

Szegedi Tudományegyetem  
TTIK  
Kísérleti Fizikai Tanszék



Szakedolgozat

# Rezonanciák extraszoláris bolygórendszerekben

Czavalinga Donát Róbert  
fizika BSc szakos hallgató

Témavezető: Dr. Szatmáry Károly  
egyetemi docens

Szeged  
2015

## Tartalomjegyzék

1.	Bevezetés .....	2
1.2	Felfedezési módszerek .....	3
1.3.	Kepler úrtávcső .....	5
2.	Elméleti áttekintés .....	6
2.1.	Titius-Bode szabály .....	6
2.2.	Egyéb bolygópályák eloszlását megjósoló szabály .....	7
2.3.	Rezonanciák bolygórendszerekben.....	8
3.	Használt adatbázis .....	13
4.	Adatok feldolgozása és kiértékelése.....	13
4.1.	Titius-Bode szabály .....	13
4.2.	Poveda-Lara szabály .....	15
5.	Rezonancia.....	17
5.1.	Poveda-Lara szabály vizsgálata .....	17
5.2.	Rezonanciák 4 és annál több exobolygót tartalmazó rendszerekben.....	20
5.3.	Rezonanciák 2 exobolygót tartalmazó rendszerekben.....	22
6.	Összefoglalás .....	23
7.	Irodalomjegyzék .....	25
8.	Táblázatok .....	25
9.	Köszönetnyilvánítás .....	38
	Nyilatkozat .....	39

# 1. Bevezetés

450 éve Giordano Bruno először tételezte fel azt, hogy az égbolton levő milliányi fénylő csillag pontosan ugyanolyan égitest, mint a Napunk amelyek körül a Földhöz hasonló bolygók keringhetnek. Ez volt az első ismert feltételezés az exobolygók létezésére (web1). Exobolygók vagy más néven extraszoláris bolygók olyan nagyobb égitestek, amelyek a Naprendszeren kívül, más csillagok körül keringenek.

Giordano Bruno elméletét az exobolygókról nagyon sokáig nem lehetett bizonyítani, mivel akkoriban erre még nem volt megfigyelési lehetőség. Természetesen voltak próbálkozások, hogyha nem is közvetlenül, de közvetett módon képesek legyünk exobolygókat kimutatni. Erre a közelmúltig kellett várni, egész pontosan 1992-ben sikerült az első olyan exobolygókat felfedezni, amelyeknek létét sikerült megerősíteni.

A három exobolygó egy pulzár körül kering. A pulzár egy olyan gyorsan forgó neutron csillag, amely a mágneses tengelye mentén rádiósugárzást bocsájt ki. Ha a mágneses pólus nem esik egybe a csillag forgási tengelyével, akkor a forgás következtében időnként a Föld irányába mutat a mágneses tengely, és ilyenkor nagy intenzitású rádiósugárzást észlelünk. Ez a forgás során periódikusan megismétlődik. Ezek a felvillanások nagyon pontosan következnek be egymás után és általában a másodperc tört része alatt többet is érzékelünk. Az exobolygó a két felvillanás közötti időközöket változtatja meg, mivel a pulzár a bolygóval alkotott közös tömegközéppont körül kering. Ezért látóirányban a neutroncsillag hol közeledik hol pedig távolodik a megfigyelőtől. Ezt pedig a Doppler effektus miatt érzékeljük. A Doppler-effektus abból áll, hogy a hullámforrás és a megfigyelő relatív mozgása az észlelt rezgés frekvenciáját, így a hullámhosszát befolyásolja (Budó, 1997 348. o.). Rezgés a jelen esetünkben a pulzár periodikus felvillanása. A Földről azt érzékeljük a neutroncsillag közeledése és távolodása miatt, mintha változna a felvillanások között eltelt idő, de ez csak látszólagos változás, amit az exobolygó okoz.

Ez egy igen speciális eset volt, így a következő cél az volt, hogy egy a Naphoz hasonló csillag körül találjunk exobolygót. Így további közvetett módszereket dolgoztak ki.

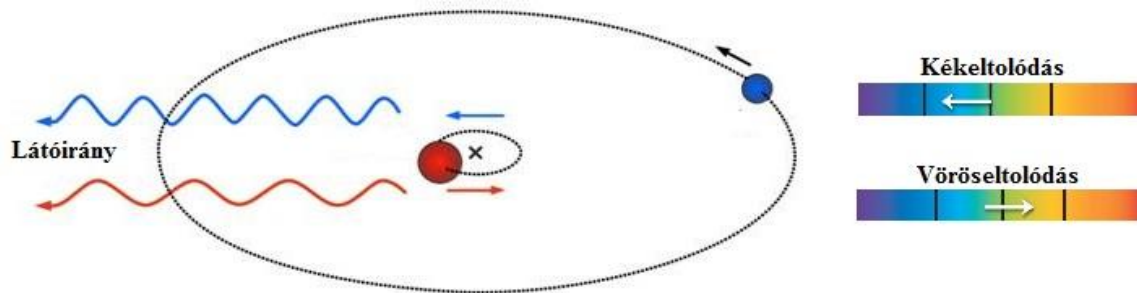
## 1.1 Felfedezési módszerek (web2)

### Közvetlen módszer:

- Az exobolygó közvetlen lefényképezése: csak ritka esetekben lehetséges, ha a csillag közel van hozzánk, a bolygó fényes és elég távol van a csillagától.
- Spektroszkópia: Az anyacsillag Planck görbéjére ráakódik a bolygó infravörös sugárzása.

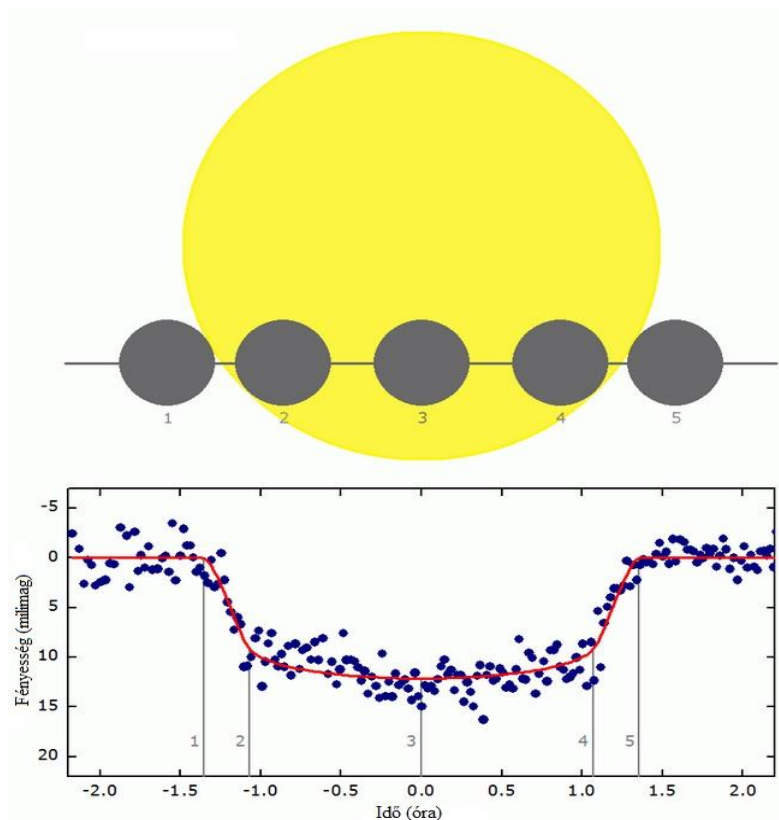
### Közvetett módszer:

- Pulzárak ciklikus modulációjából: a fent leírt módon lehet exobolygókat kimutatni. Hasonló módon lehet még a változócsillagok körül is bolygókat keresni, ha a fényváltozás szigorúan periodikus. Ilyen változócsillagok lehetnek például B szubtörpék.
- Gravitációs-lencse hatás: Ha egy exobolygó elhalad egy pontszerű háttércsillag előtt, akkor annak fényét felerősíti a bolygó által okozott gravitációs lencse-hatás miatt. A legnagyobb probléma ezzel a módszerrel az, hogy nagyon ritkán történik meg, csak egyszer halad el az égitest a háttércsillag előtt, így megerősítésre nincs lehetőség. Ezzel a módszerrel lehetne kimutatni magányos exobolygókat, amelyek nem keringenek csillagok körül, hanem magányosan járják a világegyetert.
- Asztrometria: Az anyacsillag az éggömbön való hullámos mozgásából lehet következtetni az exobolygóra, ha egy csillagnak van egy kísérője, akkor maga a csillag is kering a közös tömegközéppont körül. Ez pedig az éggömbre rajzolt útvonalában egy periodikus hullámként jelenik meg.
- Spektroszkópia: Hasonló az asztrometriához, azzal a különbséggel, hogy itt nem közvetlenül látjuk a csillag mozgását. Lényege, hogy az exobolygó „rángatása” miatt látóirányba hol közeledik, hol pedig távolodik a csillag, ezt pedig a Doppler-effektus miatt látni lehet a csillag spektrumában. Ez a változás a csillag színképében úgy jelenik meg, hogy a színképvonalak eltolódnak, távolodás esetén a hosszabb hullámhossz irányába, közeledés esetén pedig a rövidebb hullámhossz felé.



1. ábra. Színképvonalak mozgása a spektrumban a Doppler effektus miatt.

- **Fotometria:** A csillag előtt elhaladó exobolygó kitakarja a csillag felszínének egy kis részét és ezt a fényességcsökkenést érzékeljük. A módszer hátránya, hogy csak akkor láthatjuk ezt, ha a bolygó keringési pályájához közeli a látóirányunk. Emellett még az a lehetőség is fenn áll, hogy a fényességcsökkenés nem a bolygó miatt, hanem azon oknál fogva következik be, hogy a csillagnak egy foltja fordul be a Föld felé. Ezt a verziót úgy lehet kizárni, ha képesek vagyunk érzékelni a másodlagos fedést. Mikor a bolygó a csillaga mögé kerül akkor az exobolygóról visszaverődő fény nem jut el a megfigyelőhöz, ezzel kicsit csökkentve a megfigyelt égitest látszólagos összfényességét.



2. ábra. Fényességcsökkenés bekövetkezése (<http://www.astro.uni-jena.de/wasp-3/>).

A módszerek közül az utolsó kettőt használjuk a leggyakrabban, de még így is nagyon nehéz érzékelni az exobolygókat. Egy nagy tömegű exobolygó is csak nagyon kis mértékben mozgatja meg a csillagát, mindössze körülbelül csak 10 m/s látóirányú sebesség változást okoz. Képzeljük el, hogy egy sok száz fényévnnyire lévő, több százezer km/h-val száguldó csillag esetén képesek vagyunk érzékelni olyan csekély sebesség változást, mint amikor a városban egy autó lelassít a zebra előtt, hogy átengedje a gyalogost.

A fotometriai módszer sem egyszerűbb, mivel a bolygó csak egy kis részt takar ki a csillaga felszínéből, nagyon pontos műszerek kellene hozzá, hogy ezt a csekély fényességcsökkenést érzékeljük. Sőt ahhoz, hogy biztosak legyünk benne, hogy ez egy bolygó, nem árt a másodlagos fedést is érzékelnünk.

Ebből látszik az, hogy fejlett, pontos műszerekre van szükségünk ahhoz, hogy a Földhöz is hasonló exobolygókat találjunk. Eleinte a Földön található hatalmas teleszkópokkal kutattak az exobolygók után, főleg a spektroszkópiai módszerrel. Így körülbelül 500 bolygót találtak. Jelentős változás 2009-ben következett be, mikor felbocsájtották a Kepler űrtávcsövet.

## 1.2 A Kepler űrtávcső



3. ábra. A Kepler űrtávcső (<http://kepler.nasa.gov>).

A Discovery program keretében bocsájtották fel. Ennek egyik fő célja már az exobolygók keresése volt (web3).

Nagyon pontos, 0,00001 magnitúdójú fényességváltozást is ki tudott mutatni, ez pedig alkalmassá tette arra, hogy a fedési módszerrel képes legyen exobolygók után kutatni. Különlegessége még abban rejlett, hogy az égboltnak ugyanazt a részét vizsgálta. A Lyra csillagkép melletti területet figyelte 4 éven keresztül. Ennek köszönhetően a Földhöz hasonló keringési idővel rendelkező exobolygókat is felfedeztek. Előnye volt még az egyetlen irányba való nézésnek, hogy ha az exobolygó többször is elhaladt a csillaga előtt, biztosabbak lehettünk abban, hogy egy valódi bolygót látunk nem pedig egy foltot a forgó csillag felszínén.

A Kepler űrtávcső segítségével már majdnem 2000 megerősített exobolygónál tartunk és továbbiak várnak még megerősítésre (web 4). Az évek során a giroszkópos stabilizációs rendszerében problémák léptek fel, egész pontosan 2013-ban a második lendkereke is megállt, így képtelen volt pontosan a célra állni. Bár a program teljes egészében nem fejeződött be, de már nem néz egy irányba folyamatosan, így hosszú keringési periódusú bolygókat már nem tud felfedezni.

## **2. Elméleti áttekintés**

Az exobolygó kutatásnak köszönhetően rengeteg ismeretlen világot fedeztünk fel, de ennek egy másik fontos vonzata is van, mégpedig az, hogy végre képesek vagyunk a saját Naprendszerünket összehasonlítani más bolygórendszerekkel. Például, hogy más csillagrendszerekben a bolygók keringési periódusai mutatnak-e hasonlóságot a Naprendszerben keringő bolygókhoz képest.

### **2.1 Titius-Bode szabály**

Johann Daniel Titius felfigyelt arra 1766-ban, hogy a bolygók távolságában és sorrendjében összefüggés fedezhető fel (web 5). Egy jól definiálható egyenlet leírja a bolygók félnagy tengelyét a napunktól a bolygók sorrendjének függvényében. Ezt a szabályt 1778-ban Johann Elert Bode népszerűsítette és öntötte végleges formába. Ez lett a Titius-Bode szabály.

$$a_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n, \quad (2.1.1)$$

ahol az  $a_n$  a félnagy tengelyt, az  $n$  pedig a következő számokat jelöli:  $-\infty, 0, 1, 2, 3, \dots$ .

Ez a modell elég jól írta le a bolygók távolságait, de sok csillagász és fizikus mögöttes fizikai tartalom nélküli, csak számokkal való játéknak tekintette. Azonban pár évvel később William Herschel felfedezte az Uránuszt, ami jól illeszkedett a Szaturnusz után következő, a szabály által számolt pálya méretéhez. A szabályt tovább erősítette még az 1801-ben felfedezett Ceres kisbolygó is, ami betöltötte a Mars és a Jupiter közötti űrt. Később problémát okozott a Neptunusz, amely sehogy sem illett bele a sorba. Többek között ezért is van az, hogy a modern csillagászatban a szabályt csak érdekességként említik meg.

## 2.2 Egyéb bolygópályák eloszlását megjósoló szabályok

Az exobolygó rendszerek nagyszámú észlelése miatt újra feléledtek azon próbálkozások, hogy a bolygópályákat a lehető legjobban leíró egyenlettel tudjuk jellemezni. Hátha van tökéletesebb a Titius-Bode szabálynál. Már más is foglalkozott ezzel a témával és 2 cikket találtam ezzel kapcsolatban, meglepő módon mind a kettő lényegében ugyanazt az egyenletet írta le.

Az egyik ilyen egyenlet a Lovis et al. (2010) cikkben szerepel. A következő módon írja le a bolygók távolságát a csillagjuktól:

$$a_n = c_1 \cdot c_2^n, \quad (2.2.1)$$

Ahol az  $a_n$  a félnagy tengelyt az  $n$  pedig a bolygó a rendszerben a sorrend szerint elfoglalt helyét jelöli:  $1, 2, 3, \dots$ . A  $c_1$  és a  $c_2$  az adott rendszerre jellemző állandók.

A másik ilyen egyenletet a Poveda & Lara (2008) cikkben találtam. Ez a következőféleképpen néz ki:

$$a_n = k_1 \cdot e^{k_2 \cdot n}, \quad (2.2.2)$$

Ahol az  $a_n$  a félnagy tengelyt az  $n$  pedig az adott bolygó sorrend szerint elfoglalt helyét jelöli:  $1, 2, 3, \dots$ . A  $k_1$  és a  $k_2$  az adott rendszerre jellemző állandók.



Látható, hogy az (2.2.2) egyenlet átalakítva az első egyenletet kapjuk meg csak más konstansokkal.

$$a_n = k_1 \cdot (e^{k_2})^n, \quad (2.2.3)$$

úgy hogy,

$$c_1 = k_1, \quad (2.2.4)$$

és

$$c_2 = e^{k_2}, \quad (2.2.5)$$

így nem volt arra szükség, hogy mind a kettővel foglalkozzak. A későbbiekben erre a képletre Poveda-Lara szabályként fogok hivatkozni.

## 2.3 Rezonanciák bolygórendszerekben

Természetesen, ha fel lehet fedezni több exobolygó rendszer között is ennek a két szabálynak a létét, az nagy valószínűséggel nem véletlen, akkor annak mögöttes fizikai tartalma lehet. Az egyik ilyen jelölt az úgynevezett középmozgás-rezonancia. Egy bolygórendszer alapvető felépítése az, hogy egy nagy tömegű csillag körül keringenek a csillaghoz képest elhanyagolható tömegű bolygók. Természetesen vannak speciális esetek, olyan többes rendszerek, ahol több nagy tömegű csillag van vagy a bolygó-csillag tömegek összehasonlíthatóak, de ezzel nem foglalkoztam munkám során.

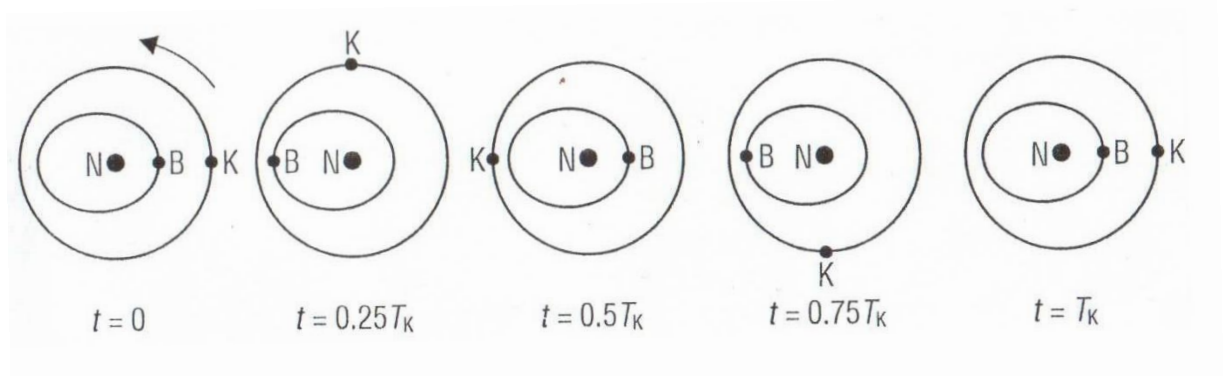
A bolygók tömege viszont egymással már összehasonlítható és gravitációs mezejük segítségével képesek is egymásra hatni. Ki tudják lökni egymást a rendszerekből vagy pont ellenkezőleg, stabil pályára kényszeríthetik társukat. Bolygórendszerek kialakulása során valószínűleg ez az egyik legfontosabb tényező, főleg a bolygók elhelyezkedését határozza meg.

Maga a rezonancia lényege, hogy a bolygók egymáshoz viszonyított helyzete megismétlődik periódikusan (Sándor, 2004). A legegyszerűbb ilyen eset, amikor két égitest

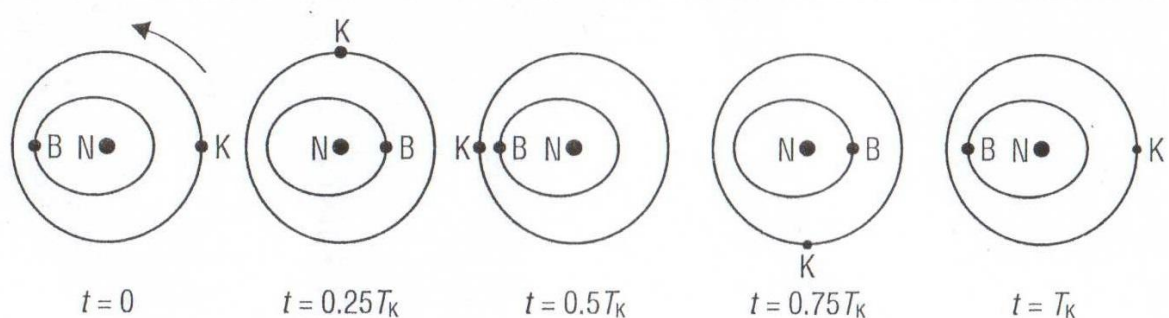
középmozgás-rezonanciában van egymással. A keringési periódusok kis egész számként arányulnak egymáshoz. Ez a következő egyenlettel írható le:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{p+q}{p}, \quad (2.3.1)$$

ahol  $n_1$  a belső,  $n_2$  a külső égitest középmozgása, azaz az átlagolt szögsebessége, a  $p$  és  $q$  pedig relatív prímszámok. Az átlagos szögsebesség helyett használhatjuk a reciprokát, a keringési periódusnak is ( $n=2\pi/T$ ). Alapvető fontosságú, hogy ismerjük a két égitest excentricitását, mivel ettől függően lehet a rezonancia stabil vagy instabil. Ha stabil, akkor soha nem fog közel kerülni egymáshoz a két égitest és így hosszú ideig fennmaradnak. Ha viszont a keringés során többször közel kerülnek egymáshoz egyik kilökheti a másikat a pályáról.



4. ábra. Példa 2:1-es "jó" rezonanciára (Sándor, 2004).



5. ábra. Példa a 2:1-es „rossz” rezonanciára (Sándor, 2004).

Természetesen a legjobban ismert bolygórendszerben, a Naprendszerünkben is találkozhatunk ilyesfajta rezonanciákkal.

### **Neptunusz és Plutó rezonanciája**

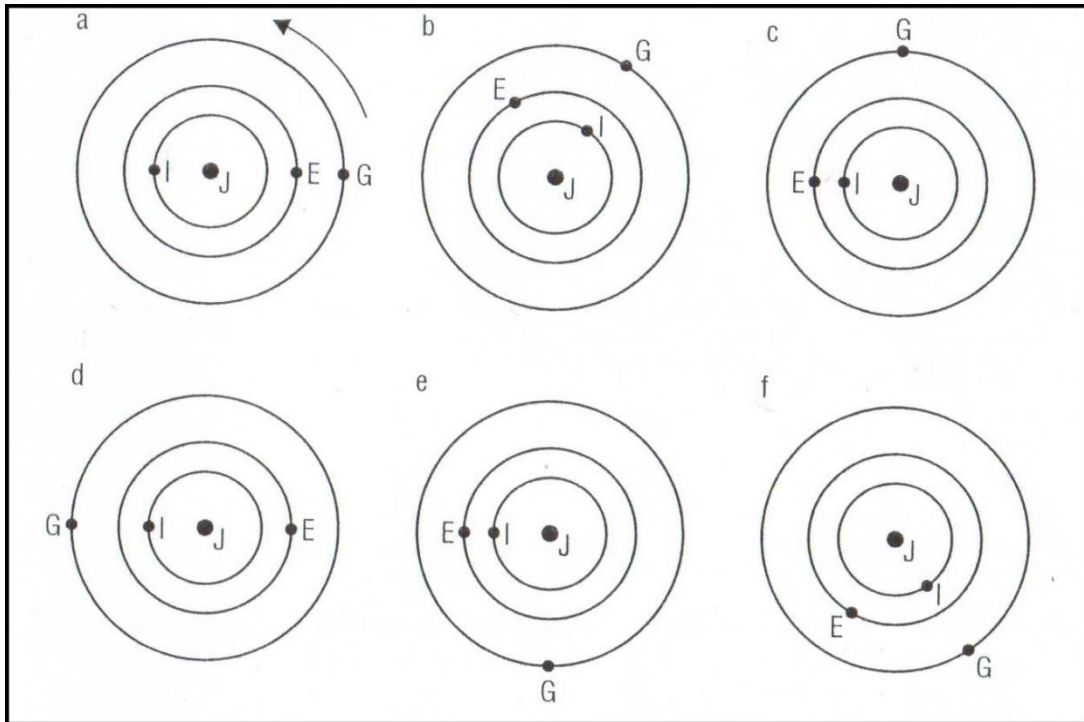
A bolygó-törpebolygó kettőse 3:2 arányú rezonanciában kering (Sándor, 2004). A Plutó pályája a többi bolygóéhoz képest eléggé elnyúlt ellipszis, nagy excentricitással rendelkezik. Ez olyan nagy, hogy bizonyos időközönként a Neptunusz pályán belül kering. Természetesen felmerül a kérdés, hogy nem áll fent az a veszély hogy összeütközzenek, mivel még a pályájuk is majdnem metszik egymást. Ez a középmozgás rezonancia miatt nem lehetséges, mivel a két égitest középmozgása  $n_N=21''{,}5/\text{nap}$ , illetve  $n_P=14''{,}2/\text{nap}$ , tehát 3:2 – es arányú rezonanciában vannak. Ez felelős azért, hogy a Plutó és a Neptunusz minél jobban elkerüljék egymást, ennek következtében soha nem kerülnek 18 AU-nál közelebb egymáshoz.

### **A nagy egyenlőtlenség**

A Jupiter és Szaturnusz között közel 5:2 rezonancia áll fent (Sándor, 2004). A Naphoz rögzített koordináta rendszerben az együttállások nem mindig ugyanott következnek be, hanem az a Nap körül cirkulál. Ez oknál fogva a két bolygó nincs egymással középmozgás-rezonanciában.

### **Jupiter-holdak többszörös rezonanciái**

Talán a legszebb és legismertebb rezonancia a Galileo-féle holdak között áll fenn. Az Io az Európával és az Europa a Ganymedesszel 2:1 arányú rezonanciában van.



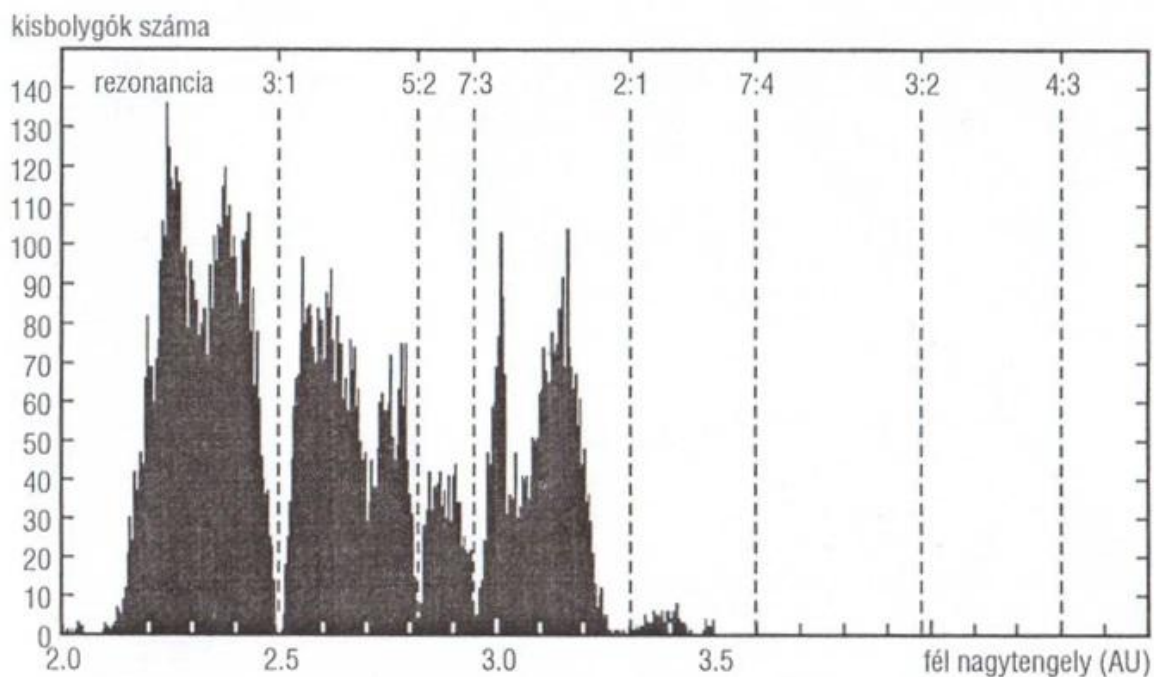
6. ábra. Az Io, Europa és a Ganymedes együttállásakor kialakuló konfigurációk (Sándor, 2004).

### Rezonanciák kisbolygók és a Jupiter között

A kisbolygó öv a Mars és a Jupiter között található. Régóta ismert tény, hogy ebben az övben a kisbolygók eloszlását a Jupiter gravitációs hatása befolyásolja. A Jupiter a kisbolygók pályáit perturbálja a középmozgás-rezonancia által.

1867-ben Kirkwood felfedezte, hogy a kisbolygók nem egyenletesen töltik ki a Jupiter és a Mars közötti teret. Bizonyos félnagy tengelyeknél minimumok figyelhetőek meg. Ezeket a felfedező tiszteletére Kirkwood-zónáknak nevezték el. Ezek a távolságok pont középmozgás rezonanciában vannak a Jupiterrel. Többek között 3:1, 5:2, 7:3, 2:1 rezonanciánál is kisbolygó hiány figyelhető meg.

Bizonyos helyeken pedig pont fordítva van, mintha ott több keringene. Például a 3:2 rezonanciában álló Hilda-csoport tagjai, vagy a Jupiterrel 1:1 rezonanciában álló Trójai kisbolygók is szép számmal mintegy 2000 fős populációval rendelkeznek.



7. ábra. Bizonyos rezonanciáknál az eloszlásban minimumok, a Kirkwood-zónák figyelhetők meg (Sándor, 2004).

Fenti példából látható, hogy a rezonanciák hol üresedést, hol pedig kisbolygó csoportosulást okoznak.

### A 3:2 rezonancia

A Hilda-csoport található itt. A tagjai 3,9-4 AU félnagytengelyű 0,1-0,2 excentricitású pályán keringenek. A csoport legnagyobb tagja, a Hilda kisbolygó együttállása a Jupiterrel a perihélium környékén történik, így a bolygó elkerüli a gázóriás közelségét. Ez a viselkedés jellemzi a Hilda csoport többi tagját is. Későbbiekben bebizonyították, hogy a 3:2 rezonancia szerkezete a 2:1 rezonanciához hasonlít, bár ez utóbbiban igen kis számban vannak kisbolygók.

### Kirkwood-zónák

A Kirkwood-zónák elnéptelenedését csak a közelmúlt kutatási eredményei miatt sikerült megérteni, de mind a mai napig vannak olyan zónák, amire nincs megnyugtató magyarázat. Ha a 2:1 és 3:2 rezonanciát nézzük, akkor csak egy numerikus paraméterben különböznek egymástól, de az egyik helyen csoportosulás, a másik helyen kisbolygó hiány figyelhető meg. Wisdom kutatásai hozták meg az áttörést a Kirkwood-zónák kiürülésével kapcsolatban (Wisdom, 1982). Kimutatta, hogy 3:1 rezonancia esetén az ott levő kisbolygók excentricitása egy lassú folyamat eredményeként annyira megnő, hogy a Mars pályájához

közel kerülnek. Az itt fellépő erős perturbációk miatt pedig elhagyja a rezonanciát a kisbolygó.

A sikerek után a többi rezonanciát is vizsgálták, Sidlichovsky és Melendo bebizonyították, hogy az 5:2 rezonancia dinamikailag hasonló, mint a 3:1-es rezonancia (Sidlichovsky & Melendo, 1986). A 7:3 rezonancia esetén viszont már nem volt elég csak a középmozgás-rezonanciákat vizsgálni, itt már szekuláris rezonanciákat is figyelembe kellett venni. Morbidelli és Moons kutatásai alapján a kisbolygó excentricitása annyira megnő, hogy a Föld pályájához is közel kerülhet (Morbidelli & Moons, 1995).

2:1-es rezonancia azonban gyökeresen eltér a többi kisbolygó minimumot okozó rezonanciáitól, mivel inkább a 3:2 rezonanciához hasonló. Ugyanakkor a 2:1-es rezonanciában csak néhány égitest, míg 3:2-es rezonanciában a Hilda csoport tagjai keringenek. A két rezonancia ezen ellentmondásos viselkedését mind a mai napig nem tudták megnyugtatóan bizonyítani (Sándor, 2004).

### **3. A felhasznált adatbázis**

Legelső lépésként a The Extrasolar Planets Encyclopaedia (web 6) és az Open Exoplanet Catalogue (web 7) weboldalakat használtam. Ez a két oldal körülbelül ezer többes rendszerben megtalálható exobolygót tart számon. A Titius-Bode és a Poveda-Lara szabály alkalmazásához a négy és annál több bolygót tartalmazó rendszereket választottam ki és vittem át Excel dokumentumba.

Innentől kezdődött az érdemi munka, ahol 40 exobolygó rendszert és a Naprendszert elemeztem.

## **4. Az adatok feldolgozása és kiértékelése**

### **4.1. A Titius-Bode szabály alkalmazása**

Amikor Titius és Bode megalkotta a szabályt, akkor még csak a Nap körül keringő 6 bolygót ismerték, arról nem is álmodozhattak, hogy a naprendszeren kívül lévő bolygókat is belevethetnek a képletükbe. Így a képlet teljes mértékben a naprendszerre lett úgymond optimalizálva.

Nem voltak benne az adott rendszerre jellemző konstansok, amelyek változtatásával lehető legjobban le lehetett volna írni az egyenletet, így át kellett alakítani. A képlet lényegének megőrzésével és a lehető legkevesebb változtatással ezt a képletet alkalmaztam:

$$a_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n, \quad (4.1.1)$$

ahol  $a_n$  a félnagy tengelyt, a  $c_1$   $c_2$  a rendszerre jellemző konstansokat, az  $n$  pedig itt is a következő számokat:  $-\infty, 0, 1, 2, 3, \dots$  jelöli.

Céлом az volt, hogy megfelelő  $c_1$  és  $c_2$  konstansokat alkalmazzak, amelyek megfelelően leírják a valós bolygó távolságokat. A szabály vizsgálata szerencsére segített, mivel naprendszerbeli képlet alapján az exobolygóknál is lényegében a  $c_1$  konstans az első bolygót jelöli, míg a  $c_2$  konstans meghatározásához az első bolygó távolságát ki kell vonni a második bolygó távolságából.

Bevittem az Excel táblázatba 41 négy bolygónál többet tartalmazó bolygórendszert és az előbb említett konstansokkal kiszámítottam minden rendszerre az elméleti bolygópályákat (1. táblázat).

Mivel az első két bolygó alapján számoltam ki a konstansokat, ezért, ha például van még egy fel nem fedezett bolygó az eddig ismert második bolygó előtt, elvileg a konstansoknak rossznak kellene lenniük, így lehetséges lenne, hogy a rosszul jósoló egyenletek emiatt nem működnek. De a legtöbb rendszer a Kepler adatai közül került ki, amelyek főleg fedési exobolygók voltak, amelyeknél a felfedezés valószínűségét erőteljesen javítja, ha a bolygó a csillaga közelében kering és nagy a bolygó sugara. Kis bolygósugar esetén még lehetséges, hogy nem vettük észre a közel keringő exobolygót, de általában kis átmérőhöz kis tömeg tartozik, ami nem befolyásolja nagyon a nagyobb tömegű bolygók pályáit.

Nem véletlen, hogy csak egy rendszerrel tudtam sikeresen alkalmazni más konstansokat (2. táblázat).

Majd ezek után egyszerűen összehasonlítottam az elméletileg kiszámolt pályákat a gyakorlatilag kiszámolt pályákkal (3. táblázat).

Magát az elemzést két részletben végeztem el, először kiválogattam azokat a bolygórendszereket, amelyek teljesítették a Titius-Bode szabályt. A teljesítés feltételének azt választottam, hogy a rendszer összes bolygójának a relatív eltérése 10% belül kell lennie számított bolygópályához képest. Mivel sok olyan volt, ahol csak 1 bolygó csúszott el, - például a mi naprendszerünk is ilyen - így ezeket is bevettem a még az illeszkedő exobolygók közé azzal a feltétellel, hogy a csillag körül 5 vagy annál több bolygó kering. Erre azért volt szükség mivel a 4 db planétát magában foglaló rendszer esetén az első két bolygó maga a

konstans meghatározásban való szerepe miatt hibátlanul illeszkedik, így csak egynek kellene jónak lennie a számítás alapján. Erre pedig véletlenül is igen nagy az esély.

Második lépésben a feltételt nem teljesítő rendszerek esetén két dolgot tudtam tenni, az egyik a már tárgyalt konstans megváltoztatása volt, de jobban működött az, hogy a bolygóknak a rendszerben elfoglalt helyét változtattam meg, azt feltételezve, hogy van még ott nem érzékelhető exobolygó. Ez sikeresebb volt, 6 ilyen rendszert találtam.

**Titius-Bode szabályát változtatás nélkül megfelelően leíró rendszerek (12 eset):** Kepler-79, Kepler-89, Kepler-107, Kepler-122, Kepler-256, Kepler-224, Kepler-223, Kepler-221, HR8799, Kepler-11, Kepler-84, Kepler-85

**Titius-Bode szabályát a bolygók áthelyezésével már megfelelően leíró rendszerek (6 eset):** Kepler-82, Kepler-286, Kepler-215, Kepler-186, Kepler-62, Naprendszer

Vegyük például az áthelyezett bolygók esetén a Naprendszert. Itt a Jupitertől kellett a többi bolygót eggyel hátrébb rakni. A kimaradt helyen pedig már felfedeztük az aszteroida övezetet és legnagyobb kisbolygóját a Cerest. Lehet, hogy a többi exobolygó rendszernél is ehhez hasonló okok miatt nem látunk bolygót.

Az látható még a laza megszorítások ellenére is, hogy sok bolygórendszer nem illeszkedik (23 eset) így én úgy gondolom, hogy ha van is valami igazság a Titius-Bode szabály mögött, akkor nem minden rendszerre írható fel. De természetesen ez nem azt jelenti, hogy nem lehetséges másmilyen szabály alapján leírni egy rendszert.

## 4.2. Poveda-Lara szabály

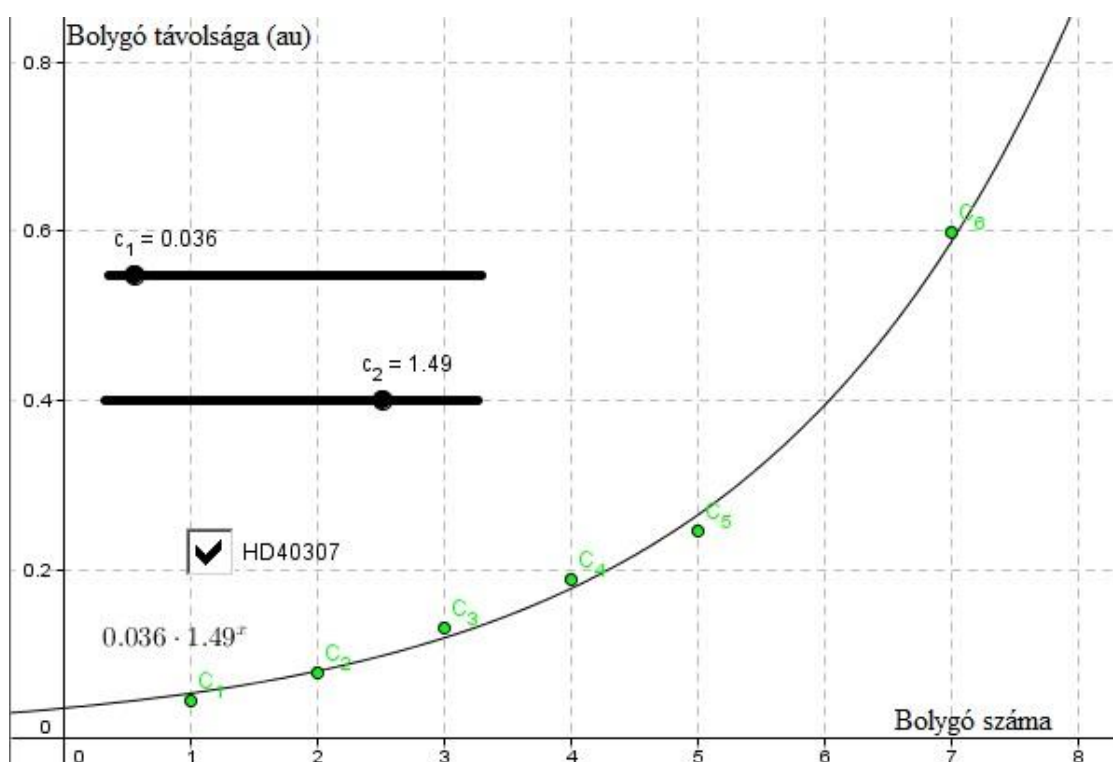
A Titius-Bode szabály után a már fent tárgyalt egyenletet vettem elő és egy különbséggel lényegében ugyanazt csináltam végig.

$$a_n = c_1 \cdot c_2^n \quad (4.2.1)$$

Ahol az  $a_n$  a félnagy tengelyt az  $n$  pedig a bolygó a rendszerben a sorrend szerint elfoglalt helyét jelöli: 1, 2, 3, .... A  $c_1$  és a  $c_2$  az adott rendszerre jellemző állandók (4. táblázat).



Itt tér el az előbbiektől a feladat, mivel a konstansokat nem volt annyira egyszerű meghatározni. A Geogebra nevű függvényábrázoló programot használtam az állandók meghatározásához. Ábrázoltam a bolygók félnagy tengelyét a rendszerben elfoglalt helyük függvényében, majd kézi úton a fent leírt egyenletnek a konstansainak változtatásaival megpróbáltam függvényt illeszteni. Az eredeti terv az volt, hogy nem kézzel, hanem számítógéppel csinálom meg, de ha egy bolygó rossz helyen van a sorban, akkor bár a gépi illesztés esetén is látom, hogy hibás, de a vizualizáció hiánya miatt nem veszem észre, hogy az illesztés jobb is lehetett volna, ha pár bolygót áthelyezek. Míg kézi illesztés esetén az ember szeme sokkal hamarabb észreveszi ezt.



8. ábra. HD40307 rendszer kézi illesztése (geogebra).

Konstansok meghatározása után már csak vissza kellett írnom az Excel táblázatba az állandókat és megnéztem az eltéréseket (5. táblázat).

Összehasonlításnál természetesen már figyelembe vettem az eltolt bolygókat (6. táblázat).

Pontosan ugyanazt a feltételt használtam, mint a Titius-Bode szabály esetén. Így pedig a következőket kaptam:

**Poveda-Lara szabályát változtatás nélkül megfelelően leíró rendszerek (16 eset):** Kepler-79, Kepler-89, Kepler-107, Kepler-85, Kepler-172, Kepler-150, Kepler-402, Kepler-299,

Kepler-256, Kepler-235, Kepler-224, Kepler-223, Kepler-221, HR 8799, Kepler-84, Kepler-292

**Poveda-Lara szabályát a bolygók áthelyezésével már megfelelően leíró rendszerek (11 eset):** Kepler-341, Kepler-306, Kepler-220, Kepler-215, Kepler-186, Kepler-169, Kepler-296, Kepler-62, Kepler-11, HD 40307, Kepler-90

Látható, hogy a Naprendszerünk nincs benne valószínűleg, ezért sem merülhetett fel eddig ez a szabály még ha az exobolygó rendszereknél sok jó eredményt ad.

## 5. Rezonanciák

### 5.1. A Poveda-Lara szabály vizsgálata

A Poveda-Lara szabály az általam vizsgált bolygórendszerek kétharmadára igaz volt, ezért ezzel az egyenlettel foglalkoztam tovább. Háttha maga az egyenlet akkor írja le megfelelően a bolygók távolságát a csillagjuktól, ha a bolygók középmozgás-rezonanciában vannak egymással. A középmozgás-rezonancia a bolygók keringésével arányos, nem pedig azok félnagy tengelyével. Ezért át kellett alakítanom a képletet.

A bolygók félnagy tengelyéből a következő egyenlet segítségével lehet keringési időt számolni.

$$\frac{a_n^3}{p_n^2} = \gamma \frac{M+m}{4\pi^2}, \quad (5.1.1)$$

Ahol az  $a_n$  a fél nagytengely, a  $p_n$  a keringési periódus, a  $\gamma$  a gravitációs állandót, a  $M$  a csillag tömege míg az  $m$  a bolygó tömege.

Ebbe a képletbe helyettesítettem be a Poveda-Lara féle szabályt (2.2.1) és alakítottam át.

$$\frac{(c_1 \cdot c_2^n)^3}{p_n^2} = \gamma \frac{M+m}{4\pi^2}$$

$$\sqrt[2]{\frac{(c_1 \cdot c_2^n)^3}{\gamma \frac{M+m}{4\pi^2}}} = p_n$$

$$p_n = (c_1 \cdot c_2^n)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2]{\gamma \frac{M+m}{4\pi^2}}}, \quad (5.1.2)$$

A közép-mozgás rezonancia esetén a keringési periódusok kis egész számként arányulnak egymáshoz. Két a sorrendben egymás után keringő exobolygó esetén a következő egyenletet írtam fel.

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(c_1 \cdot c_2^{n+1})^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2]{\gamma \frac{M+m_1}{4\pi^2}}}}{(c_1 \cdot c_2^n)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2]{\gamma \frac{M+m_2}{4\pi^2}}}}$$

a képlet egyszerűsödik, ha az exobolygók a csillagjukhoz képest elhanyagolható a tömegűek.

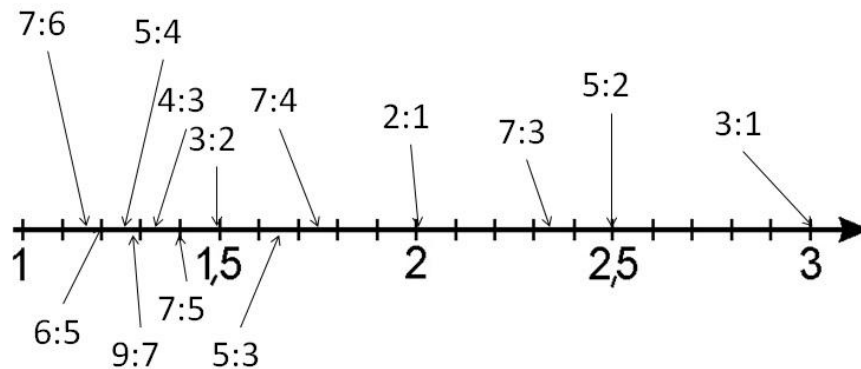
$$m_1 \ll M \text{ és } m_2 \ll M$$

Az általam vizsgált bolygórendszerekre igaz, így a következő módon írható tovább az egyenlet:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{c_1^{\frac{3}{2}}}{c_1^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{c_2^{n+1}}{c_2^n}\right)^{\frac{3}{2}} = c_2^{\frac{3}{2}}, \quad (5.1.3)$$

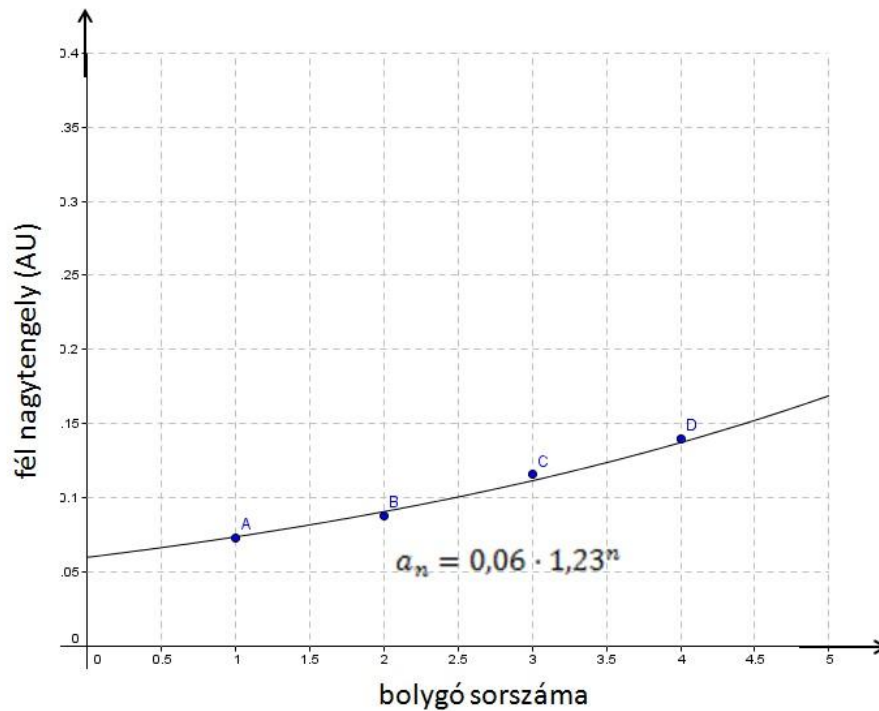
Ebből a képletből az látszik, hogy a Poveda-Lara szabály akkor írja le megfelelően a rendszert, ha a rendszerben lévő szomszédos exobolygók keringési periódusainak hányadosa állandó, amit pedig  $c_2$  konstans határoz meg. Az egyik lehetséges oka ennek, hogy a bolygók középmozgás-rezonanciában vannak egymással. Egy rendszerben, ha az összes szomszédos

exobolygó között középmozgás-rezonancia áll fent, az exobolygók keringési periódusainak hányadosa csak pár darab egymáshoz közeli értéket vehet fel. Egy rendszerben, így igen nagy valószínűséggel alakulnak ki hasonló rezonanciák bolygópárok között.



9. ábra. A középmozgás-rezonancia arányok értékeinek eloszlása a számegegyenesen.

A 9. ábrán látható 7:6 és 2:1 rezonancia között igen sokféle rezonancia jöhet létre, amelyek igen közel vannak egymáshoz. Ez azt jelenti, hogy ha kis eltéréssel is, de létrejöhet olyan Poveda-Lara szabály, amely megfelelően írja le a vizsgált bolygórendszert, úgy hogy a keringési periódusok hányadosa valójában nem állandó, csak igen közel esnek egymáshoz. Erre a legjobb példa a Kepler-223 rendszer. A rendszerben 4 exobolygó kering a csillagjuktól 0,073 AU, 0,088 AU, 0,116 AU és 0,14 AU távolságra. Az első a második bolygóval 4:3 arányú, második a harmadik bolygóval 3:2 arányú, míg a harmadik a negyedik bolygóval megint 4:3 arányú középmozgás-rezonanciában áll. A bolygópárok keringési periódusainak aránya láthatóan nem állandó, de olyan közel van a kétféle rezonancia egymástól a számegegyenesen, hogy a Poveda-Lara szabály megfelelően írja le az általam használt 10 %-os hibahatáron belül.

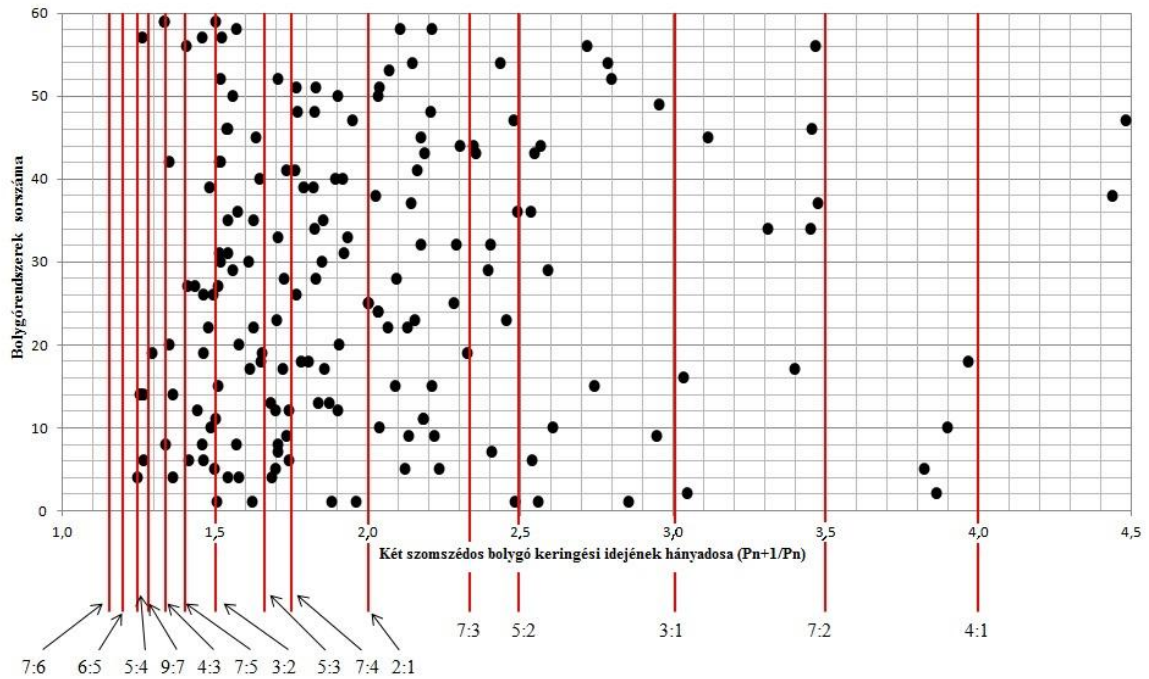


10. ábra. A Kepler-223 rendszer kézi illesztése.

Az egyenlettel számolt exobolygó félnagytengelyek a legnagyobb eltérés esetén is csak 3,74 %-kal különbözik a valódi félnagytengelytől.

## 5.2. Rezonanciák 4 és annál több exobolygót tartalmazó rendszerekben

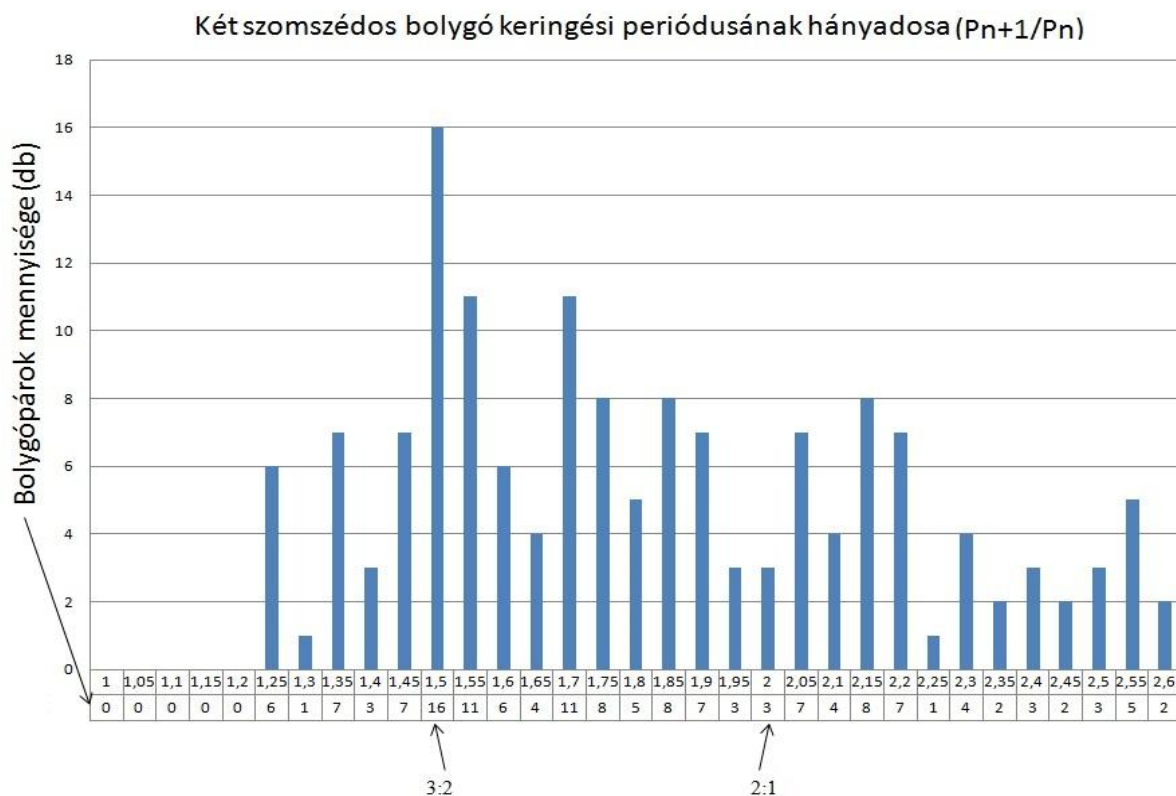
Felmerül a kérdés, hogy találhatóak-e még olyan bolygórendszerek ahol középmozgás-rezonanciák figyelhetőek meg. Ezért elosztottam az összes exobolygó keringési idejét az ugyanabban a rendszerben a sorban előtte lévő bolygó keringési idejével (9.-10. táblázat). Így megkaptam az összes bolygórendszerben az egymással szomszédos bolygók keringési idejének az arányát, majd ezt ábrázoltam.



**11. ábra. 4 és annál több exobolygót tartalmazó rendszerek. A pontok egy azon rendszerben lévő két szomszédos bolygó keringési idejének hányadosai, például 3. bolygó keringési ideje osztva a 2. bolygó keringési idejével. A piros vonalak a középmozgás-rezonanciákat jelölik.**

Erről az ábráról nehéz volt kiolvasni a pontok sűrűségét, ezért készítettem egy másik diagramot.

A 11. ábrán lévő vízszintes tengelyt felosztottam 0,05 egység szélességű oszlopokra oly módon, hogy középre (1, 1,05 1,1 1,15 és így tovább) számok kerültek. Majd az így kapott oszlopokban megnéztem, hány bolygópár található és összeadtam őket. Tehát például 1,475 és 1,525 közötti bolygópár arányok egy oszlopba kerültek és ezeknek a mennyiségét ábrázoltam egy diagramon. Ezekbe az oszlopokba belekerülnek a középmozgás-rezonancia arányai is. Tehát lehetőségem van számszerűen megnézni, hogy ezen oszlopokba hány bolygópár kerül bele összehasonlítva a többi oszloppal.

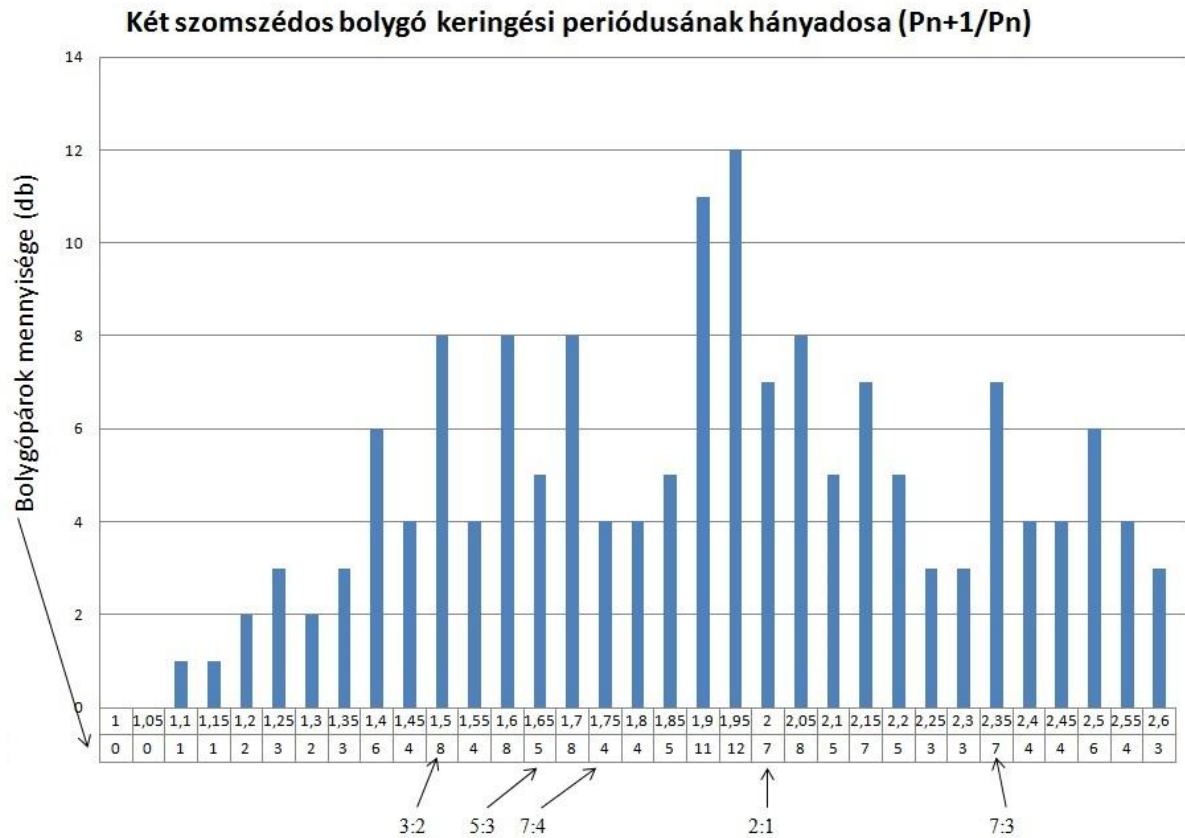


12. ábra. 4 és annál több exobolygót tartalmazó rendszerek. Az oszlopok az egy intervallumba beleeső bolygópárok számát jelölik.

Látható, hogy a 3:2 rezonancia arány közelében igen sok bolygópár van: 16, míg a 2:1 rezonancia aránynál pont fordítva, igen kevés bolygópár: 3 figyelhető meg.

### 5.3. Rezonanciák 2 exobolygót tartalmazó rendszerekben

Lehetséges, hogy elrontja a rezonanciákat az, hogy több bolygó is kering a rendszerben. Ezért ábrázoltam a két exobolygót tartalmazó rendszereket, hátha ezek esetében gyakoribb a rezonancia (11.-14. táblázat). Fennáll annak a veszélye, hogy van olyan bolygó, amit még a nem fedeztek fel a csillag körül. Ezzel sajnos nem tudtam mit kezdeni, így azt feltételeztem, hogyha van is, akkor vagy olyan kicsi, vagy olyan távol kering a csillagtól, hogy nem zavarja meg a két belső bolygót.



**13. ábra. 2 exobolygót tartalmazó rendszerek. Az oszlopok az egy intervallumba beleeső bolygópárokat számát jelölik.**

Itt a 2:1 rezonancia esetén itt sem figyelhető meg kiugró eredmény, ellenben nem messze tőle 1,95 arány közelében igen sok bolygópár van, pedig ott nincs is középmozgás-rezonancia. A 3:2, 5:3, 7:4 rezonancia arányok közelében igen sok bolygópár helyezkedik el. Az ábráról leolvasható, hogy itt megjelenik a 7:3 rezonancia is.

Nem ismerjük a legtöbb exobolygó esetén az excentricitást, így sajnos nehéz bármilyen következtetést levonni a rezonanciák esetében. Az egyértelmű, hogy az exobolygók egy része mutat valamilyen középmozgás-rezonanciát, de hogy ez pusztán a véletlen műve lenne vagy pedig ez idáig nem ismert okok miatt alakul ki bizonyos bolygópárok esetében rezonancia, azt a jelenlegi adatok birtokában nehéz megmondani.

## 6. Összefoglalás

A munkám elején azt vizsgáltam, hogy az exobolygó rendszereken belüli bolygó eloszlás mutat-e valamilyen mintát vagy véletlenszerűen oszlanak el. Két egyenlet



segítségével vizsgáltam a félnagy tengelyeket a bolygók sorrendjének függvényében. Az egyik a Naprendszerünkre felírt Titius-Bode szabály volt, míg a másik egy újabban feltételezett szabály. Mindkét egyenlet esetén találtam olyan bolygórendszereket, amelyek teljesítik az egyenletet, de akadtak olyanok is, amelyek nem illeszkedtek megfelelően.

Majd a későbbiekben ennek okait próbáltam meg felkutatni. Így jutottam el a középmozgás-rezonanciához. A második szabályt vizsgáltam meg ez alapján, felírtam egy olyan egyenletet, ahol az exobolygók rezonanciában vannak egymással egy példán keresztül be is mutattam ezt. Ezek után magával az exobolygópárok rezonanciáival foglalkoztam tovább. Megnéztem, van-e különbség a között, hogy az exobolygó rendszer sok bolygót tartalmaz vagy keveset. Bolygópárok rezonanciái esetén találtam olyan bolygókat, amelyek rezonanciában vannak egymással, de sok olyat is amelyek nem mutatnak rezonanciát.

A munkám során azt a következtetést vontam le, hogy nem lehet bizonyítani, hogy a bolygók eloszlása a csillagjuk körül mutat-e valamilyen szabályt. Azt sem tudtam bizonyítani, hogy a bolygósomszédok esetén gyakori-e, hogy középmozgás-rezonanciában lennének egymással. Ennek bizonyításához további vizsgálatokra és több adatra lenne szükség, hisz a Naprendszerünkben is sok rezonancia van, csak mind igen egyedi és ezeket külön kell vizsgálni. Úgy gondolom, hogy az exobolygóknál is igaz ez a felvetés, hogy külön-külön kell az összes exobolygó rendszernél megvizsgálni a lehetséges rezonanciákat. Csakhogy ehhez ismerni kéne az exobolygók összes pályaelemét (főleg a pericentrum hosszúságokat és az excentricitásokat) és az egy adott rendszerben lévő összes exobolygót is fel kell fedeznünk, de a mai műszerekkel ez még nem lehetséges.

A közeljövőben viszont ez változhat, hiszen a csillagászat egyik leggyorsabban fejlődő ága az exobolygó kutatás további műszerek és módszerek készülnek arra, hogy minél jobban megismerjük a Naprendszerünkön kívüli bolygórendszereket.

## 7. Irodalomjegyzék

Poveda A., Lara P.: 2008, *The exo-planetary system of 55 Cancri and the Titius-Bode law*, Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, 44, 243-246

Lovis C., Ségransan D., Mayor M., Udry S., Benz W., Bertaux J.-L., Bouchy F., Correia A. C. M., Laskar J., Lo Cutro G., Mordasini C., Pepe F., Queloz D., Santos N. C.: 2011, *The HARPS search for southern extra-solar planets: XXVII. Up to seven planets orbiting HD 10180: probing the architecture of low-mass planetary systems*, Astronomy & Astrophysics 527, A63

Sándor Zsolt: 2004, *Rezonanciák bolygórendszerekben*, Meteor csillagászati évkönyv 2005, 244-262. o.

Budó Ágoston 1997, *Kísérleti fizika I.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 348. o.

Wisdom J.: 1983, *Astronomical Journal*, **87**, 577. o.

Wisdom J.: 1982, *Icarus*, **56**, 51. o.

Sidlichovsky M., Melendo M.: 1986 *Bulletin of Astronomical Institute of Czechoslovakia*, **37**, 65. o.

Morbideilli A., Moons M.: 1995, *Icarus*, **115**, 60. o.

web 1: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Exobolygó>, 2015

web2:  
[astro.u-szeged.hu/oktatas/csillagaszat/6\\_Naprendszer/0108exobolygok/exobolygok.html](http://astro.u-szeged.hu/oktatas/csillagaszat/6_Naprendszer/0108exobolygok/exobolygok.html)  
(2015)

web3: [http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler\\_\(spacecraft\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_(spacecraft)) (2015)

web4: [http://www.urvilag.hu/amerika\\_es\\_az\\_urcsillagaszat/20130517\\_kepler\\_ez\\_mar\\_a\\_veg](http://www.urvilag.hu/amerika_es_az_urcsillagaszat/20130517_kepler_ez_mar_a_veg)  
(2015)

<http://www.csillagaszat.hu/hirek/tudomany/tu-urteleszkopok/ime-a-kepler-masodik-elso-fenye> (2013)

web 5: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Titius-Bode-szabály> , 2014

web 6: <http://exoplanet.eu> , 2014

web 7: <http://openexoplanetcatalogue.com>, 2015

## 8. Táblázatok

<b>Bolygók távolsága a csillaguktól (au)</b>									
<b>Bolygók lehetséges helyei</b>									
<b>Csillag neve</b>	<b>1.</b>	<b>2.</b>	<b>3.</b>	<b>4.</b>	<b>5.</b>	<b>6.</b>	<b>7.</b>	<b>8.</b>	<b>9.</b>
Kepler-79	0,117	0,187	0,287	0,386					
Kepler-89	0,050	0,099	0,165	0,298					
Kepler-107	0,044	0,059	0,082	0,123					
Kepler-85	0,079	0,104	0,130	0,163					
Kepler-82	0,034	0,063		0,169	0,264				
Kepler-172	0,040	0,068	0,118	0,211					
Kepler-150	0,044	0,073	0,104	0,189					
Kepler-122	0,064	0,108	0,155	0,227					
Kepler-402	0,051	0,068	0,087	0,102					
Kepler-341	0,060	0,080	0,182	0,242					
Kepler-306	0,050	0,067		0,120	0,227				
Kepler-299	0,040	0,070	0,118	0,220					
Kepler-286	0,027	0,042	0,061		0,176				
Kepler-265	0,069	0,127	0,236	0,319					
Kepler-256	0,027	0,045	0,064	0,096					
Kepler-251	0,053	0,122	0,182	0,404					
Kepler-235	0,037	0,065	0,122	0,213					
Kepler-224	0,038	0,058	0,089	0,124					
Kepler-223	0,073	0,088	0,116	0,140					
Kepler-221	0,037	0,059	0,087	0,130					
Kepler-220	0,046	0,076		0,163	0,226				
Kepler-215	0,084	0,113		0,185	0,314				
HR 8799	14,50	27,00	42,90	68,00					
GJ 676A	0,041	0,187				1,800	5,200		
ups And	0,059	0,861	2,550	5,246					
HD 14139	0,423	0,702	2,135	4,897					
Kepler-186	0,040	0,061	0,091	0,129		0,356			
Kepler-84	0,052	0,083	0,108	0,181	0,250				
Kepler-169	0,040	0,062	0,075	0,105	0,359				
Kepler-296	0,039	0,054	0,122	0,174	0,263				
Kepler-292	0,035	0,045	0,068	0,097	0,141				
Kepler-20	0,045	0,051	0,093	0,110	0,345				
Kepler-33	0,068	0,110	0,166	0,214	0,254				
Kepler-62	0,055	0,093	0,120		0,427	0,718			
55 Cnc	0,016	0,113	0,240	0,781	5,760				
Kepler-11	0,091	0,106	0,159	0,194	0,250	0,462			
GJ 667C	0,051	0,125	0,156	0,213	0,276	0,549			
HD 40307	0,047	0,080	0,132	0,189	0,247	0,600			
Kepler-90	0,074	0,089	0,320	0,420	0,480	0,710	1,010		
HD 10180	0,022	0,064	0,090	0,128	0,270	0,330	0,494	1,415	3,490
Nap	0,387	0,723	1,000	1,524		5,200	9,540	19,19	30,10

1. táblázat. A bolygók sorrendje, ill. sorszáma a Titius-Bode illesztés után.

			Számított bolygópályák (au)									
			n	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	6	7
			Bolygók helyei									
Csillag neve	$c_1$	$c_2$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	
Kepler-79	0,12	0,07	0,12	0,19	0,26	0,40	0,69	1,25	2,39	4,66	9,21	
Kepler-89	0,05	0,06	0,05	0,11	0,16	0,27	0,49	0,93	1,81	3,57	7,09	
Kepler-107	0,04	0,02	0,04	0,06	0,08	0,12	0,19	0,33	0,62	1,20	2,35	
Kepler-85	0,08	0,03	0,08	0,10	0,13	0,18	0,28	0,48	0,88	1,68	3,28	
Kepler-82	0,03	0,03	0,03	0,06	0,09	0,15	0,27	0,51	0,99	1,95	3,87	
Kepler-172	0,04	0,03	0,04	0,07	0,10	0,15	0,26	0,49	0,94	1,83	3,62	
Kepler-150	0,04	0,03	0,04	0,07	0,10	0,16	0,28	0,51	0,97	1,90	3,76	
Kepler-122	0,06	0,04	0,06	0,11	0,15	0,24	0,41	0,75	1,43	2,80	5,54	
Kepler-402	0,05	0,02	0,05	0,07	0,09	0,12	0,19	0,32	0,60	1,14	2,23	
Kepler-341	0,06	0,02	0,06	0,08	0,10	0,14	0,22	0,38	0,70	1,34	2,62	
Kepler-306	0,05	0,02	0,05	0,07	0,08	0,12	0,19	0,32	0,59	1,14	2,23	
Kepler-299	0,04	0,03	0,04	0,07	0,10	0,16	0,28	0,52	1,00	1,96	3,88	
Kepler-286	0,03	0,02	0,03	0,04	0,06	0,09	0,16	0,29	0,56	1,10	2,16	
Kepler-265	0,07	0,06	0,07	0,13	0,19	0,31	0,55	1,03	1,99	3,91	7,75	
Kepler-256	0,03	0,02	0,03	0,05	0,06	0,10	0,17	0,32	0,60	1,18	2,33	
Kepler-251	0,05	0,07	0,05	0,12	0,19	0,33	0,61	1,16	2,26	4,47	8,89	
Kepler-235	0,04	0,03	0,04	0,07	0,09	0,15	0,26	0,49	0,93	1,83	3,62	
Kepler-224	0,04	0,02	0,04	0,06	0,08	0,13	0,22	0,41	0,77	1,51	2,98	
Kepler-223	0,07	0,02	0,07	0,09	0,11	0,15	0,22	0,36	0,65	1,23	2,38	
Kepler-221	0,04	0,02	0,04	0,06	0,09	0,13	0,23	0,42	0,81	1,57	3,11	
Kepler-220	0,05	0,03	0,05	0,08	0,11	0,17	0,29	0,53	1,01	1,97	3,89	
Kepler-215	0,08	0,03	0,08	0,11	0,14	0,20	0,32	0,55	1,01	1,94	3,80	
HR 8799	14,50	13,50	14,50	28,00	41,50	68,50	122,5	230,5	446,5	878,5	1743	
GJ 676A	0,04	0,15	0,04	0,19	0,33	0,62	1,21	2,37	4,70	9,37	18,69	
ups And	0,06	0,80	0,06	0,86	1,66	3,27	6,48	12,89	25,72	51,39	102,7	
HD 14139	0,42	0,28	0,42	0,70	0,98	1,54	2,66	4,90	9,38	18,33	36,24	
Kepler-186	0,04	0,02	0,04	0,06	0,08	0,12	0,21	0,38	0,71	1,38	2,73	
Kepler-84	0,05	0,03	0,05	0,08	0,11	0,18	0,30	0,55	1,04	2,04	4,02	
Kepler-169	0,04	0,02	0,04	0,06	0,08	0,13	0,22	0,39	0,74	1,45	2,86	
Kepler-296	0,04	0,02	0,04	0,05	0,07	0,10	0,16	0,28	0,52	1,00	1,96	
Kepler-292	0,04	0,01	0,04	0,05	0,06	0,08	0,12	0,20	0,36	0,68	1,32	
Kepler-20	0,05	0,01	0,05	0,05	0,06	0,07	0,09	0,13	0,22	0,39	0,73	
Kepler-33	0,07	0,04	0,07	0,11	0,15	0,24	0,41	0,74	1,42	2,77	5,48	
Kepler-62	0,06	0,04	0,06	0,09	0,13	0,21	0,36	0,66	1,26	2,46	4,87	
55 Cnc	0,02	0,10	0,02	0,11	0,21	0,41	0,80	1,58	3,15	6,27	12,53	
Kepler-11	0,09	0,02	0,09	0,11	0,13	0,18	0,27	0,44	0,79	1,50	2,91	
GJ 667C	0,05	0,02	0,05	0,07	0,09	0,13	0,21	0,37	0,69	1,33	2,61	
HD 40307	0,05	0,03	0,05	0,08	0,11	0,18	0,31	0,58	1,11	2,17	4,28	
Kepler-90	0,07	0,02	0,07	0,09	0,10	0,13	0,19	0,31	0,55	1,03	1,99	
HD 10180	0,02	0,04	0,02	0,06	0,10	0,18	0,34	0,66	1,30	2,58	5,14	
Nap	0,40	0,30	0,40	0,70	1,00	1,60	2,80	5,20	10,00	19,60	38,80	

2. táblázat. A Titius-Bode szabály alapján számított pályák.

Csillag neve	Relatív eltérés (%)								
	Bolygók lehetséges helyei								
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Kepler-79	0,0	0,5	9,8	3,9					
Kepler-89	0,0	6,1	3,0	9,4					
Kepler-107	2,3	3,4	3,7	6,5					
Kepler-85	0,1	0,3	0,8	9,8					
Kepler-82	0,0	1,6		8,9	3,8				
Kepler-172	0,0	0,0	18,6	28,0					
Kepler-150	0,0	0,0	1,9	15,3					
Kepler-122	0,0	1,1	3,5	3,6					
Kepler-402	0,0	0,0	2,3	16,7					
Kepler-341	0,0	0,0	45,1	42,1					
Kepler-306	0,0	0,0		1,7	18,1				
Kepler-299	0,0	0,0	15,3	27,3					
Kepler-286	0,0	4,0	1,0		8,8				
Kepler-265	1,4	2,4	19,5	2,8					
Kepler-256	0,0	0,0	1,6	3,1					
Kepler-251	0,0	0,0	4,9	18,6					
Kepler-235	0,0	0,0	23,8	30,0					
Kepler-224	0,0	5,2	5,6	4,8					
Kepler-223	0,0	3,4	6,0	3,6					
Kepler-221	0,0	3,4	2,3	2,3					
Kepler-220	0,0	0,0		1,8	26,5				
Kepler-215	0,0	0,0		8,1	0,6				
HR 8799	0,0	3,7	3,3	0,7					
GJ 676A	0,0	0,0				31,8	9,5		
ups And	0,0	0,0	34,8	37,7					
HD 14139	0,0	0,0	54,0	68,5					
Kepler-186	0,0	0,0	9,9	3,9		5,6			
Kepler-84	0,0	0,0	5,6	2,8	20,0				
Kepler-169	0,0	0,0	12,0	21,9	39,8				
Kepler-296	0,0	0,0	43,4	43,1	39,5				
Kepler-292	0,0	0,0	19,1	22,7	18,4				
Kepler-20	0,0	0,0	39,8	39,4	74,5				
Kepler-33	0,0	0,0	8,4	10,8	60,2				
Kepler-62	0,0	0,0	8,8		16,6	8,5			
55 Cnc	0,0	0,0	12,1	47,9	86,1				
Kepler-11	1,1	5,7	15,7	8,2	6,4	4,3			
GJ 667C	0,0	43,6	42,0	38,7	23,7	32,5			
HD 40307	0,0	0,0	14,5	5,0	26,2	3,9			
Kepler-90	0,0	0,0	67,5	68,1	59,6	55,8	45,1		
HD 10180	0,0	3,0	13,1	41,9	26,7	100,7	163,6	82,5	47,3
Nap	3,4	3,2	0,0	5,0		0,0	4,8	2,1	28,9

3. táblázat. A számolt és a valós pálya félnagytestély közötti relatív eltérés (Titius-Bode).

<b>Bolygók távolsága a csillaguktól (au)</b>										
<b>Bolygók lehetséges helyei</b>										
<b>Csillag neve</b>	<b>1.</b>	<b>2.</b>	<b>3.</b>	<b>4.</b>	<b>5.</b>	<b>6.</b>	<b>7.</b>	<b>8.</b>	<b>9.</b>	<b>10.</b>
Kepler-79	0,117	0,187	0,287	0,386						
Kepler-89	0,050	0,099	0,165	0,298						
Kepler-107	0,044	0,059	0,082	0,123						
Kepler-85	0,079	0,104	0,130	0,163						
Kepler-82	0,034	0,063		0,169	0,264					
Kepler-172	0,040	0,068	0,118	0,211						
Kepler-150	0,044	0,073	0,104	0,189						
Kepler-122	0,064	0,108	0,155	0,227						
Kepler-402	0,051	0,068	0,087	0,102						
Kepler-341	0,060	0,080			0,182	0,242				
Kepler-306	0,050	0,067		0,120		0,227				
Kepler-299	0,040	0,070	0,118	0,220						
Kepler-286	0,027	0,042	0,061		0,176					
Kepler-265	0,069	0,127	0,236	0,319						
Kepler-256	0,027	0,045	0,064	0,096						
Kepler-251	0,053	0,122	0,182	0,404						
Kepler-235	0,037	0,065	0,122	0,213						
Kepler-224	0,038	0,058	0,089	0,124						
Kepler-223	0,073	0,088	0,116	0,140						
Kepler-221	0,037	0,059	0,087	0,130						
Kepler-220	0,046	0,076		0,163	0,226					
Kepler-215	0,084	0,113		0,185		0,314				
HR 8799	14,50	27,00	42,90	68,00						
GJ 676A	0,041	0,187	1,800	5,200						
ups And	0,059	0,861	2,550	5,246						
HD 14139	0,423	0,702	2,135	4,897						
Kepler-186	0,040	0,061	0,091	0,129		0,356				
Kepler-84	0,052	0,083	0,108	0,181	0,250					
Kepler-169	0,040	0,062	0,075	0,105				0,359		
Kepler-296	0,039	0,054		0,122	0,174	0,263				
Kepler-292	0,035	0,045	0,068	0,097	0,141					
Kepler-20	0,045	0,051	0,093	0,110			0,345			
Kepler-33	0,068	0,110	0,166	0,214	0,254					
Kepler-62	0,055	0,093	0,120			0,427	0,718			
55 Cnc	0,016	0,113	0,240	0,781	5,760					
Kepler-11	0,091	0,106	0,159	0,194	0,250		0,462			
GJ 667C	0,051		0,125	0,156	0,213	0,276		0,549		
HD 40307	0,047	0,080	0,132	0,189	0,247		0,600			
Kepler-90	0,074	0,089				0,320	0,420	0,480	0,710	1,010
HD 10180	0,022	0,064	0,090	0,128	0,270	0,330	0,494	1,415	3,490	
Nap	0,387	0,723	1,000	1,524		5,200	9,540	19,19	30,10	

4. táblázat. A bolygók sorrendje, ill. sorszáma a Poveda-Lara illesztés után.

			Számított bolygópályák (au)										
			n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			Bolygók helyei										
Csillag neve	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	
Kepler-79	0,08	1,48	0,12	0,18	0,27	0,40	0,59	0,87	1,28	1,89	2,78	4,11	
Kepler-89	0,03	1,76	0,05	0,10	0,17	0,30	0,52	0,91	1,60	2,81	4,93	8,67	
Kepler-107	0,03	1,43	0,04	0,06	0,08	0,12	0,17	0,24	0,35	0,50	0,71	1,01	
Kepler-85	0,06	1,26	0,08	0,10	0,13	0,16	0,20	0,25	0,32	0,40	0,50	0,63	
Kepler-82	0,02	1,68	0,03	0,06	0,10	0,16	0,27	0,46	0,77	1,29	2,17	3,66	
Kepler-172	0,02	1,71	0,04	0,07	0,12	0,21	0,35	0,61	1,04	1,78	3,06	5,24	
Kepler-150	0,03	1,57	0,04	0,07	0,11	0,17	0,27	0,43	0,68	1,07	1,69	2,65	
Kepler-122	0,04	1,53	0,06	0,10	0,15	0,23	0,35	0,53	0,81	1,25	1,91	2,92	
Kepler-402	0,04	1,24	0,05	0,07	0,08	0,10	0,13	0,16	0,20	0,24	0,30	0,37	
Kepler-341	0,05	1,31	0,06	0,08	0,11	0,14	0,18	0,24	0,32	0,41	0,54	0,70	
Kepler-306	0,04	1,36	0,05	0,07	0,09	0,12	0,16	0,22	0,31	0,42	0,57	0,78	
Kepler-299	0,02	1,78	0,04	0,07	0,12	0,21	0,38	0,68	1,20	2,13	3,79	6,73	
Kepler-286	0,01	1,69	0,02	0,04	0,06	0,11	0,18	0,30	0,51	0,87	1,46	2,47	
Kepler-265	0,04	1,62	0,07	0,12	0,19	0,30	0,49	0,80	1,30	2,11	3,43	5,56	
Kepler-256	0,02	1,51	0,03	0,04	0,06	0,10	0,15	0,22	0,34	0,51	0,77	1,17	
Kepler-251	0,03	1,99	0,05	0,10	0,20	0,39	0,78	1,54	3,06	6,09	12,10	24,04	
Kepler-235	0,02	1,84	0,03	0,06	0,11	0,21	0,39	0,71	1,31	2,40	4,42	8,12	
Kepler-224	0,02	1,52	0,04	0,06	0,08	0,13	0,20	0,30	0,45	0,69	1,05	1,59	
Kepler-223	0,06	1,23	0,07	0,09	0,11	0,14	0,17	0,21	0,26	0,32	0,40	0,49	
Kepler-221	0,03	1,50	0,04	0,06	0,09	0,13	0,19	0,29	0,44	0,65	0,98	1,46	
Kepler-220	0,03	1,49	0,05	0,07	0,10	0,15	0,23	0,34	0,51	0,76	1,12	1,67	
Kepler-215	0,06	1,33	0,08	0,10	0,14	0,18	0,25	0,33	0,44	0,58	0,78	1,04	
HR 8799	8,65	1,68	14,53	24,41	41,02	68,91	115,8	194,5	326,7	548,9	922,1	1549	
GJ 676A	0,01	5,00	0,04	0,19	0,94	4,69	23,44	117,2	585,9	2930	14648	73242	
ups And	0,01	6,00	0,03	0,18	1,08	6,48	38,88	233,3	1400	8398	50388	302331	
HD 14139	0,15	2,35	0,35	0,83	1,96	4,61	10,82	25,43	59,77	140,4	330,1	775,63	
Kepler-186	0,03	1,49	0,04	0,06	0,09	0,13	0,20	0,30	0,44	0,66	0,98	1,46	
Kepler-84	0,04	1,47	0,05	0,08	0,11	0,17	0,25	0,36	0,53	0,78	1,15	1,70	
Kepler-169	0,03	1,36	0,04	0,06	0,08	0,10	0,14	0,19	0,26	0,35	0,48	0,65	
Kepler-296	0,02	1,48	0,04	0,05	0,08	0,12	0,18	0,26	0,39	0,58	0,86	1,27	
Kepler-292	0,02	1,42	0,03	0,05	0,07	0,10	0,14	0,20	0,28	0,40	0,57	0,81	
Kepler-20	0,02	1,46	0,04	0,05	0,08	0,11	0,16	0,23	0,34	0,50	0,73	1,06	
Kepler-33	0,07	1,30	0,09	0,12	0,15	0,19	0,25	0,33	0,42	0,55	0,71	0,93	
Kepler-62	0,04	1,54	0,05	0,08	0,13	0,20	0,31	0,47	0,73	1,12	1,73	2,66	
55 Cnc	0,00	4,48	0,01	0,05	0,22	1,00	4,49	20,08	89,84	402,1	1799	8051,4	
Kepler-11	0,07	1,32	0,09	0,11	0,15	0,20	0,26	0,34	0,45	0,60	0,79	1,04	
GJ 667C	0,04	1,36	0,06	0,08	0,11	0,15	0,20	0,28	0,38	0,51	0,70	0,95	
HD 40307	0,04	1,49	0,05	0,08	0,12	0,18	0,26	0,39	0,59	0,87	1,30	1,94	
Kepler-90	0,05	1,35	0,07	0,09	0,12	0,17	0,22	0,30	0,41	0,55	0,74	1,01	
HD 10180	0,05	1,3	0,065	0,085	0,11	0,143	0,186	0,241	0,314	0,408	0,53	0,6893	
Nap	0,2	1,75	0,35	0,613	1,072	1,876	3,283	5,745	10,05	17,59	30,79	53,878	

5. táblázat. A Poveda-Lara szabály alapján számított pályák.

Csillag neve	Relatív eltérés (%)									
	Bolygók lehetséges helyei									
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Kepler-79	5,4	2,7	6,4	2,8						
Kepler-89	8,9	3,4	1,8	1,0						
Kepler-107	6,0	0,0	2,7	2,4						
Kepler-85	1,9	2,6	2,3	2,1						
Kepler-82	1,0	10,0		4,9	2,4					
Kepler-172	2,8	3,6	2,3	1,9						
Kepler-150	1,9	3,3	6,8	7,6						
Kepler-122	0,8	10,0	4,1	0,2						
Kepler-402	5,8	1,6	4,7	0,8						
Kepler-341	5,6	3,5			1,4	0,3				
Kepler-306	4,6	2,9		0,8		0,9				
Kepler-299	4,5	3,1	2,2	2,7						
Kepler-286	18,6	11,6	2,9		1,8					
Kepler-265	3,5	8,8	20,4	4,4						
Kepler-256	3,7	5,8	0,2	1,1						
Kepler-251	6,2	19,1	7,8	3,4						
Kepler-235	8,1	3,9	5,9	1,0						
Kepler-224	3,9	4,3	5,1	3,6						
Kepler-223	1,4	3,7	2,9	0,8						
Kepler-221	5,1	1,4	0,1	0,2						
Kepler-220	1,9	8,3		5,4	1,5					
Kepler-215	7,1	7,9		0,0		4,8				
HR 8799	0,2	9,6	4,4	1,3						
GJ 676A	9,2	0,3	47,9	9,9						
ups And	49,2	79,1	57,6	23,5						
HD 14139	16,0	18,7	8,2	6,0						
Kepler-186	0,6	1,7	1,9	3,2		17,0				
Kepler-84	1,8	6,3	5,9	7,1	1,2					
Kepler-169	2,0	10,5	0,6	2,3				2,2		
Kepler-296	6,8	0,1		2,6	1,3	0,5				
Kepler-292	2,5	7,8	1,4	1,0	1,2					
Kepler-20	21,3	2,7	18,4	0,5			0,9			
Kepler-33	32,1	5,4	9,5	8,8	0,3					
Kepler-62	1,1	9,4	8,0			10,9	1,6			
55 Cnc	28,3	55,9	6,8	28,4	22,1					
Kepler-11	5,7	6,8	6,0	1,7	4,2		1,8			
GJ 667C	18,5		11,5	3,5	3,9	0,9		6,2		
HD 40307	14,6	0,0	9,9	5,9	7,0		2,2			
Kepler-90	8,8	2,4				5,4	2,7	14,9	4,9	0,5
HD 10180	192,8	31,8	21,5	11,2	31,2	26,9	36,5	71,2	84,8	
Nap	9,6	15,3	7,2	23,1		10,5	5,4	8,3	2,3	36,4

5. táblázat. A számolt és a valós pálya félnagytegyel közötti relatív eltérés (Poveda-Lara)



Csillag neve	Keringési idő (nap)								
	Bolygók sorszáma								
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Nap	88,00	225	365	687	4333	10756	30687	60190	90553
Kepler-90	7,01	8,72	59,74	91,94	124,9	210,6	331,6		
HD 40307	4,31	9,62	20,40	34,60	51,80	197,8			
Kepler-11	10,30	13,02	22,68	32,00	46,69	118,4			
Kepler-33	5,67	13,18	21,78	31,78	41,03				
Kepler-169	3,25	6,20	8,35	13,18	87,09				
Kepler-84	4,22	8,73	12,88	27,43	44,55				
Kepler-102	5,29	7,07	10,31	16,15	27,50				
Kepler-238	2,09	6,16	13,65	23,65	50,44				
Kepler-32	0,74	2,90	5,90	8,75	22,78				
Kepler-62	5,71	12,44	18,66	122,4	267,0				
Kepler-292	2,58	3,72	7,06	11,98	20,83				
Kepler-186	3,88	7,27	13,34	22,41	129,9				
Kepler-444	3,60	4,55	6,19	7,74	9,74				
Kepler-55	2,21	4,62	10,20	27,95	42,14				
55 Cnc	0,74	14,65	44,42	262	4825				
Kepler-296A	3,62	5,84	19,85	34,14	63,34				
Kepler-20	3,70	6,10	10,85	19,58	77,60				
Kepler-402	4,03	6,12	8,92	11,24					
Kepler-215	9,36	14,67	30,86	68,16					
Kepler-223	7,38	9,85	14,79	19,72					
Kepler-26	3,54	12,28	17,25	46,83					
Kepler-150	3,43	7,38	12,56	30,83					
Gliese 876	1,94	30,09	61,12	124,3					
HR 8799	18000	41054	82145	164300					
Kepler-208	4,23	7,47	11,13	16,26					
Kepler-85	8,31	12,51	17,91	25,22					
Kepler-256	1,62	3,39	5,84	10,68					
Kepler-306	4,65	7,24	17,33	44,84					
Kepler-197	5,60	10,35	15,68	25,21					
Kepler-24	4,24	8,15	12,33	19,00					
Kepler-172	2,94	6,39	14,63	35,12					
Kepler-286	1,80	3,47	5,91	29,22					
Kepler-251	4,79	16,51	30,13	99,64					
Kepler-107	3,18	4,90	7,96	14,75					
Kepler-265	6,85	17,03	43,13	67,83					
HD 141399	94,35	202	1070	3717					
Kepler-48	4,78	9,67	42,90	982,00					
Kepler-282	9,22	13,64	24,81	44,35					
Kepler-224	3,13	5,93	11,35	18,64					
Kepler-122	5,77	12,47	21,59	37,99					
Kepler-80	3,07	4,65	7,05	9,52					
Kepler-299	2,93	6,89	15,05	38,29					

7. táblázat. 4 és annál több bolygót tartalmazó rendszerben található exobolygók keringési ideje (1-43-ig).

Csillag neve	Keringési idő (nap)			
	Bolygók sorszáma			
	1.	2.	3.	4.
Kepler-235	3,34	7,82	20,06	46,18
Kepler-220	4,16	9,03	28,12	45,90
Kepler-341	5,20	8,01	27,67	42,47
Kepler-82	2,38	5,90	26,44	51,53
Kepler-106	6,16	13,57	24,00	43,80
Ups And A	4,62	238	1303	3849
Kepler-79	13,48	27,40	52,09	81,07
Kepler-221	2,80	5,69	10,04	18,37
Kepler-49	2,58	7,20	10,91	18,60
mu Arae	9,64	311,0	643,0	4206,0
Kepler-89	3,74	10,42	22,34	54,32

8. táblázat. 4 és annál több bolygót tartalmazó rendszerben található exobolygók keringési ideje (44-54-ig).

Csillag neve	Keringési idők aránya							
	$p_2/p_1$	$p_3/p_2$	$p_4/p_3$	$p_5/p_4$	$p_6/p_5$	$p_7/p_6$	$p_8/p_7$	$p_9/p_8$
Nap	2,56	1,62	1,88	6,31	2,48	2,85	1,96	1,50
Kepler-90	1,24	6,85	1,54	1,36	1,69	1,57		
HD 40307	2,23	2,12	1,70	1,50	3,82			
Kepler-11	1,26	1,74	1,41	1,46	2,54			
Kepler-33	2,32	1,65	1,46	1,29				
Kepler-169	1,91	1,35	1,58	6,61				
Kepler-84	2,07	1,48	2,13	1,62				
Kepler-102	1,34	1,46	1,57	1,70				
Kepler-238	2,94	2,22	1,73	2,13				
Kepler-32	3,90	2,04	1,48	2,60				
Kepler-62	2,18	1,50	6,56	2,18				
Kepler-292	1,44	1,90	1,70	1,74				
Kepler-186	1,87	1,84	1,68	5,80				
Kepler-444	1,26	1,36	1,25	1,26				
Kepler-55	2,09	2,21	2,74	1,51				
55 Cnc	19,89	3,03	5,90	18,42				
Kepler-296A	1,61	3,40	1,72	1,86				
Kepler-20	1,65	1,78	1,80	3,96				
Kepler-402	1,52	1,46	1,26					
Kepler-215	1,57	2,10	2,21					
Kepler-223	1,33	1,50	1,33					
Kepler-26	3,47	1,40	2,71					
Kepler-150	2,15	1,70	2,45					

9. táblázat. Szomszédos bolygópárok keringési idejének hányadosa (1-23-ig).

Keringési idők aránya								
Csillag neve	$p_2/p_1$	$p_3/p_2$	$p_4/p_3$	$p_5/p_4$	$p_6/p_5$	$p_7/p_6$	$p_8/p_7$	$p_9/p_8$
Gliese 876	15,53	2,03	2,03					
HR 8799	2,28	2,00	2,00					
Kepler-208	1,77	1,49	1,46					
Kepler-85	1,51	1,43	1,41					
Kepler-256	2,09	1,72	1,83					
Kepler-306	1,56	2,39	2,59					
Kepler-197	1,85	1,51	1,61					
Kepler-24	1,92	1,51	1,54					
Kepler-172	2,17	2,29	2,40					
Kepler-286	1,93	1,71	4,94					
Kepler-251	3,45	1,82	3,31					
Kepler-107	1,54	1,62	1,85					
Kepler-265	2,49	2,53	1,57					
HD 141399	2,14	5,29	3,47					
Kepler-48	2,02	4,44	22,89					
Kepler-282	1,48	1,82	1,79					
Kepler-224	1,89	1,92	1,64					
Kepler-122	2,16	1,73	1,76					
Kepler-80	1,51	1,52	1,35					
Kepler-299	2,35	2,19	2,54					
Kepler-235	2,34	2,56	2,30					
Kepler-220	2,17	3,11	1,63					
Kepler-341	1,54	3,45	1,54					
Kepler-82	2,48	4,48	1,95					
Kepler-106	2,20	1,77	1,83					
Ups And A	51,52	5,47	2,95					
Kepler-79	2,03	1,90	1,56					
Kepler-221	2,04	1,76	1,83					
Kepler-49	2,80	1,51	1,70					
mu Arae	32,26	2,07	6,54					
Kepler-89	2,78	2,14	2,43					

10. táblázat. Szomszédos bolygópárok keringési idejének hányadosa (24-54-ig).

Csillag neve	Keringési idő (nap)		Keringési idők aránya
	Bolygók sorszáma		
	1.	2.	$p_2/p_1$
HD 1461	5,8	13,5	2,34
KOI-1194	4,2	8,7	2,08
Kepler-153	18,9	46,9	2,49
HD 4203	437,1	6700	15,33
HD 187123	3,1	3810	1229,03
Kepler-131	16,1	25,5	1,58
CoRoT-24	5,1	12	2,30
Kepler-211	4,1	6	1,46
Kepler-294	3,7	6,6	1,79
Kepler-214	15,7	28,8	1,84
Kepler-189	10,4	20	1,94
Kepler-101	3,5	6,0	1,73
Kepler-156	5,0	15,9	3,20
HIP 11952	7,0	290,0	41,73
Kepler-344	22,0	125,6	5,72
Kepler-227	9,5	54,4	5,74
Kepler-404	11,8	14,8	1,25
HD 183263	626,0	2950	4,71
Kepler-196	20,7	47	2,29
Kepler-225	6,7	18,8	2,79
Kepler-128	15,1	22,8	1,51
BD20 2457	380,0	622	1,64
Kepler-173	4,3	8,0	1,88
KOI-1299	52,5	406	7,73
Kepler-260	8,2	76,1	9,29
Kepler-166	7,7	34,3	4,48
Kepler-266	6,6	107,7	16,28
HD 12661	264,0	1708	6,47
Kepler-213	2,5	4,8	1,96
HD 128311	460,0	911,0	1,98
Kepler-242	8,2	14,5	1,77
Kepler-170	7,9	16,7	2,10
Kepler-94	2,5	820,0	326,69
HD 202206	256,0	1383	5,40
Kepler-395	7,1	35	4,96
Kepler-277	17,3	33,0	1,91
HD 215152	7,3	10,9	1,49
Kepler-210	2,5	8	3,25
HD 9446	30,1	192,9	6,41
Kepler-362	10,3	37,9	3,67
Kepler-241	12,7	36,1	2,84
HD 4732	360,0	2732	7,59
Kepler-261	10,4	25	2,37

Csillag neve	Keringési idő (nap)		Keringési idők aránya
	Bolygók sorszáma		
	1.	2.	$p_2/p_1$
Kepler-368	26,8	72,4	2,70
HD 154857	408,6	3452	8,45
Kepler-370	4,6	19,0	4,15
Kapteyn	48,6	121,5	2,50
Kepler-188	2,1	6,0	2,91
Kepler-216	7,7	17,4	2,26
83 Leonis B	17,0	4970	291,67
HIP 5158	346,0	9018	26,06
Kepler-154	33,0	62,3	1,89
Kepler-379	20,1	62,8	3,12
Kepler-400	9,0	17	1,92
Kepler-113	4,8	8,9	1,88
Kepler-405	10,6	29,7	2,80
Kepler-29	10,3	13,3	1,29
Kepler-403	7,0	54,3	7,72
Kepler-389	3,2	14,5	4,47
HD 65216	613,0	5542	9,04
Kepler-252	6,7	10,8	1,63
HD 11964 A	37,9	1945	51,32
Kepler-381	5,6	13,4	2,38
Gliese 221	3,9	125,1	32,30
Gliese 433	7,4	3400	459,46
Kepler-380	3,9	7,6	1,94
HD 147018	44,2	1008	22,81
Kepler-346	6,5	23,9	3,66
Kepler-323	1,7	3,6	2,12
Kepler-232	4,4	11,4	2,57
Kepler-398	4,1	11,4	2,80
HD 109271	7,9	30,9	3,93
HD217107	7,1	4210	590,46
Kepler-349	5,9	12,2	2,07
Kepler-240	4,1	8,0	1,92
HD 13808	14,2	53,8	3,79
HD 113538	663,0	1818	2,74
Kepler-198	17,8	49,6	2,79
HD 45364	227,0	343,0	1,51
Kepler-120	6,3	12,8	2,03
Kepler-390	6,7	13	1,94
KOI-523	36,9	49,4	1,34
Kepler-352	10,1	16,3	1,62
Kepler-201	25,7	151,9	5,92
NN Ser (AB)	2793	5655	2,02
Kepler-393	9,2	15	1,59

11. táblázat. A 2 bolygót tartalmazó rendszerek exobolygóinak keringési ideje és a bolygópárok keringési idejének hányadosa (1-86-ig).

Csillag neve	Keringési idő (nap)		Keringési idők aránya
	Bolygók sorszama		
	1.	2.	$p_2/p_1$
WASP-94	2,0	4,0	1,97
Kepler-366	3,3	12,5	3,81
KOI-1873	34,9	71,3	2,04
Kepler-59	11,9	18,0	1,51
Kepler-121	3,2	41,0	12,91
Kepler-258	13,2	33,7	2,55
Kepler-343	9,0	23	2,59
HD 11506	223,6	1628	7,28
Kepler-185	1,6	20,7	12,69
Kepler-140	3,3	91,4	28,07
Kepler-50	7,8	9	1,20
Kepler-424	3,3	223,0	67,33
Kepler-236	8,3	24,0	2,89
Kepler-231	10,1	19,3	1,91
Kepler-291	3,5	5,7	1,61
Kepler-406	2,4	4,6	1,90
Kepler-212	16,3	31,8	1,96
Kepler-356	4,6	13,1	2,84
Kepler-187	4,9	11	2,15
Kepler-240	14,8	22,8	1,54
Kepler-394	8,0	12,1	1,52
HD 134060	3,3	1161	355,05
Kepler-347	12,8	27,3	2,13
HD 93385	13,2	46	3,49
Kepler-300	10,4	40,7	3,90
Kepler-387	6,8	11,8	1,74
Kepler-136	11,6	16,4	1,42
Kepler-134	5,3	10,1	1,90
Kepler-217	5,4	8,6	1,60
Kepler-143	16,0	27,1	1,69
Kepler-311	9,2	19,7	2,15
HD 13908	19,4	931,0	48,03
Kepler-315	96,1	265,5	2,76
Kepler-243	5,7	20,0	3,50
HIP 67851	89,1	2203	24,73
Kepler-321	4,9	13,1	2,66
Kepler-119	2,4	4,1	1,70
HD 102272	127,6	520	4,08
Kepler-377	12,5	27,0	2,16
Kepler-303	1,9	7,1	3,65
Kepler-144	5,9	10,1	1,72
CoRoT-7	0,9	3,7	4,33
Kepler-181	3,1	4	1,37

Csillag neve	Keringési idő (nap)		Keringési idők aránya
	Bolygók sorszama		
	1.	2.	$p_2/p_1$
HAT-P-13	2,9	448,0	153,42
Kepler-168	4,4	13,2	2,98
KOI-341	4,7	7,2	1,53
Kepler-263	16,6	47,3	2,86
Kepler-385	10,0	15,2	1,51
Kepler-391	7,4	20,5	2,76
HD 74156	51,6	2476	47,98
Kepler-316	2,2	6,8	3,05
Kepler-108	49,2	190,3	3,87
HD 41248	18,4	25,7	1,40
HD 38529 A	14,3	2135	149,20
Kepler-160	4,3	13,7	3,18
Kepler-271	5,2	7,4	1,42
Kepler-183	5,7	11,6	2,05
Kepler-371	34,8	68,0	1,96
Kepler-246	4,6	11,2	2,43
Kepler-159	10,1	43,6	4,30
Kepler-205	2,8	20,3	7,37
HAT-P-17	10,3	1798	173,89
Kepler-147	12,6	33,4	2,65
Kepler-313	15,0	32,3	2,16
HD 169830	230,0	2102	9,14
Kepler-200	8,6	10,2	1,19
HD 168443	58,1	1750	30,12
Kepler-285	2,6	6,2	2,35
Kepler-218	3,6	44,7	12,35
Kepler-262	13,1	21,9	1,67
Kepler-204	14,4	25,7	1,78
Kepler-355	11,0	25,8	2,34
Kepler-137	8,4	18,7	2,22
Kepler-320	8,4	17,9	2,14
HD 215497	3,9	568,0	144,53
Kepler-135	6,0	11,4	1,91
Kepler-162	6,9	19,4	2,81
Kepler-397	22,3	135,5	6,09
HD 159243	12,6	248,0	19,65
Kepler-116	6,0	13,1	2,19
nu Oph	530,3	3186	6,01
HD 155358	194,3	392,0	2,02
Kepler-192	9,9	21,2	2,14
Kepler-273	2,9	8,0	2,73
KOI-2672	43,0	88,5	2,06
HD 114386	937,0	1046	1,12

12. táblázat. A 2 bolygót tartalmazó rendszerek exobolygóinak keringési ideje és a bolygópárok keringési idejének hányadosa (87-172-ig).

Csillag neve	Keringési idő (nap)		Keringési idők aránya
	Bolygók sorszámára		
	1.	2.	$p_2/p_1$
Kepler-180	13,8	41,9	3,03
Kepler-367	37,8	53,6	1,42
Kepler-348	7,1	17,3	2,45
Kepler-283	11,0	92,7	8,42
Kepler-87	114,7	192,4	1,68
Kepler-193	11,4	50,7	4,45
Kepler-151	15,2	25	1,62
Kepler-386	12,3	25	2,05
Kepler-361	8,5	55,2	6,50
Gliese 832	35,7	3660	102,61
Kepler-281	14,6	36	2,48
Kepler-146	31,2	76,7	2,46
Kepler-401	14,4	47,3	3,29
BD-082823	5,6	238,0	42,50
Kepler-239	11,8	56,2	4,78
Kepler-165	8,2	15,3	1,87
Kepler-10	0,8	45,3	54,08
Kepler-270	11,5	25,3	2,20
Kepler-28	5,9	9	1,52
Kepler-345	7,4	9,4	1,27
Kepler-233	8,5	60,4	7,13
HD 21693	22,7	54	2,37
Kepler-190	2,0	3,8	1,86
Kepler-105	5,4	7	1,32
Kepler-118	7,5	20,2	2,68
Kepler-382	5,3	12,2	2,31
Kepler-264	40,8	141,1	3,46
HD 215456	192,0	2277	11,86
HD 163607	75,2	1314	17,47
HD 142 A	350,0	6005	17,16
Kepler-179	2,7	6,4	2,34
Kepler-161	4,9	7,1	1,44
KOI-370	23,0	42,9	1,87
Kepler-269	5,3	8,1	1,53
Kepler-308	9,7	15	1,59
Kepler-335	6,6	67,8	10,34
Kepler-375	12,1	20,0	1,65
Kepler-287	20,3	45	2,20
24 Sex	453,0	883,0	1,95
HD 5319	641,0	886,0	1,38
Kepler-129	15,8	82,2	5,21
Kepler-293	19,3	54,2	2,81
Kepler-191	9,9	18	1,78

Csillag neve	Keringési idő (nap)		Keringési idők aránya
	Bolygók sorszámára		
	1.	2.	$p_2/p_1$
Kepler-378	16,1	28,9	1,80
Kepler-329	7,4	18,7	2,52
HD 82943	219,3	442,0	2,02
Kepler-290	14,6	36,8	2,52
Kepler-157	1,7	13,5	7,82
Kepler-57	5,7	11,6	2,03
Kepler-115	2,4	9	3,74
HD 20003	11,9	33,8	2,85
Kepler-69	13,7	242,0	17,64
Kepler-280	2,1	4,8	2,25
Kepler-358	34,1	83	2,45
Kepler-330	8,3	16,0	1,93
Kepler-255	5,7	9,9	1,74
Kepler-384	22,6	45,3	2,01
HD 60532	202,0	607,0	3,00
Kepler-353	5,8	8,4	1,45
OGLE-06-109L	1790	4931	2,75
Kepler-158	16,7	28,6	1,71
Kepler-209	16,1	42	2,60
Kepler-163	7,8	21,3	2,73
Kepler-284	12,7	37,5	2,95
Kepler-248	6,3	16	2,57
Kepler-351	37,1	57,2	1,54
Kepler-317	5,5	9	1,59
Kepler-274	11,6	33,2	2,85
Kepler-309	5,9	105,4	17,79
HD 177830 A	110,9	407,0	3,67
Kepler-109	6,5	21,2	3,27
Kepler-392	5,3	10,4	1,95
Kepler-314	2,5	6,0	2,42
KOI-55	0,2	0,3	1,43
Gliese 317	692,0	10000	14,45
Kepler-376	4,9	14,2	2,88
HD 73526	189,7	376,9	1,99
Kepler-141	3,1	7,0	2,26
Kepler-383	12,9	31,2	2,42
Kepler-133	8,1	31,5	3,88
Kepler-360	3,3	7	2,18
Kepler-155	5,9	52,7	8,88
Kepler-237	4,7	8,1	1,72
Kepler-139	15,8	157,1	9,96
HD 47186	4,1	1354	331,86
Kepler-117	18,8	51	2,70

13. táblázat. A 2 bolygót tartalmazó rendszerek exobolygóinak keringési ideje és a bolygópárok keringési idejének hányadosa (173-258-ig).

Csillag neve	Keringési idő (nap)		Keringési idők aránya
	Bolygók sorszama		
	1.	2.	$p_2/p_1$
KOI-142	11,0	22,1	2,02
Kepler-364	25,7	60,0	2,33
Kepler-230	32,6	91,8	2,81
Kepler-297	38,9	74,9	1,93
Kepler-36	13,8	16,2	1,17
Kepler-110	12,7	31,7	2,50
Kepler-152	18,2	88	4,85
Kepler-318	4,7	12	2,53
Kepler-112	8,4	28,6	3,40
Kepler-388	3,2	13,3	4,19
Gliese 777 A	17,1	2891	169,06
Kepler-268	25,9	83,4	3,22
Kepler-175	11,9	34,0	2,86
HD 7449	1275	4046	3,17
Kepler-302	30,2	127,3	4,22
Kepler-27	15,3	31,3	2,04
HD 159868	352,0	1178	3,35
HD 200964	614,0	825,0	1,34
Kepler-278	30,2	51	1,69
Kepler-182	9,8	20,7	2,11
TYC 1422-614-1	198,4	559,3	2,82
Kepler-202	4,1	16	4,00
Kepler-259	8,1	36,9	4,55
EPIC201505350	7,9	12	1,50
Kepler-333	12,6	24,1	1,92
Kepler-373	5,5	16,7	3,02
Kepler-111	3,3	225	67,26

Csillag neve	Keringési idő (nap)		Keringési idők aránya
	Bolygók sorszama		
	1.	2.	$p_2/p_1$
HD 207832	162,0	1156	7,14
HD 51608	14,1	95,4	6,78
Gliese 785	74,7	526,0	7,04
Kepler-312	1,8	19,7	11,14
Kepler-337	3,3	9,7	2,94
eta Cet	403,5	752,0	1,86
HD 108874	395,0	1606	4,07
KOI-285	13,8	26,7	1,94
Kepler-307	10,4	13,1	1,26
KOI-1194	4,2	8,7	2,08
Kepler-47 (AB)	49,5	303,2	6,12
Kepler-103	16,0	179,6	11,25
Kepler-148	1,7	4,2	2,42
HD 37605	55,0	2720	49,45
Kepler-322	1,7	4,3	2,62
HD 134987	258,0	5000	19,38
Kepler-195	8,3	34,1	4,10
Kepler-365	10,7	17,8	1,67
Kepler-234	2,7	7	2,66
Kepler-167	4,4	7,4	1,69
HD 96700	8,1	103,5	12,73
HD 47536	430,0	2500	5,81
Kepler-369	2,7	14,9	5,44
Kepler-125	4,2	5,8	1,39
Kepler-324	4,4	51,8	11,81
Kepler-199	23,6	67,1	2,84

14. táblázat. A 2 bolygót tartalmazó rendszerek exobolygóinak keringési ideje és a bolygópárok keringési idejének hányadosa (259-311-ig).

## 9. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni a segítséget témavezetőmnek Dr. Szatmáry Károlynak. Köszönöm, a szakdolgozatom elkészítéséhez kapott anyagokat, szakmai segítséget, valamint annak a lehetőségét, hogy megismerkedhettem az exobolygók világával.

# Nyilatkozat

Alulírott Czavalinga Donát Róbert Fizika BSc szakos hallgató (ETR azonosító CZDTAAT.SZE) a *Rezonanciák extraszoláris bolygórendszerekben* című szakdolgozat szerzője fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézetek általános szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Szeged, 2015. május 16.

.....  
Czavalinga Donát Róbert