF *noao.onedspec.wspectext* tascájának segítségével lehet szöveges jellegű, hullámhosszat és intenzitást tartalmazó fájlokat előállítani.

Az így kapott adatpontokat ábrázolva a kirajzolódó, „mélyebb” vonalak minimumának helyzete meghatározható, ha a spektrumvonalat egy megfelelő görbével leillesztjük. A keresztkorrelációs módszerhez hasonlóan az illesztéshez itt is *gnuplot*-ot használtam. A vonalra szintén lehetne Gauss-göbét illeszteni, azonban a beépített *voigt*( $x, y$ ) függvény szebben illeszkedik<sup>5</sup>, tehát az alkalmazott függvény (tekintettel a spektrum kontinuumnormált mivoltára)

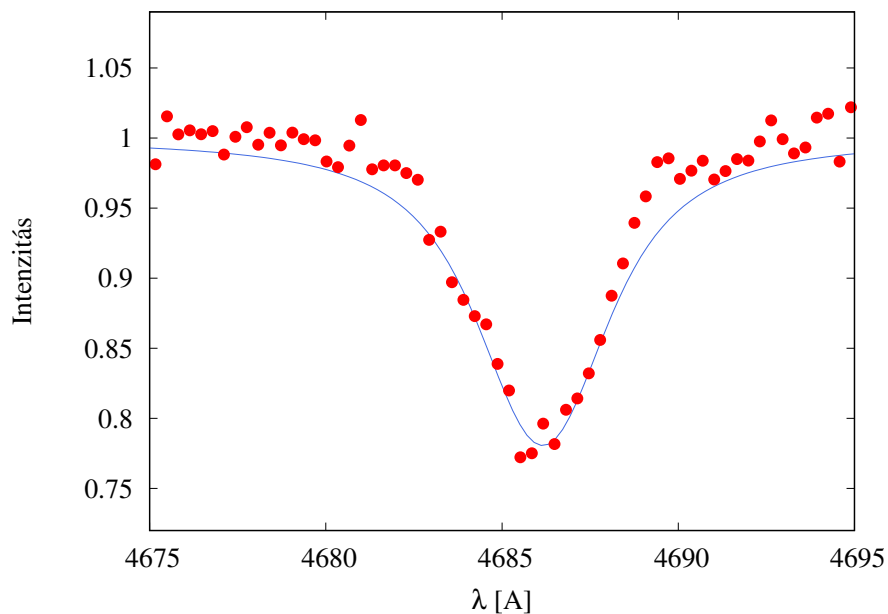
$$I(\lambda) = 1 - a \cdot \text{voigt}(x - b, c) \quad (29)$$

<sup>5</sup>A *gnuplot*-ba beépített *voigt*( $x, y$ ) függvény jól közelíti a (24) egyenlettel megadható görbét.



9. ábra. A V781 Tau keresztkorrelációs profilja (piros) egy adott időpontban, a rá illesztett  $f(v_r)$  görbe (királykék), valamint az ezt alkotó 2 Gauss-görbe (lila és ciánkék).

volt (lásd 10. ábra). Az itt látható  $b$  paraméter<sup>6</sup> megfelel a (19) egyenletben használatos  $\lambda$ -nak. Ismerve tehát  $\lambda_0$ -t, a radiális sebesség meghatározható.



10. ábra. Példa egy spektrumvonalra illesztett görbére az LS 5039 adatsoraiból.

Tekintettel arra, hogy a spektrumok igen zajosak voltak, az illesztés megkezdése előtt „simítottam” rajtuk úgy, hogy – a hullámhossz szerint – hármasával felosztva azokat, csak – az intenzitás szerinti – mediánhoz tartozó értékeket tartottam meg. Ennek kivitelezéséhez az  $R$  programcsomaghoz folyamodtam.

<sup>6</sup>A vonalak tényleges alakja itt egyáltalán nem számít, csupán az, hogy a minimumhelyük hol van, így a többi paraméterrel nem foglalkoztam különösebben.

Mindkét módszer esetén a Föld mozgására külön kell korrigálni. Ehhez egy weboldal<sup>7</sup> nyújtott segítséget, mely Wright és Eastman (2014) alapján, a kérdéses objektum égi koordinátái, az obszervatórium földrajzi helyzete és tengerszint feletti magassága, valamint a mérések elkészültének időpontja alapján kiszámítja a szükséges korrekciós tényezőket, melyeket hozzáadva a (19) segítségével számított látóirányú sebességekhez, a tényleges radiális sebességek megkaphatóak.

---

<sup>7</sup><http://astrutils.astronomy.ohio-state.edu/exofast/barycorr.html>

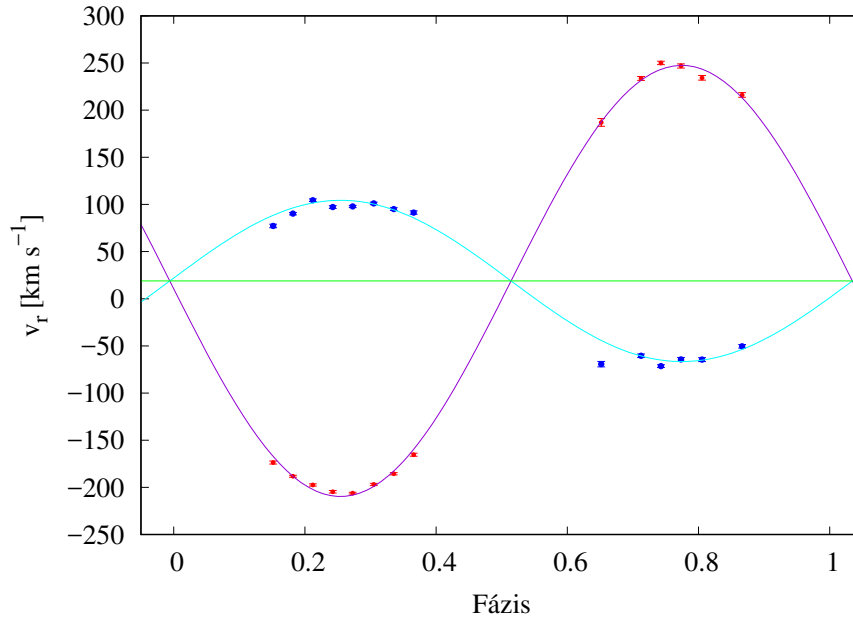


### 3. Eredmények

#### 3.1. V781 Tauri

A V781 Tau ( $\alpha_{2000} = 5^h 50^m 13,13^s$ ,  $\delta_{2000} = 26^\circ 57' 43,36''$ ) egy kevésbé tanulmányozott érintkező kettőscsillag 0,34 napos periódussal. A radiálissebesség-görbe előállításához felhasznált epocha és periódus:  $t_0 = HJD2457016,32177$ ,  $P = 0,34490986$  nap (Li és mtsai, 2016). A keresztkorrelációhoz szükséges másik csillag (az ún. radiálissebesség-sztenderd) a  $\beta$  Canum Venaticorum volt. A meghatározott radiális sebességeket a 3. táblázat tartalmazza.

A kapott radiálissebesség-görbék a 11. ábrán láthatóak. A görbék illesztése során meghatá-



11. ábra. A két komponens mért radiálissebesség-értékei és azok hibái (piros és királykék), a rájuk illesztett görbék (lila és ciánkék), valamint a „gamma-sebesség” (zöld).

roztam a két sebességamplitúdót, valamint a gamma-sebességet, ezeknek értékeit az 1. táblázat tartalmazza.

$K_{r1} \pm \Delta K_{r1}$ [km s <sup>-1</sup> ]	$K_{r2} \pm \Delta K_{r2}$ [km s <sup>-1</sup> ]	$v_\gamma \pm \Delta v_\gamma$ [km s <sup>-1</sup> ]
$-85,706 \pm 2,550$	$228,376 \pm 1,567$	$18,888 \pm 1,448$

1. táblázat. A V781 Tau mért sebességamplitúdói és gamma-sebessége.

A tömegarány ekkor a (17) egyenlet alapján:

$$q = \frac{|K_{r1}|}{K_{r2}} = 0,375 \pm 0,011.$$

Kallrath és mtsai (2006) a tömegarányt  $0,405 \pm 0,011$ -nek határozták meg. Az 1. táblázatban feltüntetett hibák csupán a keresztkorrelációs-profilok illesztéséből származnak. További hibaforrások az alacsony jel/zaj, egy esetleges harmadik komponens a rendszerben, melynek vonalai halványak, ezért – bár hatásukat nem lehet egyértelműen kimutatni – az említett profilokat torzítják, valamint az ehhez hasonló érintkező kettőscsillagok gyors forgásából és/vagy

keringéséből származó jelentős rotációs vonalkiszélesedés. Mindezeket figyelembe véve elmondható, hogy az általam kapott tömegarány hibahatáron belül megegyezik a Kallrath-ék által kapottal.

### 3.2. LS 5039

Az LS 5039 ( $\alpha = 18^h 26^m 15,06^s$ ,  $\delta = -14^\circ 50' 54,26''$ ) a *Luminous stars in the Southern hemisphere* katalógus elemeként került nyilvántartásba (Stephenson és Sanduleak, 1971), és azóta alapos tanulmányozásnak vetették alá. Szerepelt többek között a témavezetőm Ph.D. értekezésében (Szalai, 2013) is, én az általa használt adatok alapján, az abban bemutatott módszerektől kissé eltérően igyekeztem előállítani az ott publikálthoz hasonló radiális sebesség-görbét. Értethető módon az alábbiakban tényként közölt fogalmak és mennyiségek forrása ez az értekezés.

Az LS 5039 irányából röntgen-, valamint gamma-tartománybeli sugárzás is érkezik, ez utóbbinak következtében nevezik ezt a kettőscsillagot gamma-kettősnek. Ezek feltehetőleg egy nagy tömegű csillagból, valamint egy kompakt objektumból állnak, amely körül kialakuló akkréciós korong az említett sugárzás forrása. Felmerülő kérdés, hogy vajon neutroncsillag, vagy fekete lyuk-e ez az objektum, amire választ a tömegének meghatározása nyújthat.

A 2.2. alfejezetben leírt módon állítottam elő a radiális sebességeket, a He II (egyszeresen ionizált hélium) két vonalának (4685,81 Å, 5411,52 Å) felhasználásával. Ez a módszer távol áll az ideálistól, tekintettel arra, hogy igen kicsi változások a *voigt*-görbe minimumának helyzetében jelentős változásokat jelentenek a sebességek értékeiben, valamint arra is, hogy csupán két vonal állt rendelkezésemre.

A fázisdiagram előállításához felhasznált epocha és periódus:  $t_0 = HJD2455017,08$ , valamint  $P = 3,906$  nap. A radiális sebesség-görbe illesztése itt lényegesen összetettebb, mint a V781 Tau esetében, ugyanis ennél az egyvonalas kettősnél az excentricitás nem 0. Ennek a megvalósításához egy számomra teljesen új programot, a PHOEBE-t használtam (Prša és Zwitter, 2005).

#### 3.2.1. A PHOEBE használata

A *PHysics Of Eclipsing BinariEs* egy kettőscsillagok modellezésére alkalmas szoftver, mely a széleskörben elterjedt Wilson-Devinney-kódra épül (Wilson és Devinney, 1973). Én a dolgozatom során a PHOEBE legacy-t használtam (1.0 előtti verziót), ez ugyanis rendelkezik grafikus kezelőfelülettel is, szemben a 2.0-val és 2.1-gyel, melyek csak *python*-on keresztül használhatók.

A PHOEBE lehetőséget nyújt szintetikus fénygörbék és radiális sebesség-görbék előállítására, emellett lehetőség van benne mérési pontokon vett optimalizálásra, azaz illesztésre is, amihez az ún. *Nelder-Mead downhill simplex* módszert alkalmazza (Nelder és Mead, 1965).

Ez a program két- vagy három oszlopos fájlokat képes kezelni, mégpedig szigorú formalizmus mellett: az első oszlop idő, vagy fázis lehet, a második radiális sebesség vagy fényesség, a harmadik lehet üres, tartalmazhat súlyokat, vagy a mért értékek szórásait.

Én a radiális sebességre vonatkozó adatok alapján az epochát és periódust fix paraméterként kezelve, a fázistolást szabad változóként használva információt nyertem a félnagy tengelyről, a tömegarányról, a gamma-sebességről, a pericentrum hosszáról, valamint az excentricitásról és mindemellett a két komponens tömegéről is (lásd alább).

Az illesztés sikerességéhez a meghatározni kívánt paraméterek kezdeti értékeinek minél pontosabb megadása szükséges. A *fitting* ablakot kiválasztva a *Calculate*, valamint az *Update all* gombokra felváltva kattintva lehet a tényleges optimalizálást elvégezni. Mindeközben az *RV*

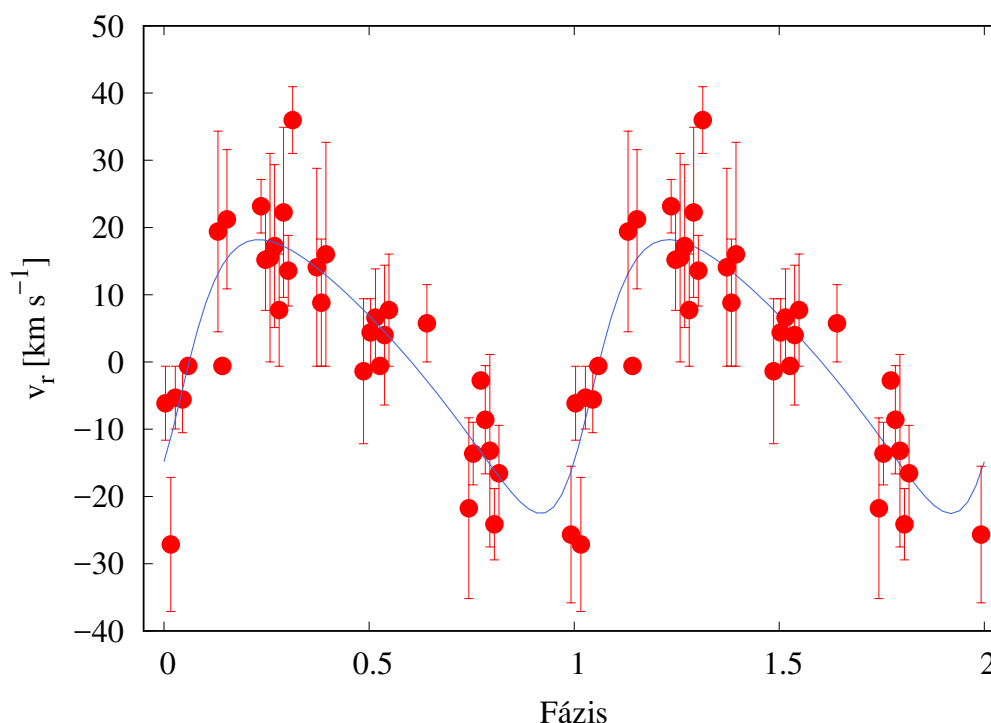
$A_{rel} [R_{\odot}]$	$v_{\gamma} [\text{km s}^{-1}]$	$\omega [^{\circ}]$	$e$	$M_1 [M_{\odot}]$	$M_2 [M_{\odot}]$
$30,96^{+1,43}_{-1,48}$	$0,28 \pm 1,41$	$250,96 \pm 24,06$	$0,32 \pm 0,1$	$23,36^{+3,24}_{-3,1}$	$2,79^{+0,53}_{-0,51}$

2. táblázat. Az LS 5039 gammakettős keringésének fizikai paramétereit.

Plot ablakban láthatóvá is tehető a kapott görbe. Tapasztalataim szerint – a program lefagyását elkerülendő – célszerű az illeszteni kívánt paramétereket egyesével optimalizálni első körben.

### 3.2.2. LS 5039 – radiális sebesség-görbe

Ahogy már korábban említettem, az egyes időpontokhoz tartozó radiális sebességeket én két He II vonal alapján állítottam elő, bizonytalanságként pedig ezek szórását vettem. A görbe illesztésénél ez utóbbit figyelmen kívül hagytam. A kapott radiális sebesség-görbe a 12. ábrán látható.



12. ábra. Az LS 5039 meghatározott radiális sebességei és ezek hibái (pirossal), valamint a rájuk illesztett görbe (kékkel). A jobb láthatóság kedvéért két fázist ábrázoltam. A felhasznált adatokat a 4. táblázat tartalmazza.

Fotometriai megfontolások alapján a pályainklinációnak kisebbnek kellene lennie  $30^{\circ}$ -nál (Szalai, 2013), illetve a főkomponens – mely egy forró O csillag – tömege  $M_1 = 22,9^{+3,4}_{-2,9} M_{\odot}$ . A PHOEBE-n belül a tömegek módosítására csakis indirekt módon, a (4) és (17) egyenleteken (jelen esetben tehát a félnagy tengelyen és tömegarányon) át van lehetőség. Vizsgálataim során  $27^{+3}_{-3,5}$ -os inklinációk mellett határoztam meg a rendszer néhány fizikai paraméterét (közben a főkomponens tömegét igyekeztem a megadott tartományra szorítani). A kapott értékek a 4. táblázatban láthatóak.

Amint az a 12. ábrán látható, a mért pontoknak igen jelentős szórása van, ez megnyilvánul a meghatározott paraméterek hibájában is. Végül soron a cél a kompakt objektum tömegének – ezáltal pedig mivoltának – meghatározása volt. Neutroncsillagok nagyjából  $3 M_{\odot}$  alatt léteznek,

vagyis, az általam meghatározott tömeg alapján ez nagyobb valószínűséggel neutroncsillag, azonban a fekete lyuk opció sem zárható ki teljes bizonyossággal.

## 4. Összefoglalás

A dolgozatomban bemutatom a csillagászat egyik legfontosabb módszerének, a radiális sebesség-analízisnek alapjait. Ennek során az égitestek színképében megtalálható vonalak apró elmozdulásaiból határozzuk meg a látóirányú sebességüket. Ezt a sebességet ismerve az idő függvényében előállítható a radiális sebesség-görbe, melynek paramétereiből azután meghatározhatóak az objektumok bizonyos tulajdonságai, mint például a tömegarány (kettőscsillagok esetén).

Munkám során megismerkedtem az eljárás gyakorlatba történő átültetésének két ágazatával: a keresztkorrelációs módszerrel, valamint a vonalprofil-analízissel. Előbbi megvalósításához az IRAF nevű programcsomag *fxcor* taszkjához fordultam, míg utóbbit (saját) *gnuplot* szkriptekkel vittem végbe. Az így kapott idő–sebesség adatpárokból mások által meghatározott keringési periódus segítségével fázis–sebesség adatsorokat állítottam elő, amelyekre végül radiális sebesség–görbéket illesztettem, a V781 Tau esetén *gnuplot*-tal, az LS 5039 esetén pedig PHOEBE-vel.

A V781 Tauri kétvonalas spektroszkópai kettőscsillag esetén a cél a két komponens tömegarányának meghatározása volt. A kapott  $q = 0,375 \pm 0,011$ -es érték hibahatáron belül megegyezik a szakirodalomban elfogadott értékkel.

Az LS 5039 egyvonalas spektroszkópai kettős esetén a cél a forró főkomponens körül keringő kompakt objektum tömegének (ezáltal pedig neutroncsillag vagy fekete lyuk mivoltának) meghatározása volt. Az erre kapott  $M_2 = 2,79_{-0,51}^{+0,53} M_{\odot}$  érték alapján valószínűleg neutroncsillag lehet, de azt sem lehet kizárni, hogy fekete lyuk lenne.

## **Köszönetnyilvánítás**

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, dr. Szalai Tamásnak, a dolgozat elkészítése során adott rengeteg tanácsért, trükkért, a végtelen türelemért, amellyel a kérdéseimre válaszolt, illetve az adatsorokhoz való hozzáférés biztosításáért. Köszönet illeti továbbá konzulensemét, Mitnyan Tibort, a technikai jellegű tanácsokért, valamint az adatsorokhoz történő hozzájárulás biztosításáért.

## Függelék

Fázis	$v_{r1} \pm \Delta v_{r1}$ [km s <sup>-1</sup> ]	$v_{r2} \pm \Delta v_{r2}$ [km s <sup>-1</sup> ]
0,652	225,585 ± 4,076	-30,721 ± 2,892
0,712	272,310 ± 2,102	-21,831 ± 1,877
0,743	288,723 ± 1,780	-32,769 ± 1,519
0,773	285,572 ± 2,200	-25,665 ± 2,017
0,805	272,988 ± 2,469	-25,816 ± 2,067
0,866	254,894 ± 2,428	-11,649 ± 1,873
0,151	-134,671 ± 1,591	116,201 ± 1,896
0,182	-149,224 ± 1,032	129,242 ± 1,233
0,212	-158,398 ± 1,221	143,556 ± 1,376
0,242	-165,603 ± 1,345	136,301 ± 1,490
0,273	-167,114 ± 0,947	136,942 ± 1,103
0,305	-157,828 ± 1,246	140,214 ± 1,321
0,335	-146,495 ± 1,235	134,266 ± 1,452
0,366	-126,228 ± 1,593	130,543 ± 1,822

3. táblázat. A V781 Tau radiális sebesség-görbéjének elkészítéséhez meghatározott adatok.

Fázis	$v_{r1}$ [km s <sup>-1</sup> ]	$\Delta v_r$ [km s <sup>-1</sup> ]
0,992	-25,670	10,158
0,003	-6,137	5,497
0,016	-27,141	9,967
0,027	-5,306	4,666
0,045	-5,583	4,943
0,059	-0,597	0,043
0,236	23,170	3,976
0,247	15,195	7,518
0,258	15,512	15,512
0,269	17,240	12,122
0,280	7,713	8,353
0,291	22,249	12,652
0,303	13,576	5,259
0,314	35,985	4,962
0,486	-1,369	10,787
0,504	4,389	5,029
0,515	6,605	7,245
0,527	-0,597	0,043
0,538	4,003	10,401
0,549	7,713	8,353
0,743	-21,749	13,439
0,754	-13,619	4,662
0,772	-2,750	1,088
0,783	-8,594	8,040
0,794	-13,201	14,309
0,806	-24,133	5,297
0,817	-16,545	7,127
0,131	19,413	14,934
0,142	-0,597	0,043
0,153	21,227	10,351
0,372	14,084	14,724
0,384	8,821	9,461
0,395	16,023	16,663
0,641	5,758	5,758

4. táblázat. Az LS 5039 radiálissebesség-görbéjének elkészítéséhez meghatározott adatok.

## Hivatkozások

- [1] Kallrath J. *et al.*: 2006, V781 Tauri: a W Ursae Majoris binary with decreasing period, *A&A*, 452, 959
- [2] Li K. *et al.*: 2016, The active W UMa type binary star V781 Tau revisited, *Ap&SS*, 361, 63
- [3] Nelder, J. A. & Mead, R.:1965, A simplex method for function minimization, *Comput. J.*,7, 308
- [4] Mayor M. & Queloz D.: 1995, A Jupiter-mass companion to a solar-type star, *Nature*, 378, 355
- [5] Mitnyan, T.; 2014: A VW Cephei érintkező kettőscsillag periódusváltozásának és felszíni aktivitásának vizsgálata, TDK-dolgozat, SZTE
- [6] Perryman, M.; 2011: *The Exoplanet Handbook*, 9-12, 16-20, *Cambridge University Press*
- [7] Prša, A. & Zwitter, T.: 2005, A Computational Guide to Physics of Eclipsing Binaries. I. Demonstrations and Perspectives, *ApJ*, 628, 426
- [8] Stephenson, C. B. & Sanduleak, N.: 1971, *Publications of the Warner & Swasey Observatory*, 1, 1
- [9] Szalai, T.; 2006: Szoros déli kettőscsillagok fizikai paramétereinek meghatározása, TDK-dolgozat, SZTE
- [10] Szalai, T., 2013: Nagy tömegű csillagok végállapotai: szupernóva-robbanásokhoz kötődő porképződés és az LS 5039 gamma-kettős vizsgálata, Ph.D. értekezés, SZTE
- [11] Wright J. T. & Eastman J. D.: 2014, Barycentric Corrections at 1 cm/s for Precise Doppler Velocities, *PASP*, 126, 838
- [12] <https://en.wikipedia.org/wiki/Cross-correlation>
- [13] <http://astro.u-szeged.hu/oktatas/tembevez.html>



## Nyilatkozat

Alulírott Kálmán Szilárd, Fizika BSc szakos hallgató (I8L88R), az Egy- és kétvonalas spektroszkópai kettős rendszerek vizsgálata című szakdolgozat szerzője, fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, .....

.....  
*aláírás*